جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

دروس عبر الخط في مقياس:

تحليل المدخلات والمخرجات

مدعمة بأمثلة وتطبيقات

المستوى السنة الثانية ماستر اقتصاد كمي

من إعداد: د/ لطفي مخزومي

السنة الجامعية 2021/2020

المصفوفات والجبر الخطي

تعتبر المصـــفوفات لغة رياضـــية قوية وموجزة. فالعلاقات التي تحتاج عادة إلى عدد كبير من الرموز والأرقام يمكن التعبير عنها بإيجاز ووضـوح باسـتخدام المصـفوفات. والمصـفوفة عبارة عن مجموعة من الكميات التي عددها m×n مرتبة في تشـكيل يحتوى على m من الصفوف وn من الأعمدة. وتختلف المصفوفة عن المحددة في شكلها بأن يوضع تشكيل المصفوفة عادة بين قوسين مربعين (أو مستديرين) ويعبر عن المصفوفة بحرف واحد كبير A , B , C وأحياناً بالرمز Δ فمثلاً

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

وتســمى الكميات aik المكونة للمصــفوفة بعناصــر المصــفوفة حيث i عدد الصــفوف و k عدد الأعمدة وتســمى المصفوفة التي تحتوى على صفوف عددها m وأعمدة عددها n بمصفوفة ذات رتبة (m×n) وإذا كانت m=n فإن المصفوفة تكون مربعة ولا توجد للمصفوفات أى قيمة جبرية بعكس المحددات.

1 العمليات الجبرية للمصفوفات: Matrices Algebra

1-1 جمع و طرح المصفوفات: Matrices addition and subtraction

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح للمصـفوفات التي لها نفس الرتبة أي لها نفس العدد من الصـفوف ونفس العدد من الأعمدة. فإذا كانت A , B مصـفوفتان من نفس الرتبة فإن مجموع هاتين المصـفوفتين يعرف بأنه يسـاوى المصـفوفة C التي لها نفس الرتبة وكل عنصر من عناصرها يساوى مجموع العنصرين المتناظرين في A , B.

مثال (1): إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C = A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+6 & 1+5 \\ 3+2 & 0+2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

وكل مصفوفتان لهما نفس الرتبة قابلتان للجمع والطرح ويعرف طرح المصفوفتين بنفس الطريقة إذ أن الفرق بين المصفوفتين A , B من نفس الرتبة هو المصفوفة D من نفس الرتبة أيضاً، وكل عنصر من عناصرها يساوى عنصر المصفوفة A مطروحاً منه العنصر المقابل في المصفوفة B ، فمثلاً في المثال السابق:

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1-3 & -2-6 & 1-5 \\ 3-2 & 0-2 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ومن التعريف يمكن إثبات أن مجموع المصفوفات له الخصائص التالية:

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

وإذا كانت المصفوفة B هي حاصل جمع عدد من m من المصفوفات A فإن B = mA وكل عنصر من عناصر المصفوفة B يساوى m مضروبة في العنصر المقابل في المصفوفة A.

مثال (2):

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ومن هذا المثال يتضح الآتي:

1- تتساوى المصفوفتان A , B إذا تساوت رتبتاهما وتكون جميع عناصر كل منهما المتناظرة متساوية.

2- حاصل ضرب مصفوفة A في عدد m حقيقي أو تخيلي (مقدار قياسي أو مقدار ثابت) هو مصفوفة B عناصرها عبارة عن حاصل ضرب كل عنصر من عناصر A في m.

2-1 ضرب المصفوفات:

إذا كانت هناك مصفوفتان A, B فإنهما تكونان قابلتين للضرب إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة اليسرى A مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة اليمنى B . فعلى سبيل المثال، المصفوفتين A , B رتبتاهما (2x 2) , (3 x 2) على الترتيب وتتكون من:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

حاصل الضرب C = AB هو مصفوفة رتبتها (3 x 2) تعرف كالآتي:

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة الناتجة لها عدد من الصفوف يساوى عدد صفوف المصفوفة الأولى A وعدد من الأعمدة يساوى عدد أعمدة المصفوفة الثانية B ويكون كل عنصر من عناصر المصفوفة C وليكن Cik (أى الواقع في الصف رقم I والعمود رقم k) مساوياً لمجموع حواصل ضرب عناصر الصف رقم I في المصفوفة اليسرى A في عناصر العمود رقم k من المصفوفة اليمنى B فى نظيره.

مثال (3): إوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

الحـل

$$\begin{aligned} C &= A\times B \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2+3\times 4+(-1\times 5) & 2\times 1+3\times -2+(-1\times -3) \\ 4\times 2+1\times 4+2\times 5 & 4\times 1+1\times -2+2\times -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 22 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مثال (-4): إذا أخذنا:

$$A_{(2\times 3)}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_{(3\times 2)}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة A قابلة للضرب فى المصفوفة B ويعطى حاصل الضرب C = AB من:

$$\begin{aligned} C_{(2\times 2)} &= \begin{pmatrix} 3\times 1+1\times 3+2\times 2 & 3\times 2+1\times 1+2\times 3 \\ 2\times 1+1\times 3+3\times 2 & 2\times 2+1\times 1+3\times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى فإن المصفوفة B قابلة للضرب فى المصفوفة A ويعطى حاصل الضرب D = BA من:

$$D_{(3\times 3)}=\begin{pmatrix} 1\times 3+2\times 2 & 1\times 1+2\times 1 & 1\times 2+2\times 3 \\ 3\times 3+1\times 2 & 3\times 1+1\times 1 & 3\times 2+1\times 3 \\ 2\times 3+3\times 2 & 2\times 1+3\times 1 & 2\times 2+3\times 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 11 & 4 & 9 \\ 12 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

ومن هذا يتضح أن $AB \neq BA$ أي أن قانون التبادل لا يصلح للمصفوفات حتى لو كانت رتبة مصفوفة حاصل ضرب $A\times B$ تساوى رتبة مصفوفة حاصل ضرب $B\times A$.

وضرب المصفوفات له الخصائص التالية:

$$(1)\ A(B+C)=AB+AC$$

$$(2)\ (A+B)C=AC+BC$$

$$(3)\ A(BC)=AB(C)$$

وعموماً يمكن إثبات أن: $AB \neq BA\ ,\ ABC \neq BAC$

وإذا كانت $AC = AB$ فهذا لا يعنى أن $B = C$. وإذا كانت $AB = 0$ فلا يعنى هذا أن $B = 0$ أو $A = 0$

2- أثر المصفوفة: Trace of a Matrix

إذا وجدت مصفوفة مربعة $A(nxn)$ فإن أثر هذه المصفوفة يعرف بأنه مجموع العناصر القطرية في المصفوفة المربعة، فمثلاً:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\because\ trace\ A = tr\ A = \sum_{i-1}^{n} a_{ii}$$

$$\therefore\ tr\ A = -2+6+4 = 8$$

ويحقق الأثر الخواص الآتية:

$$tr\,(A+B)=tr\ A+tr\ B$$
$$tr\ CA = C\ tr\ A$$
$$tr\,(AB) = tr\,(BA)$$
$$tr\,(A) = tr\ A_T$$
$$tr\ I_n = n$$
$$tr\,(IA) = tr\,(A)$$

3- بعض المصفوفات الخاصة:

1-3 مصفوفة الصف: Row Matrix

المصفوفة التي لها صف واحد يطلق عليها مصفوفة ذات الصف الواحد وتسمى في بعض الأحيان بالمتجه الصفي Row Vector ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز (A) ورتبتها (1 x n) فمثال ذلك:

$$(A)_{1\times3}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

2-3 مصفوفة العمود: Column Matrix

المصــفوفة التي لها العمود الواحد يطلق عليها مصــفوفة ذات العمود الواحد وتســمى في بعض الأحيان بالمتجه العمودي Column Vector ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز [A] ورتبتها (1 x m) فمثال ذلك:

$$[A]_{4\times1}=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\7\end{bmatrix}$$

3-3 المصفوفة المربعة: Squared Matrix

وهى مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة مثل المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\2 & 4 & 3\\6 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

4-3 المصفوفة القطرية: Diagonal Matrix

هي المصفوفة المربعة التي فيها كل العناصر تساوى صفر ما عدا عناصر القطر الأساسي وهو (المار بأعلى عنصر من اليسار إلى أسفل عنصر من اليمين (a11 , a22 , a33 , ...amn) مثل المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ومن الواضح أن أي مصفوفتين مربعتين تقبلان الضرب في بعضهما إذا كانتا من نفس الرتبة. كذلك فإن أي مصفوفتين قطريتين تقبلان الضرب في بعضهما وتخضعان لقانون التبادل أي أن AB =BA.

5-3 المصفوفة القياسية ومصفوفة الوحدة: Scalar and Unit Matrix

المصفوفة القطرية التي يكون مجموع عناصر قطرها الرئيسي متساوية تسمى المصفوفة القياسية Scalar matrix وإذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القياسية تساوى الواحد الصحيح تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الوحدة Unit matrix ويرمز لها بالرمز In حيث (n x n) هى رتبة المصفوفة، فمثلاً:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبوجه عام إذا كانت A مصفوفة مربعة رتبتها I (m x m) هي مصفوفة الوحدة بنفس الرتبة فإن:

$$IA = AI = A$$
$$I = I^2 = I^3 = ...= I^k$$

حيث k عدد صحيح موجب ويمكن إثبات ذلك بسهولة.

فبضرب أي مصفوفة A في مصفوفة الوحدة تبقى المصفوفة A كما هي بدون تغيير بفرض قابلية ضرب المصفوفتين حسب قانون ضرب المصفوفات السابق، فمثلاً:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

كذلك إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\therefore AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

6-3 محدد المصفوفة: Determinant of the Matrix

لكل مصفوفة مربعة محددة خاصة بها ويرمز لها بالرمز $|A|$ فمثلاً إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

وتسمى المصفوفة المربعة التى محددتها تساوى صفراً بالمصفوفة الشاذة.

ويحقق محدد المصفوفة الخواص التالية:

إذا كان A , B مصفوفتان مربعتان وقابلتان للضرب فإن:

1) $$|AB| = |A|.|B|$$

2) $$|A_T| = |A|$$

3) $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

حيث A^{-1} هو مقلوب أو معكوس المصفوفة كما سيعرف فيما بعد.

4) $$|cA| = c^n.|A|$$

حيث c مقدار ثابت، cA هو المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A في المقدار الثابت c كما يلي:

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & .... & .... & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & .... & .... & ca_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ ca_{n1} & ca_{n2} & .... & .... & ca_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore |cA| = c \times c \times c.....\times c.|A| = c^n .|A|$$

7-3 مدور المصفوفة أو المصفوفة البديلة: The transposed matrix

إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة فى مصفوفة $A(m \text{ x } n)$ فإن المصفوفة الجديدة تسمى مدور المصفوفة أو المصفوفة البديلة ويرمز لها بالرمز $A(n \text{ x} m)$ أو AT أو /A ، فإذاكانت مصفوفة رتبتها (3 x 2) تكون كالآتي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

وتكون المصفوفة البديلة لهذه المصفوفة ويرمز لها بالرمز A_T كالتالي:

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

ومن الواضح أن المصفوفة البديلة لمصفوفة العمود [A] هي مصفوفة الصف (A) .فمثلاً إذاكانت:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \therefore [A]_T = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) = (A)$$

وكذلك فإن المصفوفة البديلة لمصفوفة الصف (A) هي مصفوفة العمود [A] أي أن:

$$(A\ )_T = [A]$$

$$[A\ ]_T .[A] = (A).(A)_T = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}$$

ويتضح بوجه عام أنه إذاكانت A مصفوفة رتبتها (m x n) فإن رتبة المصفوفة A_T هى (n x m) لذلك تقبل كل منهما الضرب مع الأخرى أى يمكن إيجاد حاصل ضرب $A\ A_T$, $A_T\ A$ وتختلف رتبة حاصل الضرب $A\ A_T$ عن رتبة حاصل الضرب $A_T\ A$ إلا إذاكانت A مصفوفة مربعة.

ويمكن إثبات أن المصفوفة البديلة لها الخصائص الآتية:

$$(1)\ (A)_T = A \qquad (2)\ (A+B)_T = A_T + B_T$$
$$(3)(nA)_T = n.A_T \qquad (4)\ (AB)_T = B_T.A_T$$
$$(5)(ABC)_T = C_T.B_T.A_T$$

هكذا لأى عدد محدد من المصفوفات. فعلى سبيل المثال إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\therefore A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\therefore A.B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \ , \ B_T.A_T = \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\therefore (AB)_T = B_T.A_T$$

8-3 المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحقق الشرط $A = A_T$ فإنها تسمى متماثلة Symmetric آي أن المصفوفة الأصلية تساوى مدور المصفوفة، فمثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = A_T$$

مصفوفة متماثلة ونلاحظ أن العناصر التي تقع أعلى القطر دائماً تساوى العناصر التي تقع أسفل القطر في المصفوفة المتماثلة.

وتكون المصفوفة A شبه متماثلة إذا كانت $A = A_T$ أي أن المصفوفة تساوى المصفوفة البديلة بعد ضربها في (-1)، وفى هذه الحالة يمكن بسهولة إثبات أن العناصر القطرية فى المصفوفة شبه المتماثلة تساوى صفر. فالعناصر القطرية aii لكي تحقق شرط أنها شبه متماثلة فإن $aii = -aii$ وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت $aii = 0$ وفيما يلي مثال لمصفوفة شبه متماثلة:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -6 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -A_T$$

9-3 المصفوفة المرتبطة: The Adjoint Matrix

إذا كانت A مصفوفة مربعة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن المصـفوفة المرتبطة للمصـفوفة A هي المصـفوفة البديلة لمصـفوفة العوامل المرافقة للمصـفوفة A ويرمز لها بالرمز adj. A فإذا كان Arc هو العامل المرافق للعنصـر arc (أي قيمة المحددة المكونة بحذف كل من الصـف والعمود الذي يحتوى على العنصـر arc مع أخذ الإشـارة المناسـبة حسـب قاعدة الإشـارات السـابق شـرحها في باب المحددات، أو بعبارة أخرى المحددة الصـغرى للعنصر arc مع أخذ الإشارة المناسبة) فإن مصفوفة العوامل المرافقة B بنفس رتبة A ، وتكون:

$$Cof(A) = B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A = [Cof\ (A)]^t$$

$$\therefore adj.A = B_T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال (3-5): إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

إوجد مصفوفة العوامل المرافقة ثم إوجد المصفوفة البديلة.

10-3 مقلوب المصفوفة: The inverse matrix

يتكون مقلوب المصفوفة من المرافق التقليدي لها من العلاقة

$$A \times (Adj\ \ A)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A.(Adj\ \ A) = |A|.I}$$

$$\because |\mathbf{A}| \neq 0$$

$$\therefore \mathbf{A}\left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right] = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A^{-1}.A}\left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right] = \mathbf{I.A^{-1}}$$

$$\mathbf{I}\left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right] = \mathbf{I.A^{-1}}$$

$$\therefore \mathbf{A^{-1}} = \left[\frac{\mathbf{Adj\ \ A}}{|\mathbf{A}|}\right]$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{adj\,A}}{|\mathbf{A}|}$$

ويمكن إثبات هذه العلاقة بعد إيجاد حاصل ضرب A. (Adj. A)

وتكون المصفوفة قابلة للقلب إذا كان محددها لا يساوى صفراً، ويقال لمصفوفة مربعة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة C تحقق الخاصية AC=CA=I حيث I هي مصفوفة الوحدة التي لها نفس رتبة كل من A,C وتسمى المصفوفة C مقلوب A ويرمز لها بالرمز A^{-1} وهذه العلاقة متماثلة. أي أنه إذا كانت C مقلوب A فإن A مقلوب C أي أن

.A. A^{-1}= A−1.A=I

مثال (3-6): إوجد قيمة A^{-1} إذا كانت:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

<u>الحـــل</u>

حسب المثال السابق فإن:

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 11 - 2\times 7 + 3\times 2 = 3 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \begin{pmatrix} 11/3 & -9/3 & 1/3 \\ -7/3 & 9/3 & -2/3 \\ 2/3 & -3/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

4 تجزئة المصفوفات: Partitioning of Matrices

من البديهي أنه كلما كان عدد الصفوف وعدد الأعمدة في المصفوفة صغير، فإن التعامل مع المصفوفة يكون أكثر يسراً، فلذا فإننا نلجأ إلى تجزئة المصفوفات حتى يسهل التعامل معها عددياً سواء عند إجراء عملية الضرب أو إيجاد المعكوس أو أية عمليات جبرية أخرى على المصفوفات.

فمثلاً المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

يمكن تجزئتها على النحو التالي:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

أيضاً يمكن كتابتها فى الصورة:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

وفى الصورة العامة يمكن كتابة المصفوفة التي أبعادها (m x n) في شكل مصفوفة مجزئة كالتالي:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

والمصفوفة الجزئية Aij لها ri من الصفوف، cj من الأعمدة ومن الواضح أن جميع المصفوفات الجزئية الواقعة فى نفس الصف يكون لها نفس العدد من الصفوف، وبالمثل المصفوفات الجزئية الواقعة في نفس العمود يكون لها نفس عدد الأعمدة.

العمليات الجبرية على المصفوفات المقسمة إلى مصفوفات جزئية (قوالب) مشابهة إلى حد كبير العمليات الأصلية على المصفوفات.

فبالنسبة لعملية الجمع: إذا كان A , B مصفوفتان لهما نفس عدد الأعمدة وعدد الصفوف كذلك المصفوفات المناظرة لها نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة أي أن A,B مقسمتين بنفس الكيفية فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالمعتاد وذلك بجمع العناصر المتناظرة في كل من المصفوفات الجزئية المتناظرة، أى أن:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots\dots\dots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots\dots\dots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

وفى عملية التدوير (transpose) فإننا يجب أن نأخذ في الاعتبار تبادل الصفوف والأعمدة في المصفوفة A وتبادل الصفوف والأعمدة في المصفوفات الجزئية أيضاً، فمثلاً في المعادلة (1):

$$A == \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

ويكون مقلوب المصفوفة كالتالي:

$$A_T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

أما بالنسبة لعملية الضرب Multiplication بالنسبة لمصفوفتين فإننا يجب أن نأخذ في الاعتبار قابلية الضرب للمصفوفة A في المصفوفة B (أي أن أعمدة A يساوى عدد صفوف B) وكذلك قابلية أو انسجام عمليات الضرب للمصفوفات المجزئة أيضـــاً، أي أنه إذا كان أعمدة المصـــفوفات الجزئية في A هي على الترتيب cn ,……., c2 , c1 فيجب أن يكون عدد صفوف المصفوفات الجزئية المناظرة فى B هو cn ,……., c2 , c1 أيضاً، فمثلاً:

$$A_{(m\times p)} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad B_{(p\times n)} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$

فإن عدد أعمدة A11 يســاوى عدد صــفوف B11، عدد أعمدة A12 يســاوى عدد صــفوف B21 في هذه الحالة يجوز إجراء عملية الضرب و يكون الناتج في الصورة:

$$AB_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{21} \\ A_{21}.B_{11} + A_{22}.B_{21} \end{pmatrix}$$

مثال (7): إذا كان:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

فيكون حاصل الضرب هو:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{12} & A_{11}.B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}.B_{11} + A_{22}.B_{21} & A_{21}.B_{12} + A_{22}.B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

وبحساب كل من C_{22} , C_{21} , C_{12} , C_{11} ينتج حاصل الضرب وهو المصفوفة C.

نحسب أولا C_{11}:

$$C_{11} = A_{11}.B_{11} + A_{12}.B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

وبنفس الكيفية يمكن حساب باقي المصفوفات الجزئية، ويكون الناتج فى الصورة:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال (8): إوجد حاصل الضرب التالي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

مثال (9): بفرض أن القوالب في المثال الآتي مناسبة للضرب من ثم:

$$(i)\quad A(P\ Q)=(AP\ .\ AQ) \qquad (ii)\ \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} PB \\ QB \end{bmatrix}$$

$$(iii)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} AL+BM \\ CL+DM \end{pmatrix}$$

$$(vi)\ (A_1 \quad \dots \quad A_n)\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}=A_1B_1+\cdots+A_nB_n$$

$$(v)\ \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}(B_1 \quad \cdots \quad B_n)=\begin{pmatrix} A_1B_1 & \cdots & A_1B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_nB_1 & \cdots & A_nB_n \end{pmatrix}$$

مثال (10): اوجد معكوس المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} N & L \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

حيث N , M مصفوفات مربعة قابلة للعكس.

<u>الحــل</u>

نفرض أن A^{-1} على الصورة:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} R & P \\ K & H \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1}=\begin{bmatrix} NR+LK & NP+LH \\ MK & MH \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MH=1 \qquad \therefore H=M^{-1}$$

$$MK=0 \qquad \therefore K=o$$

$$NR=1 \qquad \therefore R=N^{-1}$$

$$NP+LM^{-1}=0 \qquad \therefore P=-N^{-1}.LM^{-1}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} N^{-1} & -N^{-1}.LM^{-1} \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$$

معكوس (مقلوب) مصفوفة

1. شروط وجود مقلوب المصفوفة:

- يمكن الحصول على مقلوب المصفوفة A^{-1} فقط إذا كانت المصفوفة A مربعة.
- المصفوفة A^{-1} لها وجود فقط في حالة ما اذا كانت المصفوفة الاصلية A نظامية (أي محددها لا يساوي الصفر $|A| \neq 0$).

2. خصائص مقلوب المصفوفة:

- المصفوفة A^{-1} تحقق العلاقة: $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$.
- محدد مقلوب المصفوفة A يساوي مقلوب محدد المصفوفة الاصلية أي: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
- مقلوب المقلوب هو المصفوفة الاصلية: $A = (A^{-1})^{-1}$.
- مقلوب منقول المصفوفة يساوي الى منقول مقلوبها: $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
- إذا كانت المصفوفة A متناظرة فان مقلوبها A^{-1} أيضا مصفوفة متناظرة.
- $(A\,B\,C)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

3. حساب معكوس المصفوفة عن طريق خوارزمية الحذف الجاوسية:

خطوة1: كون المصفوفة المركبة $M = (A\colon I)\ n \times 2n$، أي تكون A النصف الأيسر لـ M و I نصفها الأيمن.

خطوة2: اختزال M صفيا الى شكل درجي. اذا نتج عن هذه العملية صف صفري في النصف A من M، توقف (A ليست عكوسة). في الحالة الأخرى يأخذ النصف A شكلاً مثلثاتياً.

خطوة3: اختزل M صفيا الى الشكل الصفي القانوني ($(I\colon B)$) حيث حلت I محل A في النصف الايسر للمصفوفة.

خطوة4: ضع $A^{-1} = B$.

مطبوعة دروس رقم 01 في تحليل المدخلات والمخرجات

1. نبذة تاريخية:

ترجع فكرة جداول المدخلات المخرجات، أو التشابك الصناعي، إلى محاولة *فرانسوا كيناي* F.Quesnay في تركيب "الجدول الاقتصادي" عام 1758، حيث اعتبر هذا الجدول من أهم إنجازات مدرسة الفيزوقراط. أما انتشار هذه الجداول ترجع إلى الاقتصادي الروسي المولد والأمريكي الجنسية *واسيلي ليونتيف* Wassily Leontief عند نشر العمل الرائد " هيكل الاقتصاد الأمريكي 1919-1939" عام 1941، حيث قام بتطوير فكرة *فرانسوا كيناي*، من خلال استخدام بعض الأساليب الرياضية، لتركيب جدول مدخلات – مخرجات للاقتصاد الأمريكي (1919 – 1939) بغرض وصف الاقتصاد الأمريكي، وما يحتويه من علاقات تشابكية، بين مختلف المتعاملين في الداخل، وامتداد هذه العلاقات بين الاقتصاد الأم والعالم الخارجي، ونال ليونتيف جائزة نوبل في العلوم الاقتصادية في عام 1973 على هذا العمل.

كما أوصت هيئة الأمم المتحدة بإدماج جداول المدخلات والمخرجات واستخداماتها وتطبيقاتها العملية ، وذلك في نظام تلك الهيئة للحسابات القومية في عام 1968 وكذلك في نظامها المستحدث للحسابات القومية لعام 1993، وذلك لتلبية احتياجات إحصائية مختلفة، باعتبار تلك الجداول إطار لتجميع البيانات الأساسية، كما هي إطار لاختبار الاتساق فيما بين تلك البيانات، كما تعتبر إطارًا محاسبيًا مناسبًا أيضًا لحساب كثير من البيانات الاقتصادية الواردة في الحسابات القومية ... والكشف عن أوجه الضعف في أي من الحسابات أو في تقدير حجم المتغيرات باعتبار تلك الجداول والمستندة على جداول موازين السلع والخدمات... أداة تحليلية قوية من حيث الحجم وهيكله والنسب والمعدلات لكل من الإنتاج واحتياجاته والطلب عليه والصادرات منه والوارد ت المكملة والاستثمار للتوسع والطاقة اللازمة للتشغيل. ولقد كوفئ الاقتصادي *ريتشارد ستون* بجائزة نوبل هو الآخر، لمساهمته الأساسية في تطويره للأسس التطبيقية للتحليل الاقتصادي، باستخدام جداول المدخلات والمخرجات أو مصفوفة التشابك الاقتصادي، التي تعكس بالتفصيل الخصائص الإنتاجية والتوزيعية في اقتصاد ما، وذلك في نموذج تفصيلي واحد، كما يعكس علاقاته التفصيلية مع العالم الخارجي.

2. اساسيات المدخلات والمخرجات:

جوهر تحليل المدخلات والمخرجات هو مصفوفة من المعاملات الفنية التي تلخص الترابط بين قطاعات الإنتاج. ولإنتاج المخرجات، كل قطاع يحتاج الى مدخلات من باقي القطاعات. والخلاصة هي صافي المخرجات للاقتصاد، والتي تمثل الفرق بين المخرجات والمدخلات المستخدمة. ولمعرفة كم يجب ان ننتج، مع الأخذ بعين الاعتبار متطلبات المدخلات الوسيطة، يتم استخدام ما يسمى بـ"معكوس مصفوفة ليونتيف". ويتم بناء النموذج الأساسي للمدخلات والمخرجات ليونتيف من البيانات الاقتصادية المرصودة لمنطقة

جغرافية محددة (دولة، ولاية، مقاطعة،... الخ). وتتعلق المعلومات الأساسية المستخدمة في تحليل المدخلات والمخرجات بتدفقات المنتجات من كل قطاع صناعي، الذي يعتبر منتجا، لباقي القطاعات بما فيها القطاع نفسه، التي تعتبر مستهلكة. هذه المعلومات الأساسية يحتويها جدول المعاملات بين الصناعات. وتصف صفوف هذا الجدول توزيع مخرجات المنتج في جميع أنحاء الاقتصاد، بينما تصف الأعمدة تركيبة المدخلات المطلوبة من قبل صناعة معينة لإنتاج مخرجاتها.

جدول معاملات المدخلات والمخرجات

		المنتجون كمستهلكين								الطلب النهائي			
		الزراعة	التعدين	البناء	الصناعة	التجارة	النقل	الخدمات	صناعات أخرى	نفقات الاستهلاك الشخصي	اجمالي الاستثمار الخاص المحلي	مشتريات الحكومة من السلع والخدمات	صافي الصادرات من السلع والخدمات
المنتجون	الزراعة												
	التعدين												
	البناء												
	الصناعة												
	التجارة												
	النقل												
	الخدمات												
	صناعات أخرى												
القيمة المضافة	الموظفون	تعويض الموظفين								الناتج المحلي الإجمالي			
	أصحاب الاعمال وراس المال	مداخيل الارباح ومخصصات استهلاك رأس المال											
	الحكومة	الضرائب التجارية غير المباشرة											

الأعمدة الإضافية تحت مسمى الطلب النهائي، تمثل المبيعات من قبل كل قطاع إلى الأسواق النهائية لإنتاجها، على سبيل المثال يتم بيع الكهرباء للشركات للقطاعات الأخرى كمساهمة في الإنتاج (التبادل بين الصناعات) وأيضا للمستهلكين المقيمين (الطلب النهائي). أما الصفوف الإضافية التي تحمل اسم القيمة المضافة فتشمل المدخلات الأخرى (غير الصناعية) إلى الإنتاج، مثل العمالة، واستهلاك رأس المال، والضرائب التجارية غير المباشرة.

لنفترض أن الاقتصاد يمكن تصنيفه إلى n قطاع، وإذا ما أشرنا بـ x_i إلى المخرجات الإجمالية (الإنتاج) للقطاع i، وبـ f_i الى إجمالي الطلب النهائي على منتج القطاع i، فإننا نكتب معادلة بسيطة تمثل الطريقة التي يوزع بها القطاع منتجه من خلال المبيعات إلى قطاعات أخرى وإلى الطلب النهائي:

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i$$

وتمثل z_{ij} المبيعات بين الصناعات (المعروف أيضا باسم المبيعات الوسيطة) من القطاع i إلى جميع القطاعات j (بما في ذلك القطاع نفسه، عندما $j = i$). وتمثل المعادلة السابقة توزيع القطاع الأول، وستكون هناك معادلة من هذا القبيل تحدد مبيعات كل قطاع من القطاعات:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11} + \cdots + z_{1j} + \cdots + z_{1n} + f_1 \\ &\vdots \\ x_i &= z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i \\ &\vdots \\ x_n &= z_{n1} + \cdots + z_{nj} + \cdots + z_{nn} + f_n \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \text{ and } \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

وبتعويض z_{ij} بما يساويها $a_{ij}x_j$ حيث $a_{ij} = \dfrac{z_{ij}}{x_j}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n + f_1 \\ &\vdots \\ x_i &= a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n + f_i \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n + f_n \end{aligned}$$

3. حسابات المدخلات والمخرجات:

مثال رقم1: ليكن لدينا البيانات التالية المتعلقة باقتصاد بقطاعين

الجدول رقم (01): جدول المدخلات والمخرجات لاقتصاد معين

		الى القطاعات 1	الى القطاعات 2	الطلب النهائي	اجمالي المخرجات
من القطاعات	1	150	500	350	1000
	2	200	100	1700	2000
مدفوعات القطاع		650	1400	1100	3150
إجمالي النفقات		1000	2000	3150	6150

ويمكننا الحصول على جدول معاملات المدخلات والمخرجات، عن طريق قسمة كل تدفق في عمود معين من القطاعات المنتجة في الجدول السابق على إجمالي المخرجات (مجموع صف) ذلك القطاع:

$$a_{11} = 150/1000 = 0.15; \quad a_{21} = 200/1000 = 0.2;$$

$$a_{12} = 500/2000 = 0.25; \quad a_{22} = 100/2000 = 0.05.$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 150 & 500 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/1000 & 0 \\ 0 & 1/2000 \end{bmatrix}$$

حيث: $$\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/x_n \end{bmatrix}$$ و $$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

المصفوفة A موضحة في الجدول (02)، لنفترض في هذا المثال أن الزراعة تمثل القطاع الأول والصناعة تمثل القطاع الثاني.

الجدول رقم (02): المعاملات التقنية (المصفوفة A)

		الى القطاعات	
		الزراعة	الصناعة
من القطاعات	الزراعة	0.15	0.25
	الصناعة	0.2	0.05

ومن أجل إنتاج سلع مصنعة بقيمة دولار واحد، على سبيل المثال، هناك حاجة إلى منتجات زراعية بقيمة 25 سنتا و 5 سنتات من المصنوعات كمكونات وسيطة. وهذه ليست سوى المدخلات المطلوبة من القطاعات المنتجة الأخرى؛ ستكون هناك مدخلات ذات طابع "غير منتج" ايضا، مثل العمالة.

ويمكننا الآن طرح السؤال التالي: إذا كان الطلب النهائي على المخرجات الزراعية سيزداد إلى 600 دولار في العام المقبل، وأن المصانع سوف تنخفض إلى 1500 دولار – على سبيل المثال، بسبب التغيرات في الإنفاق الحكومي، وأذواق المستهلكين، وما إلى ذلك –إلى أي مدى سيكون إجمالي المخرجات من القطاعين ضروريا لتلبية هذا الطلب الجديد؟

$$\mathbf{f}^{new} = \begin{bmatrix} f_1^{new} \\ f_2^{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1500 \end{bmatrix} \text{ when } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 350 \\ 1700 \end{bmatrix}$$ و $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

من أجل $f_1^{new} = 600$ و $f_2^{new} = 1500$ ما هي عناصر $\mathbf{x}^{new} = \begin{bmatrix} x_1^{new} \\ x_2^{new} \end{bmatrix}$ ؟ التي تلبي الطلبات، x_1^{new} لا يقل عن 600 و x_2^{new} لا يقل عن 1500.

لدينا $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ ومنه $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}$ وعليه $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{L}\mathbf{f}$

أين: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{L} = [l_{ij}]$ هي معكوس ليونتيف او مصفوفة المتطلبات الكلية.

حيث:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ so then } (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1 - a_{nn}) \end{bmatrix}$$

في مثالنا هذا:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .15 & .25 \\ .20 & .05 \end{bmatrix} \text{ so } (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} .85 & -.25 \\ -.20 & .95 \end{bmatrix}$$

وحيث أن $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}$ و $\operatorname{adj}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (1 - a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & (1 - a_{11}) \end{bmatrix}$

وبمأن $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.7575 \neq 0$ فإنه يمكن حساب $\mathbf{L} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

وعليه:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.2541 & .3300 \\ .2640 & 1.1221 \end{bmatrix}$$

على افتراض أن التكنولوجيا (كما هو موضح فيA)، لا تتغير، يتم العثور على المخرجات الإجمالية المطلوبة الناجمة عن $\mathbf{f}^{new}$ كما يلي:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{L}\mathbf{f}^{new} = \begin{bmatrix} 1.2541 & .3300 \\ .2640 & 1.1221 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1247.52 \\ 1841.58 \end{bmatrix}$$

وبهذه النتيجة بالنسبة لـ $\mathbf{x}^{new}$ ، فمن السهل دراسة التغييرات في جميع العناصر في جدول التدفقات بين الصناعات (كما هو موضح في الجدول 01) الناجم عن $\mathbf{f}^{new}$:

بمأن: $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ ومنه: $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ ، فإننا نتحصل على

$$\mathbf{Z}^{new} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{new} = \begin{bmatrix} 187.13 & 460.40 \\ 249.50 & 92.08 \end{bmatrix}; \text{along with } \mathbf{f}^{new} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

فتكون النتائج في الجدول الموالي:

الجدول رقم (03): جدول المدخلات والمخرجات لاقتصاد معين مع $\mathbf{x}^{new}$

		الى القطاعات		الطلب النهائي (f_i)	اجمالي المخرجات (x_i)
		1	**2**		
من القطاعات	**1**	187.13	460.40	600	1247.52
	2	249.50	92.08	1500	1841.58
مدفوعات القطاع		810.89	1289.11	1100	3320
إجمالي النفقات (x_i)		1247.52	1841.58	3200	6289.10

من إعداد: د. لطفي مخزومي

مطبوعة دروس رقم 02 في تحليل المدخلات والمخرجات

1. النماذج المغلقة والنماذج المفتوحة:

إن النموذج الذي تعاملنا معه حتى الآن، $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f}$، يعتمد على وجود قطاع خارجي، مفصول عن القطاعات الإنتاجية المترابطة تكنولوجيا، حيث ينشأ الطلب النهائي الهام للمخرجات. حيث الأسر (المستهلكون) تحصل على دخل في دفع مدخلات العمل لعمليات الإنتاج، وكمستهلكين فإنها تنفق دخلها بطرق جيدة. وعلى وجه الخصوص، فإن التغيير في كمية العمالة اللازمة للإنتاج في قطاع واحد أو أكثر -أي زيادة المدخلات العمالية بسبب زيادة الإنتاج -سيؤدي إلى تغيير (هنا زيادة) في المبالغ التي تنفقها الأسر كمجموعة للاستهلاك. وعلى الرغم من أن الأسر تميل إلى شراء السلع للاستهلاك "النهائي"، فإن مبلغ مشترياتها يرتبط بدخلها الذي يعتمد على مخرجات كل قطاع من القطاعات. كما أن نفقات الاستهلاك تشكل أكبر عنصر واحد من عناصر الطلب النهائي.

وهكذا يمكننا تحريك قطاع الأسر من عمود الطلب النهائي وصف مدخلات العمل ووضعه داخل الجدول بشكل مستقل، مما يجعله واحد من القطاعات الذاتية. ويعرف ذلك بإغلاق النموذج فيما يتعلق بالأسر. ويمكن أن تكون نماذج المدخلات والمخرجات "مغلقة" فيما يتعلق بالقطاعات الخارجية الأخرى أيضا (على سبيل المثال المبيعات والمشتريات الحكومية)؛ ومع ذلك، فإن الإغلاق فيما يتعلق بالأسر المعيشية أكثر شيوعا.

الجدول رقم (04): جدول المدخلات والمخرجات للتدفقات مع قطاع الأسر

		Buying Sector					
		1	$\cdots$	j	$\cdots$	n	*Households (Consumers)*
Selling Sector	1	z_{11}	$\cdots$	z_{1j}	$\cdots$	z_{1n}	$z_{1,n+1}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	i	z_{i1}	$\cdots$	z_{ij}	$\cdots$	z_{in}	$z_{i,n+1}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	n	z_{n1}	$\cdots$	z_{nj}	$\cdots$	z_{nn}	$z_{n,n+1}$
	Households (Labor)	$z_{n+1,1}$	$\cdots$	$z_{n+1,j}$	$\cdots$	$z_{n+1,n}$	$z_{n+1,n+1}$

تدفقات الدولار للمستهلكين، والتي تمثل الأجور والرواتب التي تتلقاها الأسر من طرف n قطاع مقابل خدمات عملهم، ستملأ الصف رقم $(n+1)$: $[z_{n+1,1},\ldots,z_{n+1,n}]$. تدفقات الدولار من المستهلكين، والتي تمثل قيم المشتريات المنزلية من السلع لـ n قطاع، ستملأ العمود رقم $(n+1)$: $\begin{bmatrix} z_{1,n+1} \\ \vdots \\ z_{n,n+1} \end{bmatrix}$. وأخيرا، فإن العنصر الموجود في صف $(n+1)$ و العمود$(n+1)$ ، $z_{n+1,n+1}$، تمثل مشتريات الأسر من خدمات العمل.

وعليه تصبح المعادلة التي يوزع بها القطاع منتجه من خلال المبيعات إلى قطاعات أخرى وإلى الطلب النهائي معدلة بالشكل التالي:

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + z_{i,n+1} + f_i^*$$

حيث f^* يمثل الطلب النهائي المتبقي لمخرجات القطاع i – باستثناء تلك التي تحصل عليها الأسر، والتي نجدها في $z_{i,n+1}$.

ستكون هناك معادلة جديدة لمجموع "المخرجات" لقطاع الأسر، الذي يعرف بأنه القيمة الإجمالية لبيع خدمات اليد العاملة لمختلف القطاعات – مجموع الإيرادات. وبالتالي:

$$x_{n+1} = z_{n+1,1} + \cdots + z_{n+1,j} + \cdots + z_{n+1,n} + z_{n+1,n+1} + f_{n+1}^*$$

نتحصل على معاملات المدخلات للأسر بنفس الطريقة مثل أي عنصر آخر في جدول معاملات المدخلات والمخرجات: إن قيمة مشتريات القطاع j من العمالة (لفترة معينة)، $z_{n+1,j}$ ، مقسومة على قيمة إجمالي مخرجات القطاع j (لنفس الفترة)، x_j ، تعطي قيمة خدمات الأسر (العمالة) المستخدمة لكل دولار من المخرجات: $a_{n+1,j} = z_{n+1,j}/x_j$. وفيما يتعلق بعناصر عمود مشتريات الأسر (الاستهلاك)، تقسم قيمة مبيعات القطاع i للأسر (لفترة معينة)، $z_{i,n+1}$ ، على إجمالي المخرجات (المقاس بالدخل المكتسب) لقطاع الأسر، x_{n+1}. وبالتالي، "معاملات الاستهلاك" للأسر هي $a_{i,n+1} = z_{i,n+1}/x_{n+1}$. وعليه تصبح المعادلة:

$$x_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + a_{i,n+1}x_{n+1} + f_i^*$$

والمعادلة المضافة التي تربط مخرجات الأسر بمخرجات جميع القطاعات تصبح:

$$x_{n+1} = a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1}x_{n+1} + f_{n+1}^*$$

وبإعادة كتابة المعادلتين السابقتين:

$$-a_{i1}x_1 - \cdots + (1 - a_{ii})x_i - \cdots - a_{in}x_n - a_{i,n+1}x_{n+1} = f_i^*$$

$$-a_{n+1,1}x_1 - \cdots - a_{n+1,n}x_n + (1 - a_{n+1,n+1})x_{n+1} = f_{n+1}^*$$

الشعاع الصفي لمعاملات مدخلات العمل، $a_{n+1,j} = z_{n+1,j}/x_j$، سوف نرمز له بـ $\mathbf{h}_R = [a_{n+1,1}, \ldots, a_{n+1,n}]$

الشعاع العمودي لمعاملات استهلاك الأسر، $a_{i,n+1} = z_{i,n+1}/x_{n+1}$، سوف نرمز له بـ

$$\mathbf{h}_C = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

حيث: $h = a_{n+1,n+1}$. وسوف نرمز بـ $\bar{\mathbf{A}}$ لـ $(n+1) \times (n+1)$ مصفوفة المعاملات التقنية بإدراج الأسر. وباستخدام التقسيم لفصل مصفوفة $\mathbf{A}$ القديمة عن القطاع الجديد:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{h}_C \\ \mathbf{h}_R & h \end{bmatrix}$$

وسوف نرمز بـ $\bar{\mathbf{x}}$ لـ $(n + 1)$، عنصر للشعاع العمودي للمخرجات الاجمالية:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

كذلك نرمز بـ $\mathbf{f}^*$ لـ n عنصر لشعاع الطلب النهائي المتبقي لمخرجات القطاعات n الأصلية، و $\bar{\mathbf{f}}$ لـ $(n + 1)$، عنصر لشعاع الطلب النهائي، بما في ذلك تلك المتعلقة بإنتاج الأسر.

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \vdots \\ f_n^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix}$$

ويكون النظام الجديد لـ $(n + 1)$، معادلة، مع الأسر الذاتية، كما يلي:

$$(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}$$

أو:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{h}_C \\ -\mathbf{h}_R & (1-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f_{n+1}^* \end{bmatrix}$$

ومنه، تكون لدينا مجموعة من معادلات:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} - \mathbf{h}_C x_{n+1} = \mathbf{f}^*$$

وواحدة مضافة للأسر:

$$-\mathbf{h}_R\mathbf{x} + (1 - h)x_{n+1} = f_{n+1}^*$$

إذا كان $(n+1)\times(n+1)$ مصفوفة المعاملات، الحل الوحيد الذي نستطيع الحصول عليه باستخدام معكوس المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{h}_C \\ -\mathbf{h}_R & (1-h) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ f^*_{n+1} \end{bmatrix} :$$

أو:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{f}}$$

لنفترض مجددا المعطيات المعطاة في الجدول رقم (01). باعتبار استهلاك الأسر جزء من الطلب النهائي، ومدخلات عمل الأسر جزء من قطاع المدفوعات، موضحة في الجدول الموالي:

الجدول رقم (05): تدفقات (z_{ij}) ، مع الأسر الذاتية

من \ الى	قطاع الزراعة	قطاع الصناعة	استهلاك الأسر (C)	طلب نهائي آخر (f^*)	اجمالي المخرجات $(\mathbf{x})$
قطاع الزراعة	150	500	50	300	1000
قطاع الصناعة	200	100	400	1300	2000
خدمات العمل (L)	300	500	50	150	1000
مدفوعات محلية أخرى (N)	325	800	300	250	1675
الواردات (M)	25	100	200	150	475
إجمالي النفقات $(\mathbf{x}')$	1000	2000	3150	2150	6150

من أصل 650 دولارا تم شراؤها من القطاع 1 من قطاعات المدفوعات (الجدول رقم 01)، 300 دولار لخدمات العمل؛ ومن أصل 1400دولار تم شراؤها من قبل القطاع 2، 500 \$ لمدخلات العمالة. ومن أصل 1100 دولار الذي يمثل مشتريات قطاعات الطلب النهائي من قطاعات المدفوعات، دفعت الأسر 50 دولارا مقابل خدمات العمل (المساعدة المنزلية مثلا)؛ والمشتريات الحكومية من العمالة 150 دولارا. وسيمثل مبلغ 300 دولار مدفوعات الأسر للحكومة (الضرائب).

المخرجات الاجمالية لقطاع الأسر، (هنا $n+1=3$)، هي $x_3 = z_{31}+z_{32}+z_{33}+f_3^* = 300+500+50+150 = 1000$.

معاملات مدخلات الأسر، $a_{n+1,j} = z_{n+1,j}/x_j$ ، هي: $a_{31}=300/1000=0.3,\ a_{32}=500/2000=0.25$ ، و $a_{33}=50/1000=0.05$ ؛

$$\mathbf{h}_R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ and } h = 0.05$$.

وعلى نحو مماثل، معاملات استهلاك الأسر، $a_{i,n+1} = z_{i,n+1}/x_{n+1}$ ، هي $a_{13} = 50/1000 = 0.05$ ،

و $a_{23} = 400/1000 = 0.4$ ؛ وبالتالي $\mathbf{h}_C = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ .. وهكذا:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} .15 & .25 & .05 \\ .2 & .05 & .4 \\ .3 & .25 & .05 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} .85 & -.25 & -.05 \\ -.2 & .95 & -.4 \\ -.3 & -.25 & .95 \end{bmatrix}$$

و

$$\bar{\mathbf{L}} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3651 & .4253 & .2509 \\ .5273 & 1.3481 & .5954 \\ .5698 & .4890 & 1.2885 \end{bmatrix}$$

لنفترض تغييرا في شعاع الطلب النهائي، حيث أن f_1 ينتقل من 350 إلى 600 و f_2 من 1700 إلى 1500. وبالإشارة الآن إلى الجدول رقم 05، لمجرد التوضيح، لنفترض أن هذا التغير في الطلب النهائي بأكمله كان يتركز في قطاع الطلب النهائي الآخر. وتمثل هذه الطلبات الجديدة البالغة 600 دولار و 1500 دولار زيادات في كلتا الحالتين، من المستوى الحالي البالغ 300 دولار و 1300 دولار لجميع فئات الطلب النهائي لغير الأسر.

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

المقارنة الصريحة الآن هي باستخدام معكوس ليونتيف 3×3 $(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}$ بالتزامن مع لإيجاد أثر هذه التغييرات في الطلبات النهائية لمخرجات القطاعين 1 و 2 على القطاعين الأصليين بالإضافة إلى التأثير الإضافي الناجم عن إغلاق النموذج بالنسبة للأسر.

لدينا:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.3651 & .4253 & .2509 \\ .5273 & 1.3481 & .5954 \\ .5698 & .4890 & 1.2885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 1500 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1456.94 \\ 2338.51 \\ 1075.48 \end{bmatrix}$$

وتعكس القيم الجديدة (الأكبر) – 1456.94 دولار و 2338.51 دولار – على التوالي – أن المخرجات الإضافية ضرورية لتلبية الزيادة المتوقعة في الإنفاق الاستهلاكي، على النحو المبين في عمود معاملات الاستهلاك الأسري، المتوقع بسبب الزيادة في دخل الأسر نتيجة لزيادة المخرجات من القطاعين 1 و 2 ومن ثم زيادة مدفوعات الأجور. وباستخدام معاملات مدخلات العمل

$a_{31} = 0.3$ and $a_{32} = 0.25$ ، مدخلات الأسر الضرورية للمخرجات الإجمالية الأصلية (عندما يكون قطاع الأسر خارجي)

سوف تكون:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = (0.3)(1247.46) + (0.25)(1841.55) = 834.63$$

وكما هو متوقع، تزداد المخرجات بالنسبة للقطاعات الثلاثة جميعها، وذلك بسبب إدخال قطاع الأسر، الذي كان سابقا في الخارج، في النموذج. ويؤدي المثال إلى توضيح النتيجة المتوقعة – أي أنه عندما يكون التأثير الإضافي لمزيد من الإنفاق على الاستهلاك الأسري بسبب زيادة دخل الأجور في النموذج، فإن مخرجات القطاعات الأصلية في النموذج (هنا القطاعان 1 و 2) أكبر مما هو عليه عندما يتم تجاهل الإنفاق الاستهلاكي.

من إعداد: د. لطفي مخزومي

مطبوعة دروس رقم 03 في تحليل المدخلات والمخرجات

نموذج السعر

1. تقديم:

في الأصل وضع ليونتيف نموذج المدخلات والمخرجات بالوحدات المادية، وبصفة خاصة، افترض أن معاملات المدخلات المباشرة، **A**، تستند إلى الكميات المادية للمدخلات مقسوما على الكميات المادية للمخرجات، ثم حولت هذه البيانات إلى جدول معاملات (سنة الأساس) من حيث القيمة باستخدام أسعار وحدة (سنة الأساس). وتجرى دراسات المدخلات والمخرجات بصفة عامة في وحدات نقدية (قيمة).

2. المعاملات المادية مقابل النقدية:

بالعودة للمثال السابق، ولنفترض أن قياس الوحدة المادية للمخرجات هي البوشل (*bushels*) للقطاع 1 (الزراعة) والأطنان للقطاع 2 (التصنيع) وأن المعاملات المقاسة في هذه الوحدات المادية مبينة في الجدول رقم 06، حيث نستخدم الآن *di* للمبالغ المادية المسلمة إلى الطلب النهائي و *qi* للمبالغ المادية من إجمالي الناتج.

الجدول رقم (06): المعاملات بالوحدات المادية

	1	2	d_i	q_i	Physical units of measure
1	75	250	175	500	bushels
2	40	20	340	400	tons

إذا كنا نعرف أسعار الوحدة الواحدة للمنتجين، فإن المعلومات الواردة في الجدول رقم 06 يمكن تحويلها إلى وحدات نقدية. على سبيل المثال، إذا كان سعر البوشل هو 2.00 دولار وسعر الطن هو 5.00 دولار، ثم جدول المعاملات النقدية هو بالضبط كما هو مبين في الجدول رقم 01، انظر الجدول رقم 07.

الجدول رقم (07): المعاملات بالوحدات النقدية (أنظر الجدول رقم 01)

	1	2	f_i	x_i	\$ Price per physical unit
1	150	500	350	1000	2
2	200	100	1700	2000	5

الآن، إعادة تعريف وحدات القياس المادية لكل قطاع لتكون المبلغ الذي يمكن شراؤه بمبلغ 1.00 دولار؛ أي أن سعر الوحدة لكل مخرج قطاع هو 1.00 دولار. وهذا يعني ببساطة أننا نقيس المخرج المادي للقطاع 1 في نصف بوشل والمخرج المادي للقطاع 2 في خُمس طن. وفي هذه الوحدات المنقحة، يمكن إعادة تفسير المعلومات الواردة في الجدول رقم 07 على أنها معاملات تسجيل في وحدات مادية، كما هو مبين في الجدول رقم 08، على سبيل المثال تم شراء 500 نصف بوشل من ناتج القطاع 1 حسب القطاع 2 (مقابل 500 دولار)، و2000 خمس طن من مخرجات القطاع 2 إلى الطلب النهائي (مقابل 2000 دولار)، وما إلى ذلك.

ومن الناحية العملية، فإن القطاعات تنتج أكثر من سلعة واحدة، ويفترض أن فرض سعر واحد لمخرجات القطاع غير واقعي. وعلى أي حال، يتم تجميع الجداول النقدية على أساس القيم المسجلة للمعاملات؛ لا يتم تسجيل السعر والكمية بشكل منفصل.

3. نموذج السعر استنادا إلى البيانات النقدية:

يتم ترتيب المعاملات النقدية كالمعتاد، حيث للتبسيط في الرموز نفترض أن جميع القيم المضافة تمثل باليد العاملة.

	Sectors						
Sectors	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n	Final Demand	Total Output
1	z_{11}	$\cdots$	z_{1j}	$\cdots$	z_{1n}	f_1	x_1
2	z_{21}	$\cdots$	z_{2j}	$\cdots$	z_{2n}	f_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	z_{n1}	$\cdots$	z_{nj}	$\cdots$	z_{nn}	f_n	x_n
Labor	v_1	$\cdots$	v_j	$\cdots$	v_n	f_{n+1}	x_{n+1}

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} + v_j$$

أو

$$\mathbf{x}' = \mathbf{i}'\mathbf{Z} + \mathbf{v}'$$

حيث: $\mathbf{v}' = [v_1, \ldots, v_n]$ إجمالي نفقات القيمة المضافة لكل قطاع.

وباستبدال: $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}' = \mathbf{i}'\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}'$ ، والضرب في $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$:

$$\mathbf{x}'\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \mathbf{i}'\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{v}'\hat{\mathbf{x}}^{-1}$$

أو:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}'\mathbf{A} + \mathbf{v}'_c$$

أين: $\mathbf{v}'_c = \mathbf{v}'\hat{\mathbf{x}}^{-1} = [v_1/x_1, \ldots, v_n/x_n]$. الجانب الأيمن من المعادلة الأخيرة هو تكلفة المدخلات بوحدة المخرجات. أسعار المخرجات تكون مساوية لتكلفة الإنتاج الاجمالية (في الحالة العامة، سيشمل ذلك مخصصا للربح ومدخلات أولية أخرى في $\mathbf{v}'$ ، وبالتالي في $\mathbf{v}'_c$)، بحيث يكون كل سعر يساوي 1. وهذا يوضح وحدات القياس الفريدة في جدول سنة الأساس – القيم التي يمكن شراؤها بمبلغ 1.00 دولار . واذا رمزنا لمؤشر أسعار سنة الأساس بـ $\tilde{p}_j$ ، فإن $\tilde{\mathbf{p}}' = [\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n]$ ، وعليه نموذج سعر المدخلات–المخرجات يكون:

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \tilde{\mathbf{p}'}\mathbf{A} + \mathbf{v}'_c$$

والتي تؤدي الى: $\tilde{\mathbf{p}}'(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}'_c$ و $\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{v}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{v}'_c\mathbf{L}$

وغالبا ما يُنقل النموذج ويعبر عنه من حيث أشعة العمود بدلا من أشعة الصف. في هذه الحالة:

$$\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{v}_c = \mathbf{L}'\mathbf{v}_c$$

مؤشر الأسعار، $\tilde{\mathbf{p}}$ ، يتم تحديدها من خلال القيم الخارجية (التكاليف) للمدخلات الأولية. وبالنسبة لنموذج القطاعين،

$$\tilde{p}_1 = l_{11}v_{c1} + l_{21}v_{c2}$$
$$\tilde{p}_2 = l_{12}v_{c1} + l_{22}v_{c2}$$

والمنطق هو أن التغيرات في أسعار مدخلات العمل (أو بشكل عام التغيرات في أسعار المدخلات الأولية) تؤدي إلى تغيرات في تكاليف الوحدة القطاعية (وبالتالي أسعار الإنتاج، وليس كميات الإنتاج) عن طريق وصفات الإنتاج الثابتة في $\mathbf{A}$، وبالتالي في L and L'

فعلى سبيل المثال، يتم تجاوز الزيادات في التكاليف على نحو كامل مع زيادة أسعار المدخلات الوسيطة إلى جميع المشترين الذين يقومون بدورهم بهذه الزيادات عن طريق رفع أسعار إنتاجهم تبعا لذلك، وما إلى ذلك.

مثال تطبيقي01:

أسعار سنة الأساس. الجدول الموالي يحتوي على بيانات من الجدول رقم 05 لبناء صف إضافي لتعكس العمل باعتباره المُدخل الرئيسي الوحيد.

	1	2	f_i	x_i
1	150	500	350	1000
2	200	100	1700	2000
3 (Labor)	650	1400	1100	3150

مصفوفة المدخلات المباشرة المقابلة هي

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} .15 & .25 & .11 \\ .20 & .05 & .54 \\ .65 & .70 & .35 \end{bmatrix}$$

وباستخدام $\mathbf{A}$ للمصفوفة الجزئية 2×2 لمعاملات القطاع 1 والقطاع 2

$$(\mathbf{L}^0)' = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1} = \begin{bmatrix} 1.254 & .264 \\ .330 & 1.122 \end{bmatrix}$$

من بيانات سنة الأساس،

$$\mathbf{v}_c^0 = \begin{bmatrix} .65 \\ .70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{32} \end{bmatrix}$$

من الصف السفلي لـ$\bar{\mathbf{A}}$.

وبالتالي

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{L}^0)'\mathbf{v}_c^0 = \begin{bmatrix} 1.254 & .264 \\ .330 & 1.122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .65 \\ .70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

مثال تطبيقي02:

أسعار سنة الأساس. لنفترض أن التكاليف تتألف بالكامل من مدفوعات الأجور وأن هذه الأجور في القطاع 1 تزداد بنسبة 30 في المائة (من 0.65 إلى 0.845) في حين أن تلك الموجودة في القطاع 2 لا تزال دون تغيير.

شعاع تكاليف العمل الجديد يكون

$$\mathbf{v}_c^1 = \begin{bmatrix} .845 \\ .700 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = (\mathbf{L}^0)'\mathbf{v}_c^1 = \begin{bmatrix} 1.254 & .264 \\ .330 & 1.122 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .845 \\ .700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.245 \\ 1.064 \end{bmatrix}$$

نسبة لمؤشر الأسعار الأصلية $(\tilde{p}_1^0 = 1.00 \text{ and } \tilde{p}_2^0 = 1.00)$ ، يرتفع سعر القطاع 1 إلى 1.245 (بزيادة 24.5 في المئة)، ويرتفع سعر القطاع 2 بنسبة 6،4٪.

وكما هو الحال بالنسبة لنموذج المدخلات والمخرجات الذي يحركه الطلب، يمكن إجراء هذه العملية في النموذج:

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{L}^0)'\Delta\mathbf{v}_c$$

في هذه الحالة $\Delta\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} .195 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، اين $(0.195) = (0.30)(0.65)$

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{L}^0)'\Delta\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} 1.254 & .264 \\ .330 & 1.122 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .195 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .245 \\ .064 \end{bmatrix}$$

النتائج السابقة تقدم المعلومات نفسها – إن التأثير على مستوى الاقتصاد في زيادة الأجور بنسبة 30 في المائة في القطاع 1 هو أن سعر إنتاج القطاع 1 يرتفع بنسبة 24.5 في المائة، وأن القطاع 2 يزيد بنسبة 6.4 في المائة.

لاحظ أنه إذاكانت تكاليف العمالة ليست سوى جزء من مكون القيمة المضافة للقطاع 1، فإن زيادة بنسبة 30 في المائة في الأجور في القطاع j سوف تولد زيادة أقل من 30 في المائة في v_{cj}– على سبيل المثال، إذاكانت الأجور تشكل 40 في المائة من مدفوعات القيمة المضافة للقطاع j، وليس هناك زيادة في تكاليف قيمة مضافة أخرى، فإن زيادة الأجور بنسبة 30 في المائة تترجم إلى زيادة بنسبة 12 في المائة في v_{cj} .

4. نموذج السعر استنادا الى البيانات المادية:

ندرس الآثار المترتبة لنموذج المدخلات والمخرجات على أساس مجموعة من البيانات بالوحدات المادية، كما مبينة في الجدول رقم 06. في الجدول رقم 08، لدينا s_{ij} تمثل الكمية المادية للبضاعة i المشحونة لـ j . d_i هو التسليم إلى الطلب النهائي، و q_i هو إجمالي إنتاج القطاع i. ومرة أخرى، من أجل البساطة، دع قطاع المدفوعات الخارجية (القيمة المضافة) يتألف حصرا من مدخلات العمالة (مقاسة بـ شخص–ايام).

	Sectors					
Sectors	1	2	$\cdots$	n	Final Demand	Total Output
1	s_{11}	s_{12}	$\cdots$	s_{1n}	d_1	q_1
2	s_{21}	s_{22}	$\cdots$	s_{2n}	d_2	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	s_{n1}	s_{n2}	$\cdots$	s_{nn}	d_n	q_n
Labor	$s_{n+1,1}$	$s_{n+1,2}$	$\cdots$	$s_{n+1,n}$	d_{n+1}	q_{n+1}

القراءة عبر أي صف في الجدول السابق توضح لنا العلاقات الأساسية في الوحدات المادية:

$$q_i = s_{i1} + \cdots + s_{ij} + \cdots + s_{in} + d_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} + d_i$$

وباستخدام المصفوفات

$$\mathbf{q} = \mathbf{Si} + \mathbf{d}$$

معامِلات المدخلات بالوحدات المادية تعرف كما يلي:

$$c_{ij} = \frac{s_{ij}}{q_j} \quad \text{or} \quad \mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$$

ومنه

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}\mathbf{i} + \mathbf{d} = \mathbf{Cq} + \mathbf{d}$$

وعليه

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d}$$

مدخل للأسعار. لنفترض أيضا أننا نعرف سعر الوحدة لمخرجات كل قطاع، p_i، وتكلفة العمل لكل شخص في الساعة، p_{n+1}. كما يلاحظ ليونتيف، يمكننا بسهولة تحويل البيانات الأساسية إلى وحدات القيمة:

$$x_i = p_i q_i$$

$$z_{ij} = p_i s_{ij}$$

$$f_i = p_i d_i$$

وبضرب طرفي المعادلة أعلاه بـ p_i

$$x_i = p_i q_i = \sum_{j=1}^{n} p_i s_{ij} + p_i d_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i$$

أو $\mathbf{x} = \mathbf{Zi} + \mathbf{f}$.

كذلك لدينا: $x_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} + v_j$ ، و $z_{n+1,j} = p_{n+1} s_{n+1,j} = v_j$

ومنه:

$$p_j q_j = \sum_{i=1}^{n} p_i s_{ij} + p_{n+1} s_{n+1,j}$$

وبالقسمة على q_j (بافتراض انها لا تساوي الصفر)

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i s_{ij}/q_j + p_{n+1} s_{n+1,j}/q_j = \sum_{i=1}^{n} p_i c_{ij} + p_{n+1} c_{n+1,j}$$

وبالشكل المصفوفي $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'\mathbf{C} + \boldsymbol{\upsilon}'_c$

أين $\mathbf{p}' = [p_1, \ldots, p_n]$ ، $\upsilon'_c = p_{n+1}[c_{n+1,1}, \ldots, c_{n+1,n}]$

حيث يمثل تكلفة العمل (السعر) بوحدة المخرجات المادية– على سبيل المثال تكاليف العمالة لكل طن من المخرجات

[\$/ton = (\$/person-hour) × (person-hours/ton)]

ويفترض أن تكون تكاليف العمالة موحدة في جميع القطاعات؛ وبالتالي لدينا فقط p_{n+1} وليس $p_{n+1,j}$.

ومنه

$$\mathbf{p}' = \boldsymbol{\upsilon}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$$

ويمكننا كذلك: $\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{p} + \boldsymbol{\upsilon}_c \quad \text{and} \quad \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1}\boldsymbol{\upsilon}_c$

وهذا هو نموذج السعر لليونتيف.

العلاقة بين $\mathbf{A}$ *و* $\mathbf{C}$.

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} \quad \text{or} \quad \mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$$

$$a_{ij} = \frac{p_i s_{ij}}{p_j q_j} = c_{ij}\left(\frac{p_i}{p_j}\right)$$

بالشكل المصفوفي

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S}(\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})^{-1} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{q}}^{-1}\hat{\mathbf{p}}^{-1}) = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{p}}^{-1}$$

مثال تطبيقي01: *أسعار سنة الأساس*

باعتبار الاقتصاد بقطاعين (زراعة وصناعة) كما في الجدول رقم 06، مغلق بصف إضافي يظهر مدخلات العمالة والطلب النهائي (الاستهلاك). نستطيع الحصول على المعامِلات التقنية المادية:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} .15 & .625 & .556 \\ .08 & .05 & 1.079 \\ .13 & .35 & .349 \end{bmatrix}$$

نحن نستخدم $\bar{\mathbf{C}}$ لمصفوفة المعاملات الفنية (المغلقة) التي تشمل الأسر ؛ $\mathbf{C}$ تمثل مصفوفة 2×2 في الزاوية العلوية اليسرى – المعاملات التقنية التي تربط بين القطاعين المنتجين في الاقتصاد.

وإذا استعملنا القيمة المضافة لفترة الاساس لكل وحدة من أرقام المخرجات،

$$v_{c1}^0 = p_3\bar{c}_{31} = (10)(.13) = 1.30 \text{ and } v_{c2}^0 = p_3\bar{c}_{32} = (10)(.35) = 3.50$$

مع

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1} = \begin{bmatrix} 1.243 & .106 \\ .825 & 1.122 \end{bmatrix}$$

ومن المصفوفة 2×2 في الزاوية العلوية اليسرى لـ $\bar{\mathbf{C}}$: $\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1}\boldsymbol{v}_c$

$$\begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1}\mathbf{v}_c^0 = \begin{bmatrix} 1.254 & .106 \\ .825 & 1.122 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.3 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

وهذا يولد أسعار سنة الأساس، كما هو متوقع.

مثال تطبيقي02: *أسعار سنة الأساس المتغيرة*

واستمرارا لنموذج المعاملات المادية هذا، نفترض أن تكاليف الأجور في القطاع 1 تزداد من 10.00دولار أمريكي إلى 13.00 دولارا أمريكيا (زيادة بنسبة 30 في المائة) في حين أن تكاليف الأجور في القطاع 2 تبقى دون تغيير ($\text{and } p_{32}^1 = p_{32}^0 = 10.00 p_{31}^1 = \$13.00$).

اذن
$$\boldsymbol{v}_c^1 = \begin{bmatrix} (13)(.13) \\ (10)(.35) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.69 \\ 3.50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1} v_c^0 = \begin{bmatrix} 1.254 & .106 \\ .825 & 1.122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.69 \\ 3.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.49 \\ 5.32 \end{bmatrix}$$

من إعداد: د. لطفي مخزومي

مطبوعة دروس رقم 04 في تحليل المدخلات والمخرجات

1. نموذج الكمية استنادا إلى البيانات المادية:

يمكن أن تشكل البيانات في الوحدات المادية أيضا جوهر نموذج الكمية المدخلات والمخرجات، كما في $\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d}$.

باستخدام نفس المثال التطبيقي:

$$C = \begin{bmatrix} .150 & .625 \\ .080 & .050 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad (I - C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.254 & .825 \\ .106 & 1.122 \end{bmatrix}$$

ومخرجات سنة الاساس تكون

$$q^0 = (I - C)^{-1}d^0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.254 & .825 \\ .106 & 1.122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 175 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \end{bmatrix}$$

وعلى سبيل المثال، مضاعفة الطلب يضاعف المخرجات،

$$q^1 = (I - C)^{-1}d^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.254 & .825 \\ .106 & 1.122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 680 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \end{bmatrix}$$

2. الدخل الوطني:

لدينا: $\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d}$ و $\mathbf{p}' = \boldsymbol{\upsilon}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$، وبضرب الطرفين بـ $\mathbf{d}$

$$\mathbf{p}'\mathbf{d} = \boldsymbol{\upsilon}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d} = \boldsymbol{\upsilon}'_c\mathbf{q}$$

القيمة الإجمالية للإنفاق (الطلب النهائي الخارجي، $\mathbf{p}'\mathbf{d}$) تساوي القيمة الإجمالية للأرباح (المدفوعات للمدخلات الاولية الخارجية، $\boldsymbol{\upsilon}'_c\mathbf{q}$)، أو الدخل الوطني المنفق يساوي الدخل الوطني المكتسب.

3. ملخص:

Measurement Units	Quantity Model	Price Model
Monetary	$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f}$ (2.11)	$\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{v}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ (2.32) or $\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{v}_c$ (2.33)
Physical	$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d}$ (2.43)	$\mathbf{p}' = \boldsymbol{v}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}$ (2.51) or $\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}')^{-1}\boldsymbol{v}_c$ (2.52)

4. تطبيقات:

تطبيق 01: فيما يلي بيان للقيم بالدولار للمعاملات بين الصناعات في العام الماضي ومجموع المخرجات لاقتصاد بقطاعين (الزراعة والتصنيع):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 500 & 350 \\ 320 & 360 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \end{bmatrix}$$

أ– ما هما عنصرا شعاع الطلب النهائي $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ ؟

ب– لنفترض أن f_1 يزيد بمقدار 50 دولارا و f_2 ينخفض بمقدار 20 دولارا. ما هي المخرجات الإجمالية الجديدة اللازمة لتلبية الطلبات النهائية الجديدة؟

تطبيق 02: المبيعات بين القطاعات ومجموع المخرجات في اقتصاد وطني صغير من ثلاثة قطاعات للسنة t معطاة في الجدول الموالي، حيث تظهر القيم بآلاف الدولارات. حيث S_1, S_2 and S_3 تمثل القطاعات الثلاثة.

	Interindustry Sales			
	S_1	S_2	S_3	Total Output
S_1	350	0	0	1000
S_2	50	250	150	500
S_3	200	150	550	1000

أ– استخرج مصفوفة المعامِلات التقنية، **A** ، ومصفوفة معكوس ليوتنيف، **L** ، لهذا الاقتصاد.

ب– لنفترض أنه بسبب تغييرات في السياسة الضريبية الحكومية، فإن الطلب النهائي لمخرجات القطاعات 1 و 2 و 3 يتم توقعها للسنة القادمة (السنة t + 1) لتكون 1300 و100 و200 على التوالي (مقاسة أيضا بآلاف الدولارات). اوجد المخرجات الاجمالية الضرورية من القطاعات الثلاثة لتلبية هذا الطلب المتوقع، على افتراض أنه لا يوجد أي تغيير في الهيكل التكنولوجي للاقتصاد (أي بافتراض أن المصفوفة A لا تتغير من سنة t إلى سنة t + 1).

ت– أوجد على الطلب النهائي الأصلي (السنة t) من المعلومات في جدول البيانات. قارن مع الطلب النهائي المتوقع (السنة t + 1). أيضا، قارن المخرجات الإجمالية الأصلية مع المخرجات المتوصل اليها في الجزء ب.

تطبيق03: نعتبر في اقتصاد منظم في ثلاث صناعات: الخشب والمنتجات الخشبية، والورق والمنتجات المرتبطة بها، وآلات ومعدات النقل. وتقدر شركة استشارية أن صناعة الأخشاب بلغت قيمة مخرجاتها في العام الماضي 50 دولارا (على افتراض أن جميع القيم النقدية هي في وحدات من 100 000 دولار)، منها 5 في المائة تستهلكها نفسها؛ وتستهلك 70 في المائة من الطلب النهائي؛ 20في المئة من الورق والمنتجات المرتبطة بها؛ 5في المائة من صناعة المعدات. استهلكت صناعة المعدات 15 في المئة من منتجاتها الخاصة، من أصل ما مجموعه 100دولار؛ 25في المائة إلى الطلب النهائي؛ 30في المائة لصناعة الأخشاب؛ 30 في المائة لصناعة الورق والمنتجات المرتبطة به. وأخيرا، أنتجت صناعة الورق والمنتجات المرتبطة بها 50 دولارا، استهلكت منها 10 في المائة؛ وذهب 80 في المائة إلى الطلب النهائي؛ و 5 في المائة ذهبت إلى صناعة الأخشاب؛ و 5 في المائة لصناعة المعدات.

أ– بناء مصفوفة معامَلات المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد على أساس هذه التقديرات من بيانات العام الماضي. ايجاد المصفوفة المقابلة للمعامِلات التقنية.

ب– أوجد معكوس ليونتيف لهذا الاقتصاد.

ت– وينعكس الركود في الاقتصاد هذا العام في انخفاض الطلب النهائي، وفق ما يوضحه الجدول التالي:

الصناعة	**الانخفاض في الطلب النهائي %**
الخشب والمنتجات الخشبية	25
آلات ومعدات النقل	10
الورق والمنتجات المرتبطة بها	5

ما هو الإنتاج الكلي لجميع الصناعات اللازم لتخفيض الطلب النهائي لهذا العام؟ أحسب اشعة القيمة المضافة والمخرجات الوسيطة لجدول المعامَلات الجديد.

تطبيق04: لدينا بيانات المعامَلات وإجمالي المخرجات لاقتصاد من ثماني قطاعات.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 8,565 & 8,069 & 8,843 & 3,045 & 1,124 & 276 & 230 & 3,464 \\ 1,505 & 6,996 & 6,895 & 3,530 & 3,383 & 365 & 219 & 2,946 \\ 98 & 39 & 5 & 429 & 5,694 & 7 & 376 & 327 \\ 999 & 1,048 & 120 & 9,143 & 4,460 & 228 & 210 & 2,226 \\ 4,373 & 4,488 & 8,325 & 2,729 & 29,671 & 1,733 & 5,757 & 14,756 \\ 2,150 & 36 & 640 & 1,234 & 165 & 821 & 90 & 6,717 \\ 506 & 7 & 180 & 0 & 2,352 & 0 & 18,091 & 26,529 \\ 5,315 & 1,895 & 2,993 & 1,071 & 13,941 & 434 & 6,096 & 46,338 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 37,610 & 45,108 & 46,323 & 41,059 & 209,403 & 11,200 & 55,992 & 161,079 \end{bmatrix}$$

أ- احسب **A** و **L**.

ب- إذا زاد الطلب النهائي في القطاعين 1 و 2 بنسبة 30 في المائة، في حين أن الطلب في القطاع 5 ينخفض بنسبة 20 في المائة (في حين أن جميع الطلب النهائي في القطاعات الأخرى لم تتغير)، ما هي المخرجات الجديدة الضرورية من كل قطاع من القطاعات الثمانية في هذا الاقتصاد؟

تطبيق05: نعتبر الجدول التالي الذي يمثل المدخلات والمخرجات لقطاعين مقاسة بملايين الدولارات:

	Manuf.	Services	Final Demand	Total Output
Manufacturing	10	40	50	100
Services	30	25	85	140
Value Added	60	75	135	
Total Output	100	140		240

إذا ارتفعت تكاليف العمالة في قطاع الخدمات، مما يؤدي إلى زيادة بنسبة 25 في المائة في المدخلات ذات القيمة المضافة المطلوبة لكل وحدة من الخدمات وتكاليف العمالة في الصناعة التحويلية بنسبة 25 في المائة، ما هي التغيرات الناتجة في الأسعار النسبية للسلع والخدمات المصنعة؟

من إعداد: د. لطفي مخزومي