الفصل الثالث

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية

I. المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة دالية بين دالة مجهولة بمتغير واحد ومشتقاتها ورتبتها من رتبة المشتق الأكبر درجة.

مثال: الشكل العام بمعادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى هو:

$$y' = F(x, y) \qquad y \text{ بدلالة } x$$

تعريف1:

تكون الدالة $F(x,y)$ ليبشيتزيه في y على D من R^2 اذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D :$$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

تعريف2:

تسمى المجموعة D من R^2 مجموعة محدبة اذا تحقق : من اجل كل (x_1, y_1) و (x_2, y_2) من D فإن $\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2\big)$ ينتمي أيضا لـ D من اجل $\lambda \in [0,1]$.

نظرية:

لتكن المسألة:

$$(1) \begin{cases} y' = F(x, y) \; ; \; x \in [a, b] \\ \qquad y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$D = \{(x, y) \in R^2 : a \le x \le b \; ; \; -\infty < y < +\infty \}$$

اذا كانت $F(x,y)$ مستمرة و ليبشيتزية في y على D فإن المسألة (1) تقبل حلا وحيدا $y(x)$.

المسألة (1) تسمى مسألة كوشي أو مسألة شروط ابتدائية.

مثال:

لتكن المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

و $$D = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 4 ; y > 0\}$$

لدينا: $$F(x, y) = 1 + xy$$

الدالة F مستمرة على D.

من جهة أخرى:

$$\forall((x, y_1), (x, y_2)) \in D^2 :$$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| = |xy_1 - xy_2)|$$

$$= |x(y_1 - y_2)| \leq 4|y_1 - y_2|$$

إذن F ليبشيتزيه ومنه المسألة تقبل حلا وحيدا.

II. الطريق العددية:

الهدف من هذه الطرق هو إيجاد حل مقرب للحل الصحيح لمسألة كوشي (1) وسوف نتعرض لطريقتين هما:

1) طريقة إيلر
2) طريقة تايلور

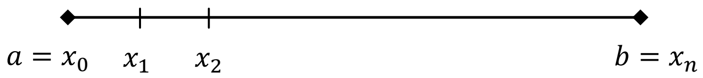
1. طريقة إيلر:

تعتبر أبسط الطرق وتتميز بسهولة الاستعمال وضعف الدقة.

أ) خطوات الطريقة:

- التقسيمات:

تتمثل في تجزئة المجال $[a, b]$ الى n مجال طول كل منها h وتسمى خطوة



الخطوة: $h = \frac{b-a}{h}$

✓ نشر تايلور:

نفرض أن الحل الصحيح $y(x)$ يقبل الاشتقاق ومستمر مرتين على $[a,b]$ ومنه:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'\,(x_i) + O(h^2)$$

نعوض y' بـ $F(x_i, y_i)$ نجد:

$$(2): y(x_i + h) = y(x_i) + h\,F(x_i, y_i) + O(h^2)$$

من أجل i=0,...,n-1

بما ان $\lim_{h\to 0} O(h^2) = 0$ فإن:

$$(2): y(x_i + h) = y(x_i) + h\,F(x_i, y_i)$$

ونكتب اختصار الشكل الآتي:

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih})$$

حيث يمثل y_{ih} الحل التقريبي عند x_i .

على اعتبار : $y_{0h} = y_0$ أي معطى.

حيث : $a = x_0$

من خلاله يمكن حساب y_{ih} ,.....

ب)رتبة الخطأ:

- تعريف:

نسمي القيمة e_i حيث :

$|e_i|$=$|y(x_i) - y_{ih}|$ الخطأ عند النقطة x_i

اذا كان $|e_i| \le kh^p$ فإن التقريب العددي التي تعطى القيمة المقربة y_{h^i} لـ y_i من الرتبة P.

من خلال مما سبق نلاحظ ان طريقة إيلر من الرتبة الأولى.

ملاحظة:

- ✓ كلما كان العدد P أكبر تكون الطريقة أكثر دقة.
- ✓ الخطأ ناتج عن إهمال $O(h^2)$ عند نشر تايلور ويسمى خطأ البتر.

ج) مثال:

لتكن مسألة كوشي:

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1 & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 & h = 0,1 \end{cases}$$

إيجاد القيمة المقربة $y(x_i)$ بطريقة إيلر:

- الحل:

لدينا: الخطوة h معطاة بـ:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = 0.1$$

ومنه : $n = 10$

اذن : $i = 0, 1, 2, \dots \dots \dots, 9$

نضع الحل التقريبي : y_{ih}

حسب العلاقة (2) فإن:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih}) \\ y_0 = 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \dots \dots, 9 \end{cases}$$

من أجل $i = 0$ الحل معلوم.

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,(x_i - y_{ih} + 1)$$

اذن :

$$y_{(i+1)h} = y_{ih}(1-h) + hx_i + h$$

$$= 0.9y_{ih} + ih^2 + h$$

لأن : $x_i = x_0 + ih = 0 + ih = ih$

ومنه:

$$y_{(i+1)h} = 0.9y_{ih} + 0.01i + 0.1$$

$$y_0 = 1$$

$$i = 0$$

$$y_{1h} = 0.9y_0 + 0.01 \times 0 + 0.1 = 1$$

$$y_{2h} = 0.9 \times 1 + 0.01 \times 1 + 0.1 = 0.11$$

$i = 9$ $\vdots$

$$y_{10} = 1.348$$

يمكنك إيجاد الحل الصحيح للمسألة وتعويض x بـ 1 ثم تحسب الخطأ بين :

$y(1)$ و y_{10}

2. طريقة تايلور:

نفرض أن حل المسألة (1) y(x) يقبل (n+1) مشتقة مستمرة ومنه حسب نشر تايلور نجد:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(x_i + \theta_i h)$$

حيث : $0 < \theta_i < 1$ وحسب (1)

$$y'(x_i) = F\big(x_i, y(x_i)\big)$$

أي : $$y''(x_i) = F(x_i, y_i)$$

اذن:

$$y(x_i+h) = y(x_i) + h\left[F(x_i,y_i) + \frac{h}{2}F'(x_i,y_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}F^{(n-1)}(x_i,y_i)\right] + O(h^{n+1})$$

باستعمال البتر وبما أن:

$$\lim_{h\to 0} O(h^{n+1}) = 0$$

نحصل على العلاقة التالية:

نضع $y_{(i+1)h}$: الحل التقريبي .

ومنه نجد:

$$y_{(i+1)h} = y_{1h} + h\left[F(x_i,y_{ih}) + \frac{h}{2}F'(x_i,y_{ih}) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}F^{(n-1)}(x_i,y_{ih})\right]$$

نرمز للجزء بين عارضتين بالرمز:

$$T^n(x_i,y_{ih})$$

فنحصل على المعادلة التالية:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\,T^n\left(x_i, y_{ih}\right) \\ y_{0h} = y_0 = \alpha \qquad\qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n-1 \end{cases}$$

ملاحظة:

عند استعمال طريقة تايلور يجب ذكر الرتبة.

مثال: نأخذ المسألة السابقة

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1 \qquad 0 < x \le 1 \\ y(0) = 1 \qquad\qquad\qquad\quad h = 0.1 \end{cases}$$

طريقة تايلور من الرتبة الثانية:

$$y_{(i+1)h} = y_{ih} + h\, T^2(x_i, y_{ih})$$

حيث:

$$T^2(x_i, y_{ih}) = F(x_i, y_{ih}) + \frac{h}{2} F'(x_i, y_{ih})$$

$$F'(x_i, y_{ih}) = 1 - y'(x)$$

$$= 1 - x + y(x) - 1$$

$$= -x + y(x)$$

اذن:

$$F'(x_i, y_{ih}) = -x_i + y_{ih}$$

$$y_{(i+1)h} = y_{1h} + h\left[x_i - y_{ih} + 1 + \frac{h}{2}(-x_i + y_{ih})\right]$$

$$= y_{ih} + h\left[\left(1 - \frac{h}{2}\right)(x_i + y_{ih}) + 1\right]$$

بالتعويض نجد:

$$y_{(i+1)h} = 0.905 y_{ih} + 0.095 x_i + 0.1$$

$$y_{1h} = 1.005;\ y_{2h} = 1.019$$

من اجل $i=9$ نجد: $y_{10h} = 1.367$

يمكنك المقارنة مع طريقة ايلر علما ان الحل الصحيح $y(1)=1.367$

لاحظ ان $i=9$ تكون $x_{10} = x_n = 1$ سنجد طريقة تايلور اكثر دقة واذا رفعنا الرتبة اكثر ستزيد الدقة لكن الحساب يتعقد أيضا.

الرتبة الثانية تكون $T^2(x_i, y_{ih})$:

حيث $F'(x_i, y_{ih})$ تمثل: y''

3. تطبيقات:

أ- لتكن المسألة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = 2 \qquad h = 0.1 \end{cases}$$

عين الحل التقريبي y_{1h} و y_{2h} بطريقة :

1/ أيلر

2/ تايلور من الرتبة الثانية

1) ايلر:

$$\begin{cases} y_{(i+1)h} = y_{\,ih} + h\,F\big(x_i, y_{\,ih}\big) \\ y_{0h} = 2 \end{cases}$$

اذن:

$$y_{1h} = y_{0h} + 0.1(0 \sin 2)$$

$$= 2$$

$$y_{2h} = y_{1h} + 0.1(0.1 \sin 2)$$

$$= 2.009$$

2) طريقة تايلور:

$$y_{(i+1)} = y_{ih} + h\,F(x_i, y_{ih}) + \frac{h^2}{2} F'(x_i, y_{ih})$$

$$= y_{ih} + h\,T^2(x_i, y_{ih})$$

تحقق أن :

$$F'(x_i, y_{ih}) = \sin y_{ih} + x_i \cos y_{ih}$$

ومنه :

$$y_{1h} = y_{0h} + h(x \sin y_{0h}) + \frac{h^2}{2}(\sin y_{0h} + x_0 \cos y_{0h} \times \sin y_{0h})$$

$$y_{1h} = 2.004$$

$$y_{2h} = 2.018$$

تأكد من النتائج.

ب- نعتبر المسألة:

$$(1)\ \begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1 \quad , & h = 0.2 \end{cases}$$

1) بين أن المسألة (1) تقبل حلا صحيحا وهو : $y = \sqrt{2x+1}$

2) اوجد الحل التقريبي بإستعمال:

- طريقة ايلر
- طريقة تايلور من الرتبة الثانية

3) أحسب الخطأ بين الحل الصحيح والحل التقريبي عند القيمة $x = 1$ بالنسبة للطريقتين ماذا نستنتج.