

Pascal Dassonville



Les capteurs

62 exercices
et problèmes corrigés

2^e édition

RESSOURCES



NUMÉRIQUES

DUNOD

Illustration de couverture : On the road © MC_PP-Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2005, 2013
ISBN 978-2-10-070292-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

PRÉFACE DE LA 1^{ère} ÉDITION

La mesure est une étape cruciale dans l'acquisition scientifique de la connaissance et le capteur est un composant incontournable de tout système moderne de mesure : il constitue l'interface obligée entre monde réel et électronique du système de traitement. Dans son principe, le capteur met en œuvre un phénomène par lequel la grandeur qui est l'objet de la mesure (le mesurande) détermine, de façon univoque, la valeur de l'une des caractéristiques électriques du capteur ; un circuit électrique – le conditionneur – est fréquemment associé au capteur afin de délivrer sous la forme la plus adéquate le signal électrique, support de l'information, qui sera traité par l'électronique du système.

La qualité d'une mesure est donc de façon primordiale déterminée, d'une part, par le choix judicieux du capteur et de son conditionneur et, d'autre part, par l'exploitation pertinente de leurs qualités métrologiques.

Pour un même mesurande, il existe généralement divers types de capteurs basés sur des phénomènes différents et dotés de caractéristiques métrologiques spécifiques. En fonction des conditions imposées par le problème particulier à résoudre (volume disponible, étendue de mesure, bande passante, temps de réponse...), il faut savoir choisir le capteur et le conditionneur les plus appropriés.

Le capteur et son conditionneur ayant été choisis, il faut que l'utilisateur sache en disposer afin de minimiser les perturbations apportées au processus (discrétion) ou subies de son chef (grandeurs d'influence).

Ce sont tous ces aspects que Pascal Dassonville aborde avec beaucoup de pédagogie dans cet ouvrage. La multiplicité des types de capteurs étudiés, la diversité des situations expérimentales envisagées font de cet ouvrage une mine d'informations utiles.

Pour tous ceux qui souhaitent réaliser une instrumentation de qualité, les exercices et problèmes présentés dans l'ouvrage de P. Dassonville constituent un excellent entraînement pour apprendre à éviter les pièges et pour savoir choisir les bonnes solutions : cet ouvrage sera, à coup sûr, un précieux outil de formation.

Georges Asch
Professeur à l'université de Lyon 1

TABLE DES MATIÈRES

Cette table des matières multicritère permet au lecteur de sélectionner des exercices et problèmes en fonction de la discipline majoritaire (physique, électronique, etc.) et du niveau de difficulté (noté de * à *** du plus faible au plus fort).


Les thèmes traités sont classés selon trois disciplines :

- E : électronique, circuits électriques...
- P : physique
- S : statistiques, mathématiques...

Selon que les disciplines marquent plus ou moins fortement un exercice ou un problème, les lettres qui les indexent sont majuscules ou minuscules.

Compléments en ligne

Le symbole @ dans les titres des exercices et des problèmes indique que les **données** peuvent être téléchargées.

Le symbole  dans les titres des exercices et des problèmes indiquent que les **corrigés** peuvent être téléchargés.

Tous ces éléments sont téléchargeables gratuitement sur :

► La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville

► Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674



ou en flashant le QR code suivant :

TITRE DE L'EXERCICE	n°	Nature	Difficulté	Page
Potentiomètre linéaire en capteur de position push-pull	1	E	*	2
Capteur capacitif push-pull à glissement du diélectrique	2	Ep	*	5
Étalonnage indirect – Régression linéaire @	3	S	**	8
Capteur de niveau capacitif	4	E	*	11
Montage potentiométrique d'une résistance thermométrique	5	E	*	14
Erreur de finesse d'un oscilloscope	6	E	*	17

Table des matières

TITRE DE L'EXERCICE	n°	Nature	Difficulté	Page
Capteur du second ordre	7	EP	**	20
Capteur à condensateur d'épaisseur variable	8	E	*	24
Influence de la résistance transversale des jauges d'extensométrie	9	eP	**	27
Capteur inductif à réluctance variable	10	P	**	32
Jauge d'extensométrie capacitive haute température	11	EP	**	37
Choix d'un capteur de température	12	P	**	42
Utilisation des jauges d'extensométrie sur un corps d'épreuve cylindrique	13	eP	**	45
Effet de la résistance des fils de liaison du capteur dans un pont de Wheatstone	14	E	**	48
Effet d'un mauvais appariement sur un pont à quatre capteurs résistifs	15	E	**	52
Effet de la résistance des fils de liaison d'un capteur alimenté en courant	16	E	**	55
Étalonnage direct – Évaluation des différents types d'erreurs @	17	S	***	58
Correction de la dérive thermique d'un pont d'extensométrie push-pull à quatre jauges	18	E	**	63
Linéarisation de rapport potentiométrique – Mesure d'intensité lumineuse @	19	Es	**	66
Capteur de pression sonore aquatique piézoélectrique	20	EP	***	69
Qualification en production d'un capteur à réluctance variable	21	S	***	75
Mesure télémétrique et statistique de mesure @	22	S	***	80
Tachymètre optique	23	E	**	85
Capteur de pression à tube borgne et jauges d'extensométrie	24	Pe	**	89
Piézoélectricité – Choix du piézoélectrique	25	P	**	92
Capteur à courants de Foucault – Mesure de résistivité 	26	EP	***	95
Relation mesurande-signal de mesure – Dérive thermique 	27	E	**	98
Capteur de pression – Dérive thermique	28	E	**	101
Potentiomètre rotatif – Effet de la dérive thermique	29	E	**	104
Résistance thermométrique en montage potentiométrique 	30	E	**	107
Capteur de déplacement capacitif – Non-linéarité 	31	EP	**	109
Capteur de température – Linéarisation	32	EPS	**	112
Défaut d'un potentiomètre utilisé en capteur angulaire	33	Ep	**	117
Capteur capacitif – Effet de la dilatation	34	Ep	**	120
Photodiode à deux cadrans utilisée en capteur d'angle	35	EP	***	124
Capteur angulaire sans contact à magnétorésistance	36	EP	***	130
Capteur de débit à tube Venturi – Tension de mode commun 	37	EP	***	134

Les capteurs

TITRE DU PROBLÈME	n°	Nature	Difficulté	Page
Mesure de la température de l'eau d'une installation de chauffage central	1	Ep	**	138
Jauge de Pirani	2	eP	**	144
Utilisation de capteurs de température pour la mesure de la vitesse d'un fluide	3	EP	**	150
Jauges d'extensométrie – Électronique de séparation contrainte – Température	4	Ep	**	154
Capteur résistif non linéaire @ 	5	E	**	161
Capteur à réductance variable	6	EPS	***	166
Linéarisation aval 	7	E	**	175
Principe du thermocouple et lois élémentaires @	8	eP	***	178
Thermométrie par résistance – Linéarisation	9	ES	**	189
Système de pesée à jauges d'extensométrie	10	eP	***	198
Photorésistance – LDR : fonctionnement et utilisation pour le centrage d'un ruban défilant	11	eP	***	207
Thermométrie à diode	12	EP	***	216
Capteur capacitif de pression à déformation de membrane	13	eP	***	224
Accéléromètre piézorésistif basses fréquences	14	eP	***	235
Capteur de courant à fibre optique	15	eP	***	247
Ampèremètre à ceinture de Rogowski	16	eP	***	253
Transformateur différentiel (LVDT)	17	EP	***	262
Interféromètre de Mach-Zender utilisé en capteur d'angle 	18	P	***	271
Étude d'une thermistance en utilisation bolométrique pour la détermination à distance de la température d'un corps 	19	EP	***	274
Pince ampèremétrique AC-DC	20	EP	***	278
Capteur angulaire robuste @ 	21	EPS	***	290
Anémomètre à fil chaud	22	EP	***	296
Thermocouple, thermopile et pyromètre optique @	23	EP	***	305
Photodiode à effet latéral unidirectionnelle 	24	EP	***	319
Capteur de proximité capacitif	25	EP	***	329

AVANT-PROPOS

Je suis régulièrement soumis de la part de mes étudiants à la question : « existe-t-il un livre d'exercices en physique des capteurs ? » Ce à quoi je suis bien obligé de répondre par la négative.

Cette même question est posée régulièrement à de nombreux collègues qui enseignent la même discipline à l'université ou en école d'ingénieurs.

Si je peux conseiller à mes étudiants la lecture de la référence dans le domaine « *Les capteurs en instrumentation industrielle* » du professeur G. Asch aux éditions Dunod, force est de constater qu'ils restent en attente d'un moyen plus immédiat de se préparer à leurs examens.

Il m'a donc semblé intéressant de réaliser, bien modestement, un tel ouvrage.

Cet ouvrage est destiné à différentes catégories de lecteurs.

Il permettra aux étudiants universitaires et élèves ingénieurs de se confronter, au travers de cas pratiques, au contexte pluridisciplinaire de la matière.

Pour les enseignants de la thématique « capteurs », cet ouvrage pourra être une source d'inspiration pour leurs propres sujets d'examens. La discipline étant par nature pluridisciplinaire (physique, électronique, métrologie, etc.), les sujets en question sont souvent longs et délicats à mettre au point.

Les enseignants des matières connexes pourront y trouver des illustrations pour certains de leurs enseignements.

Le but de l'ouvrage est d'aborder, au travers de problèmes concrets, l'énorme diversité du monde des capteurs (physique, métrologie, modélisation, électronique, traitement du signal, etc.). J'ai cherché à rester le plus simple possible dans chacun des domaines traités. Les problèmes corrigés sont volontairement pluridisciplinaires et portent sur un large champ d'application de la physique des capteurs ; l'ensemble des différents aspects depuis la conception jusqu'à la mise en œuvre étant abordé.

Le plus souvent possible les énoncés comprennent des schémas, permettant une meilleure compréhension de la problématique, et les corrigés des courbes, généralisant souvent les calculs qui viennent d'être effectués.

Bien évidemment, les sujets abordés ne prétendent pas constituer une base de savoir exhaustif de la thématique.

Les thèmes traités figurent sous deux types de présentation :

- **Les exercices**, dont la thématique n'aborde souvent qu'un aspect de la problématique des capteurs (physique, électronique, statistique, etc.). Chaque exercice est construit autour de la compréhension d'un point scientifique précis ou d'une difficulté technique de mise en œuvre.

Les capteurs


- **Les problèmes**, par nature plus complets et pluridisciplinaires, et dont la problématique englobe à la fois les principes physiques et les difficultés techniques de mise en oeuvre. Chaque problème est accompagné d'une présentation du thème traité et d'une conclusion sous la forme d'un développement technique, technico-économique ou sur les variantes que l'on pourrait apporter à la problématique traitée.

À propos de la deuxième édition

Cette seconde édition compte douze nouveaux exercices qui portent notamment sur les capteurs à courants de Foucault, les potentiomètres rotatifs ou les capteurs capacitifs.

Compléments en ligne

Certains exercices et problèmes nécessitent d'utiliser un grand nombre de données ; les données à télécharger sont présentées sous deux formats : Excel (97) et Matlab. Les titres des exercices et problèmes dont les données peuvent être téléchargées sont suivis du signe @ dans la table des matières.

Onze corrigés d'exercices et de problèmes ne figurent pas dans l'ouvrage mais sont également téléchargeables. Ces corrigés sont signalés dans la table des matières par le symbole .

Compléments en ligne

Les données et les corrigés sont téléchargeables gratuitement sur :

- La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville
- Le site de Dunod, à l'adresse suivante :
www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674



ou en flashant le QR code suivant :

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à tous ceux, qui à des degrés divers, ont contribué à la publication de cet ouvrage :

- Professeur Georges Asch, que je remercie chaleureusement de m'avoir fait l'honneur de relire cet ouvrage, dont les critiques et suggestions m'ont été précieuses et l'écoute toujours bienveillante.
- Mes collègues Valérie Douay (ESIEE-Paris) et Laurent Baroux (ESIEE-Amiens) pour leur relecture du manuscrit, leurs remarques constructives et leur bonne humeur.
- Enfin, je tiens à remercier les laboratoires de recherche et les sociétés qui m'ont spontanément confié les illustrations de cet ouvrage :

Analog Devices <http://www.analog.com> ;

BOC Edwards <http://www.edwardsvacuum.com> ;

Cedip (dorénavant Flir) <http://www.flir.com/fr/> ;

Honeyvell <http://www.honeywell.com> ;

ifm-electronic <http://www.ifm-electronic.com> ;

KIMO <http://www.kimo.fr> ;

LEM <http://www.lem.com> ;

National Semiconductor (dorénavant Texas Instruments) <http://www.ti.com> ;

Prosensor <http://www.prosensor.com> ;

Raytek <http://www.raytek.com> ;

Sensorex <http://www.sensorex.fr> ;

TWK <http://www.twk.de> ;

Ulis <http://www.ulis-ir.com> ;

Vishay <http://www.vishay.com>.

Partie 1

Exercices

1

EXERCICE : Potentiomètre linéaire en capteur de position push-pull

Énoncé

Un capteur de déplacement rectiligne est constitué d'un potentiomètre linéaire schématisé sur la figure 1.1. On désigne par Δx la valeur du déplacement du curseur par rapport à la position milieu que l'on prend pour origine de l'axe x .

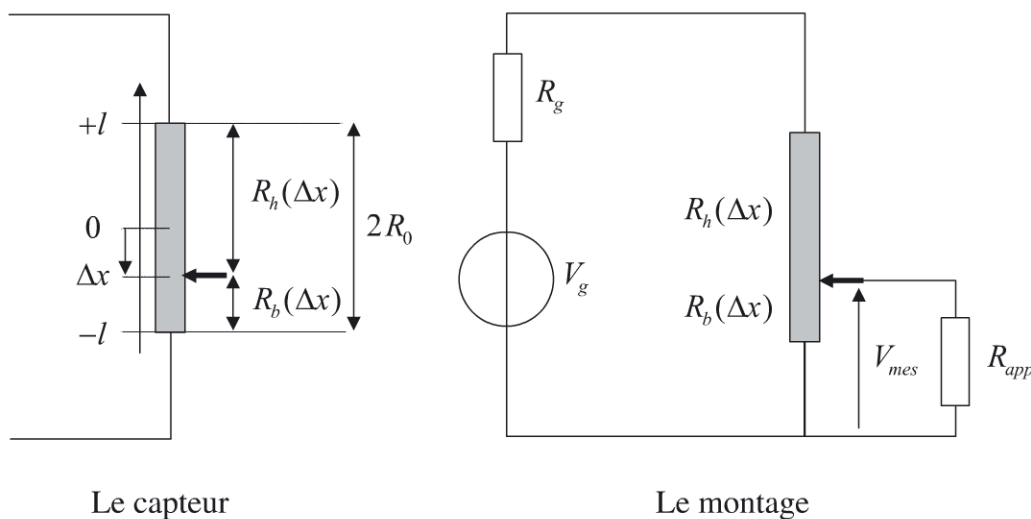


Figure 1.1- Potentiomètre linéaire en capteur push-pull

1.1 La course utile du potentiomètre est $2l = 10$ cm et sa résistance totale est $2R_0$. En déduire l'expression des résistances $R_b(\Delta x)$ et $R_h(\Delta x)$ du potentiomètre (voir figure 1.1) pour un déplacement Δx du curseur par rapport à la position milieu.

1.2 Le potentiomètre est monté suivant le schéma de la figure 1.1. La tension de mesure V_{mes} , image de la position du curseur, est mesurée par une électronique d'impédance d'entrée R_{app} . Exprimer V_{mes} en fonction de $R_b(\Delta x)$, $R_h(\Delta x)$, R_g , R_{app} et V_g .

1.3 Que devient cette expression pour $R_{app} \gg R_0$?

1.4 En déduire la sensibilité S_{mes} de la mesure.

1.5 Quelle valeur doit-on donner à R_g pour que cette sensibilité soit maximale ? Que deviennent dans ce cas V_{mes} et S_{mes} ? Calculer la sensibilité réduite S_r .

1.6 Afin d'assurer un fonctionnement correct du capteur, le constructeur a fixé une limite $v_{max} = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$ pour la vitesse de déplacement v du curseur. En admettant que le curseur a un mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = 1 \text{ cm}$ autour d'une position x_0 donnée, calculer la fréquence maximale f_{max} des déplacements que l'on peut traduire avec ce système.

Corrigé détaillé

1.1 On a directement d'après la figure 1.1 :

$$R_b(\Delta x) = R_0 + \frac{2R_0}{2l} \Delta x = R_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{l} \right) \quad (1.1)$$

$$R_h(\Delta x) = R_0 - \frac{2R_0}{2l} \Delta x = R_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{l} \right)$$

1.2 Compte tenu du montage réalisé, la tension de mesure est donnée par :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \frac{R_b(\Delta x) // R_{app}}{R_g + R_h(\Delta x) + R_b(\Delta x) // R_{app}} V_g \\ &= \frac{R_b(\Delta x) R_{app}}{R_b(\Delta x) R_{app} + (R_b(\Delta x) + R_{app})(R_g + R_h(\Delta x))} V_g \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.3 Pour $R_{app} \gg R_0$ a fortiori $R_{app} \gg R_b(\Delta x)$ et $R_{app} \gg R_h(\Delta x)$, en utilisant (1.1), (1.2) devient :

$$V_{mes} = \frac{R_b(\Delta x)}{R_g + R_h(\Delta x) + R_b(\Delta x)} V_g = \frac{R_0}{R_g + 2R_0} \left(1 + \frac{\Delta x}{l} \right) V_g$$

Sous cette approximation la mesure est linéaire.

1.4 La sensibilité de la mesure est donnée par :

$$S_{mes} = \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta x} = \frac{R_0}{R_g + 2R_0} \frac{V_g}{l}$$

1 • Potentiomètre linéaire en capteur de position push-pull

1.5 Pour que cette sensibilité soit maximale on doit avoir $R_g = 0$. Dans ce cas, on a alors :

$$V_{mes} = \left(1 + \frac{\Delta x}{l}\right) \frac{V_g}{2} \quad \text{et} \quad S_{mes} = \frac{V_g}{2l}$$

La sensibilité réduite s'en déduit immédiatement et on a :

$$S_r = \frac{1}{V_g} S_{mes} = \frac{1}{2l} = 0,1 \text{ V/cm.V}$$

1.6 Comme on a $x = x_0 + a \sin \omega t$, la vitesse de déplacement du curseur est donné par $v = \omega a \cos \omega t$, on en déduit $f_{\max} = v_{\max}/2\pi a = 3,2 \text{ Hz}$.

EXERCICE : Capteur capacitif push-pull à glissement du diélectrique

Énoncé

On considère la structure de la figure 2.1, constituée de deux condensateurs plans identiques C_1 et C_2 , de surface carrée ou rectangulaire d'aire A , entre les armatures desquels se déplace selon l'axe x un noyau diélectrique de permittivité relative ε_r .

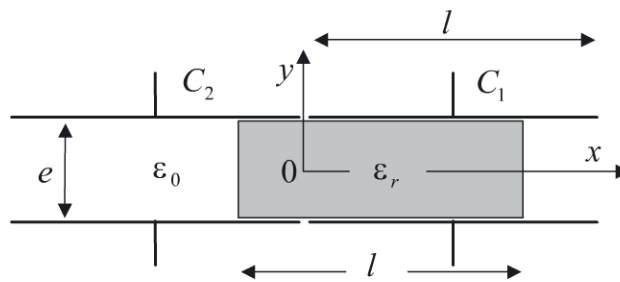


Figure 2.1- Condensateur à diélectrique glissant

2.1 Le noyau étant à sa position initiale, centré en $x = 0$, déterminer l'expression des capacités $C_1(x = 0) = C_2(x = 0)$ que l'on notera C_0 (on négligera pour cela les effets de bords et le couplage possible entre les deux condensateurs). On donne $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $\varepsilon_r = 3$, $e = 1 \text{ mm}$ et $A = 6 \text{ cm}^2$.

2.2 Le noyau est déplacé de x de sa position d'origine, déterminer les expressions de $C_1(x)$ et $C_2(x)$.

Les écrire sous la forme $C_1(x) = C_0 + \Delta C_1(x)$ et $C_2(x) = C_0 + \Delta C_2(x)$ en précisant les expressions de $\Delta C_1(x)$ et de $\Delta C_2(x)$ en fonction de C_0 , x , l et ε_r .

2.3 Les deux condensateurs sont montés dans un circuit en pont selon le schéma de la figure 2.2. Exprimer la tension différentielle de mesure V_{mes} en fonction de x , l , ε_r et V_g .

2 • Capteur capacitif push-pull à glissement du diélectrique

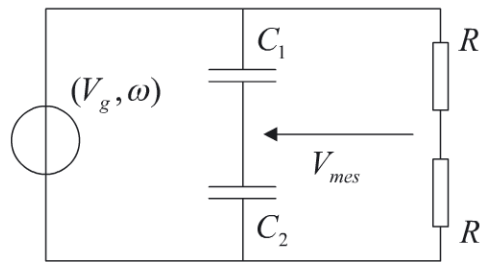


Figure 2.2 - Montage du capteur

2.4 En déduire la sensibilité S de la mesure. On donne : $l = 2$ cm et $V_g = 10$ V.

2.5 Quelles sont les valeurs de l'étendue de mesure $E.M.$ et de l'excursion de V_{mes} ?

Corrigé détaillé

2.1 Le diélectrique étant centré, chaque condensateur équivaut à la mise en parallèle de deux condensateurs plans de surface $A/2$, l'un de diélectrique de permittivité ϵ_0 , l'autre de permittivité $\epsilon_r \epsilon_0$. On a donc immédiatement :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{2e} + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{2e} = \frac{\epsilon_0 A}{2e} (1 + \epsilon_r) = 10,62 \text{ pF}$$

2.2 Si le diélectrique est déplacé d'une quantité x , on a alors :

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{\epsilon_0 A}{e} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{e} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + x \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{2e} (\epsilon_r + 1) \left[1 + \frac{2x}{l} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \right] = C_0 \left[1 + \frac{2x}{l} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \right] = C_0 + \Delta C_1(x) \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \frac{\epsilon_0 A}{e} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + x \right) + \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{e} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{2e} (\epsilon_r + 1) \left[1 - \frac{2x}{l} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \right] = C_0 \left[1 - \frac{2x}{l} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \right] = C_0 + \Delta C_2(x) \end{aligned}$$

Les deux condensateurs fonctionnent en mode push-pull puisque $\Delta C_2(x) = -\Delta C_1(x)$.

2.3 D'après la figure 2.2, il vient en notant respectivement Z_1 et Z_2 les impédances des condensateurs $C_1(x)$ et $C_2(x)$:

$$V_{mes} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{C_1(x) - C_2(x)}{C_1(x) + C_2(x)} \frac{V_g}{2} = \frac{x}{l} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) V_g$$

La mesure est linéaire puisque le signal de mesure, ici la tension V_{mes} , est proportionnelle au déplacement x .

2.4 On en déduit la sensibilité de la mesure donnée par :

$$S = \frac{V_{mes}}{x} = \frac{1}{l} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) V_g = 2,5 \text{ V/cm}$$

2.5 Au maximum $x = \pm l/2$, ce qui correspond à l'étendue de mesure :

$$E.M. = [-1 \text{ cm}, +1 \text{ cm}]$$

Il vient alors $V_{mes} \in [-2,5 \text{ V}, +2,5 \text{ V}]$.

3

EXERCICE : Étalonnage indirect – Régression linéaire[@]

Énoncé

On réalise une sonde de température à partir d'un capteur de température bas coût. Cette sonde délivre une tension $V_{mes}(t)$ fonction de la température t (exprimée en °C) à laquelle elle est soumise. Pour étalonner cette sonde, on la place dans une enceinte thermostatée dont on fait varier la température sur l'étendue de mesure $E.M. = [0\text{ °C} ; 100\text{ °C}]$. La température est mesurée à l'aide d'une sonde thermométrique Pt100 de précision. On réalise ainsi un étalonnage indirect pour lequel on considère que la température donnée par la sonde Pt100 est parfaitement exacte. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1- Étalonnage de la sonde thermique

$t\text{ °C}$	3,35	8,80	11,66	17,66	22,12	30,11	31,83	36,44	38,81	39,86
V_{mes}	26	83	120	168	215	302	328	355	390	390
$t\text{ °C}$	43,00	45,20	47,19	49,95	51,83	59,59	59,86	61,67	64,10	67,84
V_{mes}	424	443	476	500	497	583	592	594	627	660
$t\text{ °C}$	68,26	77,33	78,18	80,18	82,82	82,91	85,69	91,76	92,51	99,59
V_{mes}	671	745	759	773	790	799	823	878	884	936

3.1 Sur l'étendue de mesure $E.M.$, on cherche à modéliser le comportement de la sonde par l'approximation linéaire $V_{mes} = V_{mes0} + \alpha t$. Déterminer les expressions V_{mes0} et α obtenues à partir des N points expérimentaux $(t_i, V_{mes,i})$ donnés dans le tableau et en calculer la valeur. Pour ceci, on cherchera à minimiser l'écart quadratique moyen χ^2 entre l'approximation linéaire et les points expérimentaux. On réalise alors une régression linéaire au sens des moindres carrés.

3.2 Estimer la sensibilité $S = dV_{mes}/dt$.

[@] Les données de cet exercice sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage).

3.3 Donner l'écart de linéarité ε , plus grand écart sur l'étendue de mesure entre la caractéristique réelle et l'approximation linéaire donnée par la droite.

3.4 Calculer l'erreur de linéarité err , écart de linéarité normalisé à l'excursion de $V_{mes}(t)$ sur l'étendue de mesure $E.M.$

Corrigé détaillé

3.1 L'écart quadratique moyen entre les N points expérimentaux et l'expression linéaire approximative est donné par :

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V_{mes,i} - (V_{mes0} + \alpha t_i))^2$$

Les valeurs de V_{mes0} et α qui vont permettre d'ajuster au mieux la droite d'équation $V_{mes} = V_{mes0} + \alpha t$ aux résultats expérimentaux doivent rendre la valeur de χ^2 minimale. On doit donc avoir :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial V_{mes0}} = -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (V_{mes,i} - (V_{mes0} + \alpha t_i)) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha} = -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (V_{mes,i} - (V_{mes0} + \alpha t_i)) \cdot t_i = 0$$

Ceci peut être développé selon :

$$\sum_{i=1}^N V_{mes,i} - NV_{mes0} - \alpha \sum_{i=1}^N t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N V_{mes,i} t_i - V_{mes0} \sum_{i=1}^N t_i - \alpha \sum_{i=1}^N t_i^2 = 0$$

La résolution en α et V_{mes0} de ce système d'équations conduit à :

$$\alpha = \frac{N \sum_{i=1}^N t_i V_{mes,i} - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N V_{mes,i}}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2}$$

3 • Étalonnage indirect – Régression linéaire

$$V_{mes} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i^2 \sum_{i=1}^N V_{mes,i} - \sum_{i=1}^N t_i \sum_{i=1}^N t_i V_{mes,i}}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2}$$

En appliquant ces résultats aux données de l'étalonnage (tableau 3.1), on obtient :

$$\alpha = 9,5 \text{ mV} \cdot \text{°C}^{-1} \quad \text{et} \quad V_{mes0} = 11,4 \text{ mV}$$

La figure 3.1 présente le tracé des points expérimentaux et de la meilleure approximation linéaire (droite de régression au sens des moindres carrés).

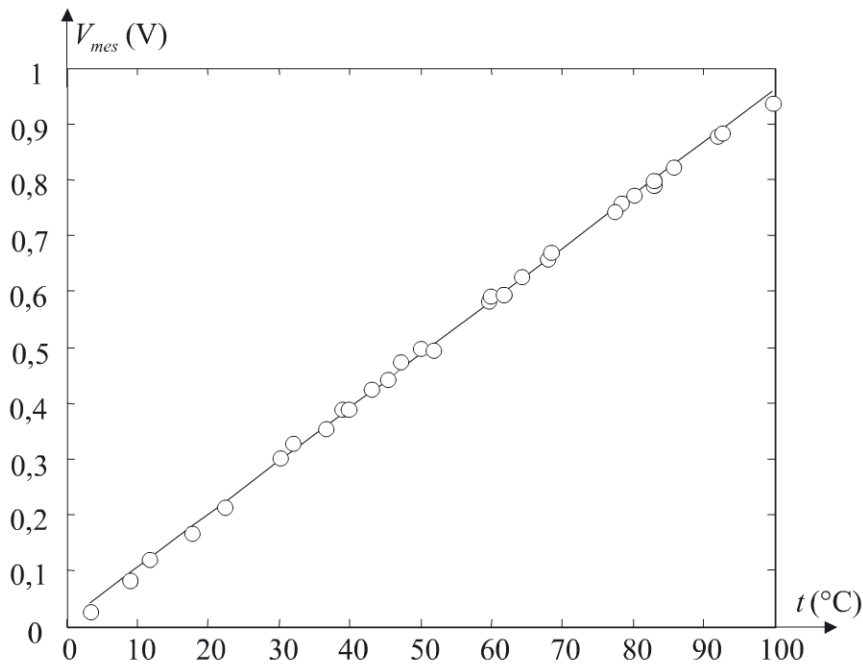


Figure 3.1- Points expérimentaux (○) et droite de régression (—)

3.2 La sensibilité S n'est rien d'autre que la pente de la droite de régression, c'est-à-dire $S = \alpha = 9,5 \text{ mV} \cdot \text{°C}^{-1}$.

3.3 L'écart de linéarité ou plus grand écart sur l'étendue de mesure entre les points expérimentaux et les valeurs calculées selon l'approximation linéaire est $\varepsilon = 21 \text{ mV}$ (pour $t = 99,59 \text{ °C}$).

3.4 L'erreur de linéarité est alors donnée par :

$$err = \varepsilon / (V_{mes}(99,59) - V_{mes}(3,35)) \simeq 2,5 \%$$

EXERCICE : Capteur de niveau capacitif

4

Énoncé

On désire réaliser un capteur de niveau pour une cuve d'huile. Soit le condensateur plan schématisé figure 4.1 dont les armatures sont de surface S et de hauteur h . Le condensateur est initialement dans l'air (permittivité ε_1). Un liquide, de l'huile de permittivité ε_2 , monte jusqu'à une hauteur x mesurée à partir du bas des armatures ; soit $C(x)$ la capacité correspondante du condensateur.

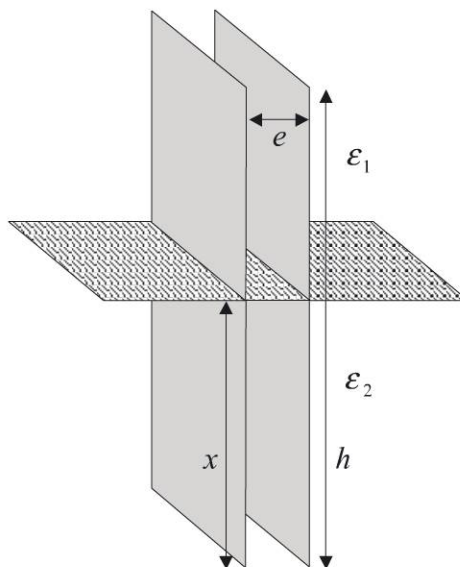


Figure 4.1 - Schéma de principe du capteur

- 4.1** Déterminer l'expression de la capacité $C(x)$.
- 4.2** Calculer les capacités minimale et maximale du capteur ainsi que les impédances correspondantes sous une alimentation sinusoïdale à 10 kHz. On donne $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $S = 2 \cdot 10^{-2}$ m², $e = 5$ mm et $h = 1$ m.
- 4.3** Le capteur est monté dans un circuit en pont selon le schéma de la figure 4.2. Le condensateur C_v est un condensateur variable dont on règle la valeur à $C_0 = C(x = 0)$.

4 • Capteur de niveau capacitif

Donner l'expression de la tension différentielle de mesure V_{mes} en fonction de x , h , ε_1 , ε_2 et V_g . On donne $V_g = 10\text{ V}$.

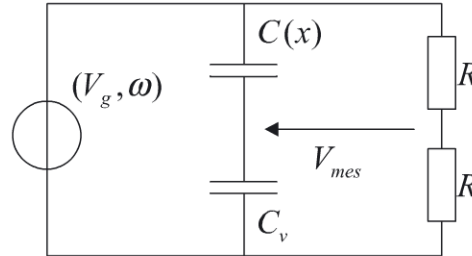


Figure 4.2 - Circuit de conditionnement du capteur

4.4 Montrer que quelle que soit la forme que l'on donne aux deux armatures, par exemple deux tubes coaxiaux ou une tige et la paroi extérieure de la cuve si elle est métallique, on obtient un résultat similaire.

4.5 Quel problème majeur peut fausser la mesure ?

Corrigé détaillé

4.1 Tout se passe comme si on était en présence de deux condensateurs plans en parallèle : un condensateur de capacité C_1 , de surface S_1 et dont le diélectrique est de permittivité ε_1 et un condensateur de capacité C_2 , de surface S_2 et dont le diélectrique est de permittivité ε_2 .

La capacité du condensateur résultant est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
 C(x) &= C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{e} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{e} = \frac{\varepsilon_1}{e} (h-x) \frac{S}{h} + \frac{\varepsilon_2}{e} x \frac{S}{h} \\
 &= \frac{\varepsilon_1 S}{e} + \frac{S}{eh} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) x = \frac{\varepsilon_1 S}{e} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right) \frac{x}{h} \right] = C_0 (1 + Kx)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

En régime permanent sinusoïdal, le capteur d'impédance $Z_c(x) = 1/jC(x)\omega$ n'est pas linéaire pour une mesure proportionnelle à son impédance, il est linéaire pour une mesure proportionnelle à son admittance.

4.2 (4.1) permet d'obtenir $C_{\min} = C(x=0) = C_0 = 35,4\text{ pF}$ et $C_{\max} = C(x=h) = 141,6\text{ pF}$. Les impédances correspondantes à une fréquence $f = 10\text{ kHz}$ sont $|Z(x=0)| = 449,6\text{ k}\Omega$ et $|Z(x=h)| = 112,4\text{ k}\Omega$.

4.3 On a $C_v = C_0 = C(x = 0)$, compte tenu de (4.1) la tension de mesure s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \left(\frac{Z_0}{Z_c + Z_0} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{C(x) - C_0}{C(x) + C_0} \frac{V_g}{2} \\ &= \frac{(1 + Kx) - 1}{(1 + Kx) + 1} \frac{V_g}{2} = \frac{Kx}{2 + Kx} \frac{V_g}{2} \\ &= Kx \frac{V_g}{4} \frac{1}{1 + \frac{Kx}{2}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) et la courbe de la figure 4.3 montrent clairement que la mesure est non-linéaire.

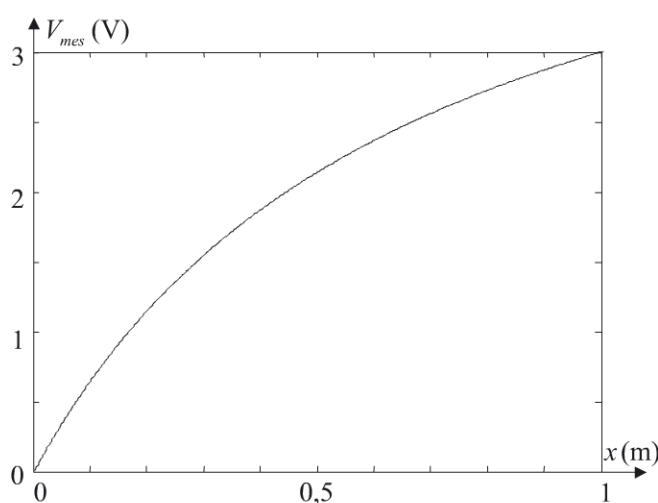


Figure 4.3 - Évolution de la tension de mesure

4.4 Quelle que soit la géométrie donnée aux armatures, on a $C_0 = ch$ où c est la capacité par unité de longueur du capteur. Si $x \neq 0$, on a :

$$C(x) = c(h - x) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} cx = ch \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right) \frac{x}{h} \right] = C_0 (1 + Kx)$$

La valeur de la capacité dépend via C_0 de la géométrie au travers de c . En revanche, une fois le pont équilibré pour $x = 0$, c'est-à-dire une fois réglé $C_v = C_0$, la tension de mesure garde la même forme.

Ce type de mesure est habituellement réalisé à l'aide de condensateurs cylindriques, ce qui réduit les perturbations par effet de bord (effets négligés dans ce qui précède).

4.5 Le phénomène le plus gênant qui peut entacher la mesure est lié à la viscosité de l'huile. Celle-ci peut former une couche résiduelle à la surface des armatures, si bien que même avec une cuve vide on peut avoir $C_v \neq C(x = 0)$ et donc $V_{mes} \neq 0$, simulant par là une cuve non vide. On peut améliorer le procédé en réglant la valeur de C_v à chaque fois que l'on est certain que la cuve est vide.

5

EXERCICE : Montage potentiométrique d'une résistance thermométrique

Énoncé

On désire mesurer la température par une résistance thermométrique de nickel dont le comportement avec la température T exprimée en $^{\circ}\text{C}$ est donné par :

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2)$$

avec $R_0 = 100 \Omega$, $A = 5,49167 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$ et $B = 6,66667 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}^2$. La résistance thermométrique est montée en série avec une résistance fixe R et le tout est alimenté par une source de tension de fem $V_g = 1 \text{ V}$ et de résistance interne $R_g = 50 \Omega$.

5.1 Donner l'expression de la tension de mesure $V_{mes}(T)$ prise aux bornes de la résistance thermométrique.

5.2 On choisit comme référence de température $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$ et on limite l'étendue de mesure à $E.M. = \pm 10^{\circ}\text{C}$. Donner l'expression de la variation $\Delta R(T)$ de la valeur de la résistance thermométrique pour une température T à partir de la référence prise pour T_0 .

5.3 En déduire la variation ΔV_{mes} correspondante.

5.4 Quelle valeur donner à R pour avoir un maximum de sensibilité (on ne considérera pour cela que la partie linéaire $\Delta V_{mes,lin}$ de l'expression ΔV_{mes} ?

5.5 Donner dans ce cas l'expression de la sensibilité en fonction de A , B et T .

5.6 Que devient cette sensibilité dans le cas d'une approximation linéaire du fonctionnement ?

Corrigé détaillé

5.1 La tension de mesure s'écrit simplement :

$$V_{mes}(T) = \frac{R(T)}{R_g + R + R(T)} V_g \quad (5.1)$$

5.2 Avec $R(T = 0) = R_0$ et $R(T) = R_0(1 + AT + BT^2) = R_0 + \Delta R$, il vient pour la variation de la résistance du capteur $\Delta R = R_0(AT + BT^2)$.

5.3 En utilisant (5.1), il vient :

$$\begin{aligned} \Delta V_{mes} &= V_{mes}(T) - V_{mes}(0) = \left(\frac{R_0 + \Delta R}{R_g + R + R_0 + \Delta R} - \frac{R_0}{R_g + R + R_0} \right) V_g \\ &= \frac{(R_g + R)\Delta R}{(R_g + R + R_0)^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_g + R + R_0} \right)} V_g \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.4 L'approximation linéaire de la variation de la tension de mesure est obtenue en prenant le développement à l'ordre 1 de (5.2) :

$$\Delta V_{mes,lin} = \frac{(R_g + R)\Delta R}{(R_g + R + R_0)^2} V_g$$

À ΔR donné, il convient de rendre $\Delta V_{mes,lin}$ maximum. Pour cela on annule la dérivée de $\Delta V_{mes,lin}$ par rapport à $R_g + R$, soit :

$$\frac{d\Delta V_{mes,lin}}{d(R_g + R)} = V_g \frac{R_0 - (R_g + R)}{(R_g + R + R_0)^3} \Delta R = 0 \quad (5.3)$$

(5.3) conduit à choisir $R = R_0 - R_g = 50 \Omega$.

5.5 Compte tenu de ce choix, la variation de la tension de mesure s'écrit maintenant :

$$\Delta V_{mes} = \frac{\Delta R}{4R_0 \left(1 + \frac{\Delta R}{2R_0} \right)} V_g = \frac{\left(1 + \frac{BT}{A} \right)}{\left(1 + \frac{AT + BT^2}{2} \right)} \frac{AV_g}{4} T$$

5 • Montage potentiométrique d'une résistance thermométrique

Pour la sensibilité, il vient :

$$S = \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta T} = \frac{\Delta V_{mes}}{T} = \frac{\left(1 + \frac{BT}{A}\right) AV_g}{\left(1 + \frac{AT + BT^2}{2}\right) 4} \quad (5.4)$$

5.6 Sous l'approximation linéaire (développement à l'ordre 0 de (5.4)), la sensibilité devient constante et est donnée par :

$$S = \frac{AV_g}{4} = 1,373 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$

EXERCICE : Erreur de finesse d'un oscilloscope

Énoncé

On mesure la tension aux bornes de la bobine d'un circuit RLC série. Le circuit est alimenté en sinusoïdal à la fréquence de résonance. L'appareil de mesure est un oscilloscope dont l'impédance d'entrée est modélisée par une résistance R_c en parallèle avec un condensateur C_c .

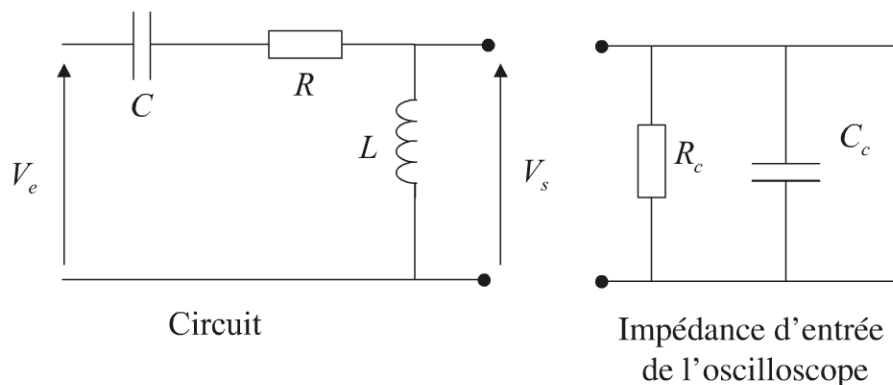


Figure 6.1- Le circuit et l'impédance d'entrée de l'oscilloscope

6.1 Calculer, en fonction de V_e , l'amplitude complexe V_s de la tension de sortie en l'absence de l'oscilloscope. On donne $R = 100 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 100 \text{ pF}$, $R_c = 1 \text{ M}\Omega$ et $C_c = 2 \text{ pF}$.

6.2 Calculer V_{mes} , amplitude de la tension de sortie en présence de l'oscilloscope. Pour cela on utilisera le théorème de Thévenin et on calculera de façon explicite la force électromotrice V_{Th} du générateur équivalent de Thévenin et son impédance interne Z_{Th} .

6.3 Calculer l'erreur de finesse de la mesure $(V_s - V_{mes})/V_s$, puis son module.

Corrigé détaillé

6.1 D'après la figure 6.1, on a :

$$V_s = \frac{jL\omega}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} V_e$$

Le circuit étant alimenté en sinusoïdal à la pulsation de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ soit 10^6 rd.s^{-1} , la tension de sortie est alors donnée par :

$$V_s = \frac{jL\omega_0}{R} V_e = j10^2 V_e$$

6.2 On détermine les caractéristiques de générateur équivalent de Thévenin selon la méthode classique. L'impédance équivalente de Thévenin Z_{Th} est l'impédance vue des bornes de sortie lorsque le générateur alimentant le circuit est éteint, c'est-à-dire ici lorsque $V_e = 0$. On a :

$$Z_{Th} = Z_L // (Z_C + R) = \frac{jL\omega_0 \left(R + \frac{1}{jC\omega_0} \right)}{jL\omega_0 + R + \frac{1}{jC\omega_0}} = \frac{L}{RC} (1 + jRC\omega_0) = 10^6 + j10^4$$

La force électromotrice V_{Th} du générateur équivalent de Thévenin n'est ici rien d'autre que V_s .

L'impédance d'entrée Z_c de l'oscilloscope est donnée par :

$$Z_c = R_c // Z_{C_c} = \frac{R_c \frac{1}{jC_c\omega_0}}{R_c + \frac{1}{jC_c\omega_0}} = \frac{R_c}{1 + jR_c C_c \omega_0} = \frac{10^6}{1 + 2j} = \frac{10^6}{5} (1 - 2j)$$

Le circuit connecté à l'oscilloscope est donc équivalent au circuit représenté figure 6.2 où V_{mes} est la tension mesurée aux bornes de la bobine (V_s en l'absence de l'oscilloscope).

Il vient :

$$V_{mes} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_{Th}} V_{Th} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_{Th}} V_s$$

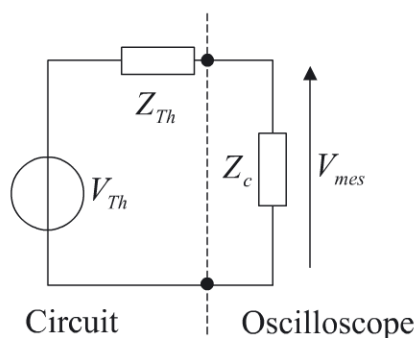


Figure 6.2 - L'oscilloscope connecté au circuit

6.3 L'erreur de finesse est alors donnée par :

$$\frac{V_s - V_{mes}}{V_s} = \frac{Z_{Th}}{Z_c + Z_{Th}} = \frac{1,1961 + 0,4020j}{1,5921}$$

$|(V_{mes} - V_s)/V_s| \approx 0,79$, ce qui constitue une erreur très importante. L'appareil de mesure, c'est-à-dire l'oscilloscope, n'est pas adapté au type de mesure à réaliser. Cependant, comme l'erreur est parfaitement déterminée par la donnée des deux impédances Z_c et Z_{Th} , cette erreur peut être facilement corrigée.

7

EXERCICE : Capteur du second ordre

Énoncé

Soit un capteur d'accélération capacitif dont les caractéristiques métrologiques sont indiquées dans le tableau 7.1.

Tableau 7.1- Caractéristiques principales du capteur

	Min	Typ	Max	Unités
Étendue de mesure	±2	±3		g
Erreur de linéarité		0,2		% de <i>E.M.</i>
Sensibilité	225	250	275	mV /g
Fréquence de coupure à +3 dB	10	12		kHz
Fréquence de résonance	13	18		kHz

7.1 Déterminer la fréquence propre f_0 typique du capteur ainsi que son facteur d'amortissement ξ .

7.2 On désire réaliser un inclinomètre à partir de cet accéléromètre, c'est-à-dire mesurer l'angle entre le bâti de l'inclinomètre et l'horizontale (voir figure 7.1). L'accéléromètre mesure la composante de l'accélération de la pesanteur selon l'axe Oz (axe de sensibilité de l'accéléromètre) et une unité de conditionnement du signal en extrait la valeur de l'angle d'inclinaison α .

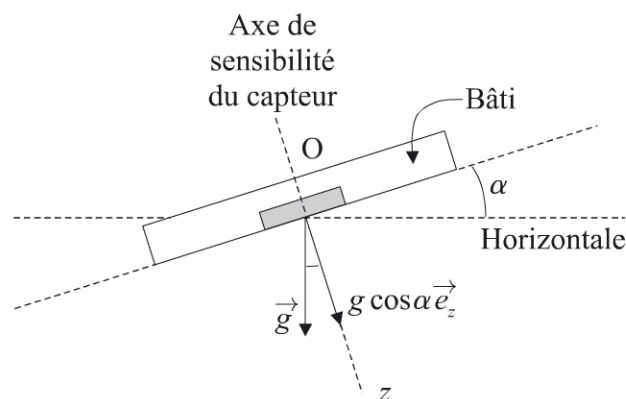


Figure 7.1- Schéma de principe de l'inclinomètre

On suppose que la variation maximale du mesurande correspond au passage de la position verticale (0 g mesuré) à la position horizontale (+1 g mesuré).

Déterminer graphiquement la durée d'attente τ nécessaire avant d'effectuer une nouvelle mesure de l'inclinaison après un changement de celle-ci pour que l'erreur reste inférieure à 1 %.

Corrigé détaillé

7.1 Soient $a(t)$ le mesurande, c'est-à-dire ici l'accélération, et $V(t)$ le signal de sortie du capteur, ici la tension délivrée par le capteur.

Le capteur est un dispositif du second ordre puisqu'il y a résonance. L'équation différentielle liant $a(t)$ et $V(t)$ s'écrit :

$$A \frac{d^2 V(t)}{dt^2} + B \frac{dV(t)}{dt} + CV(t) = a(t) \quad (7.1)$$

En régime forcé sinusoïdal, avec $a(t) = a \exp(j2\pi ft)$, le signal de sortie s'écrit :

$$V(t) = V \exp(j2\pi ft + \varphi)$$

Reporté dans (7.1), ceci conduit en notation complexe à :

$$-A(2\pi f)^2 V e^{j\varphi} + jB2\pi f V e^{j\varphi} + CV e^{j\varphi} = a$$

En posant $f_0 = \sqrt{C/4\pi^2 A}$ fréquence propre du capteur et $\xi = B/2\sqrt{AC}$ coefficient d'amortissement, il vient pour la sensibilité $S(f)$ et le déphasage $\varphi(f)$ du capteur :

$$S(f) = \frac{V}{a} = \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \quad (7.2)$$

$$\varphi(f) = -\arctan\left(\frac{2\xi}{\frac{f_0}{f} \left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)}\right)$$

En faisant tendre f vers 0 dans l'expression de la sensibilité, on remarque que $1/C$ n'est rien d'autre que la sensibilité en régime statique $S(0)$.

7 • Capteur du second ordre

L'étude de la sensibilité montre que pour $\xi \leq 1/\sqrt{2}$, celle-ci passe par un maximum : il y a résonance. La fréquence de résonance f_r est obtenue en cherchant le maximum de l'expression sous la racine de (7.2), soit pour :

$$\left(\frac{f_r}{f_0}\right)^2 = 1 - 2\xi^2 \quad (7.3)$$

La fréquence de coupure à +3 dB est obtenue en résolvant $S(f) = S(0) \cdot \sqrt{2}$, ce qui conduit à :

$$\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 - \frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

La solution avec le signe $-$ correspond à la fréquence de coupure f_{cb} à +3 dB à la montée dans le pic de résonance et la solution avec le signe $+$ correspond à la fréquence de coupure notée f_{ch} à +3 dB à la descente du pic de résonance. Seul f_{cb} est ici une donnée du problème.

À partir de (7.3) et (7.4), il vient :

$$f_0^4 = 2f_{cb}^2(2f_r^2 - f_{cb}^2) \quad \text{et} \quad \xi^2 = \frac{(f_0^2 - f_r^2)}{2f_0^2} \quad (7.5)$$

À partir des données du tableau 7.1, $f_{cb} = 12$ kHz et $f_r = 18$ kHz, (7.5) permet d'obtenir $f_0 = 19,5$ kHz et $\xi = 0,27$.

La fréquence de coupure haute est alors $f_{ch} = 22,5$ kHz et la fréquence de coupure à -3 dB, se calculant classiquement en résolvant $S(f) = S(0)/\sqrt{2}$, est $f_c = 28,7$ kHz. La courbe de la figure 7.2 récapitule ces résultats.

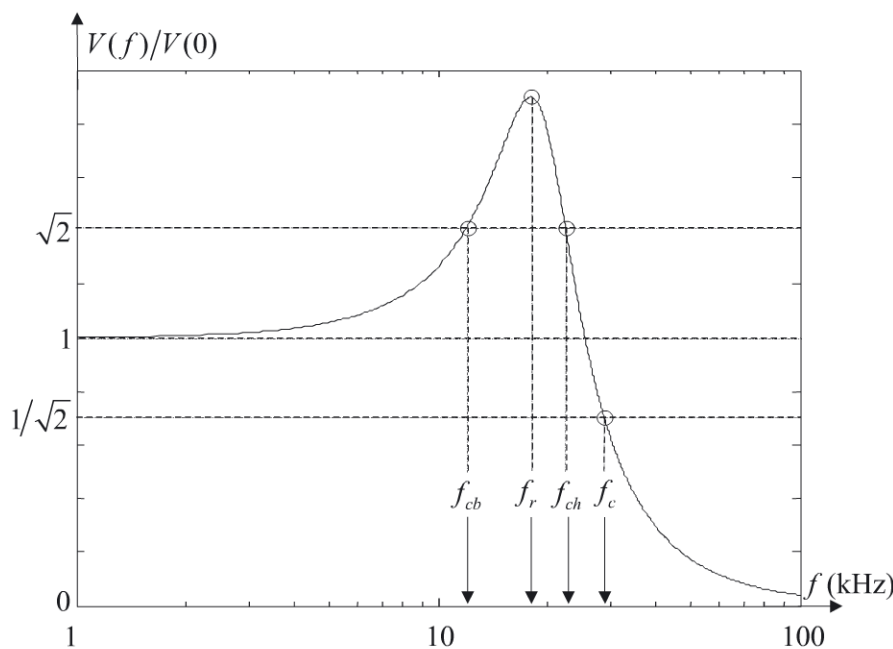


Figure 7.2 - Courbe de réponse en fréquence du capteur

7.2 Dans le domaine de Laplace (7.1) devient :

$$A p^2 V(p) + B p V(p) + C V(p) = a(p).$$

Au maximum le capteur subit un échelon d'accélération d'amplitude $+1 g$, d'où $a(p) = a_0/p$ avec $a_0 = 1 g$. On a alors :

$$V(p) = \frac{1}{A p^2 + B p + C} \frac{a_0}{p} = \frac{a_0}{C} \frac{1}{\left(\frac{A}{C} p^2 + \frac{B}{C} p + 1\right) p} \quad (7.6)$$

En introduisant la pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0$ et de nouveau le facteur d'amortissement ξ , il vient :

$$V(p) = \frac{a_0 \omega_0^2}{C} \frac{1}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (7.7)$$

Ici $\xi \leq 1/\sqrt{2}$, si bien qu'en remontant à l'original $V(t)$ et en posant $V_0 = a_0/C$ soit 250 mV, on obtient :

$$V(t) = V_0 \left(1 - \frac{\exp(-\xi\omega_0 t)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t + \arcsin \sqrt{1-\xi^2}\right) \right) \quad (7.8)$$

Les courbes de la figure 7.3 présentent l'évolution de $V(t)/V_0$ à des échelles de temps différentes.

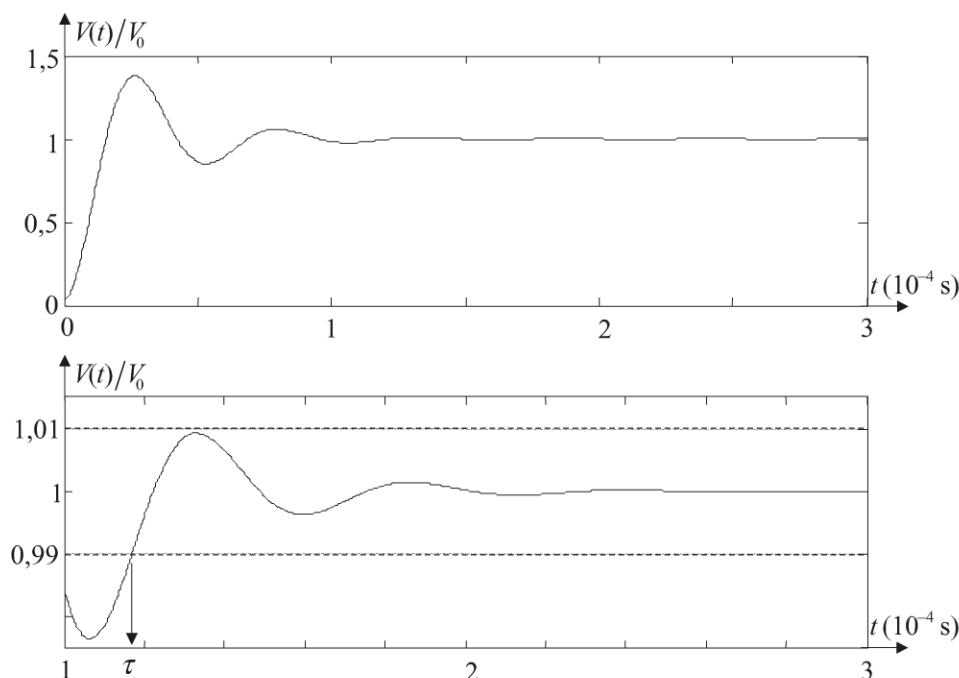


Figure 7.3 - Réponse du capteur à un échelon

La réponse du capteur est pseudo-périodique. Graphiquement on détermine que passé une durée $\tau \approx 0,12 \text{ ms}$ après l'application de l'échelon, le signal de sortie du capteur reste, à 1 % près, autour de sa valeur finale.

8

EXERCICE :

Capteur à condensateur d'épaisseur variable

Énoncé

Soit un capteur de déplacement (représenté figure 8.1) constitué par un condensateur plan dont l'épaisseur x varie de Δx autour de son épaisseur au repos $e = 1 \text{ mm}$. La surface des armatures de ce condensateur est S . On suppose que le milieu dans lequel se trouve le capteur est l'air assimilé au vide de permittivité électrique ϵ_0 .

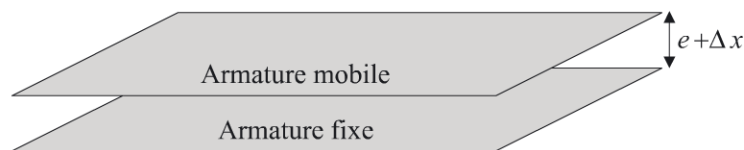


Figure 8.1 - Schéma de principe du capteur

8.1 Donner l'expression de $Z_c(x)$ en régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω .

8.2 Le capteur est monté en série avec un condensateur réglable, d'impédance Z , dont la valeur sera fixée à celle du capteur au repos, c'est-à-dire pour $\Delta x = 0$. Le dipôle ainsi constitué est alimenté à la pulsation ω , par un générateur de tension de fem sinusoïdale d'amplitude V_g et d'impédance interne nulle.

Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} prise aux bornes de $Z_c(x)$ en fonction de Δx , e et V_g .

8.3 En considérant un fonctionnement en petits signaux tel que $\Delta x \ll e$, donner l'approximation linéaire $V_{mes,lin}$ de V_{mes} . Donner l'expression de $\Delta V_{mes,lin}$, variation de la tension de mesure par rapport à sa valeur au repos.

8.4 Quelle est la sensibilité réduite S_r de la mesure ?

8.5 Conclure quant au dimensionnement du capteur pour avoir une bonne sensibilité et en déduire le domaine d'application de ce type de capteur de déplacement.

8.6 On alimente le capteur par une source de courant parfaite, sinusoïdale, d'amplitude I_g et de pulsation ω . Donner les expressions de la tension de mesure V_{mes} prise aux bornes du capteur et de sa variation ΔV_{mes} par rapport à sa valeur à la position de repos.

8.7 On utilise maintenant le même principe de capteur mais en fonctionnement push-pull comme schématisé figure 8.2.

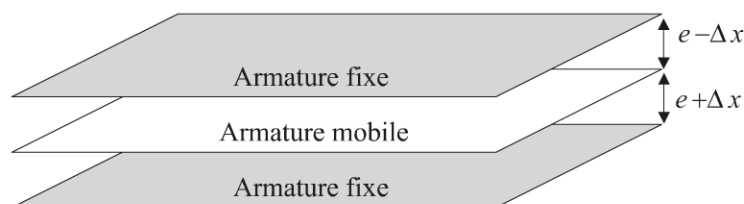


Figure 8.2 - Principe du capteur en mode push-pull

L'ensemble est alimenté à la pulsation ω , par une source de tension sinusoïdale d'amplitude V_g et d'impédance interne nulle. Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} prise aux bornes de $Z_c(x)$, puis de sa variation ΔV_{mes} . Quelle est la sensibilité réduite S_r de la mesure ?

Corrigé détaillé

8.1 Le condensateur étant plan et alimenté en régime sinusoïdal, on a $Z_c(x) = 1/jC(x)\omega$ avec $C(x) = \epsilon_0 S/x = \epsilon_0 S/(e + \Delta x)$ soit $Z_c(x) = (e + \Delta x)/j\epsilon_0 S \omega$. L'impédance $Z_c(x)$ est donc une fonction linéaire de Δx .

8.2 Comme $Z = Z_{c0} = Z_c(x = 0) = e/j\epsilon_0 S \omega$, on a pour la tension de mesure :

$$V_{mes} = \frac{Z_c(x)}{Z + Z_c(x)} V_g = \frac{e + \Delta x}{2e + \Delta x} V_g \quad (8.1)$$

La présence de terme en Δx au dénominateur entraîne que la mesure n'est pas linéaire en fonction de Δx .

8.3 L'approximation linéaire de V_{mes} est donnée par le développement limité de (8.1) au premier ordre en $\Delta x/e$, soit :

$$V_{mes} = \frac{e(1 + \Delta x/e)}{2e(1 + \Delta x/2e)} V_g \approx (1 + \Delta x/e)(1 - \Delta x/2e) \frac{V_g}{2} \approx \left(1 + \frac{\Delta x}{2e}\right) \frac{V_g}{2} = V_{mes,lin}$$

8 • Capteur à condensateur d'épaisseur variable

On en déduit la variation de V_{mes} par rapport à sa valeur à la position de repos :

$$\Delta V_{mes,lin} = \frac{\Delta x}{4e} V_g$$

8.4 Pour $\Delta x = 0$ on a $V_{mes}(\Delta x = 0) = V_{mes,lin}(\Delta x = 0) = V_0 = V_g/2$. La sensibilité réduite de la mesure est donc :

$$S_r = \frac{1}{V_g} \frac{V_{mes,lin} - V_0}{\Delta x} = \frac{1}{V_g} \frac{\Delta V_{mes,lin}}{\Delta x} = \frac{1}{4e} = 250 \text{ mV/mm.V} \quad (8.2)$$

8.5 Pour obtenir une bonne sensibilité, il est nécessaire que e soit petit, ce qui limite l'excursion Δx (risque de court-circuit entre les deux armatures du condensateur). L'utilisation de ce type de capteur est donc limitée aux mesures de faibles déplacements.

8.6 Si l'alimentation se fait par une source de courant, la tension de mesure devient :

$$V_{mes} = Z_c(x) I_g = \frac{(e + \Delta x)}{j\epsilon_0 S \omega} I_g$$

La variation de la tension de mesure par rapport à sa valeur pour $\Delta x = 0$, c'est-à-dire $V_0 = e I_g / j\epsilon_0 S \omega$, s'écrit :

$$\Delta V_{mes} = \frac{\Delta x}{j\epsilon_0 S \omega} I_g$$

La tension de mesure est une fonction linéaire du déplacement.

8.7 La tension de mesure est maintenant donnée par :

$$V_{mes} = \frac{Z_c(e + \Delta x)}{Z_c(e - \Delta x) + Z_c(e + \Delta x)} V_g = \frac{e + \Delta x}{2e} V_g$$

Par rapport à la tension de mesure à la position de repos $\Delta x = 0$ donnée par $V_g/2$, la variation de la tension de mesure est :

$$\Delta V_{mes} = \frac{\Delta x}{2e} V_g$$

La sensibilité réduite s'écrit alors :

$$S_r = \frac{1}{V_g} \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta x} = \frac{1}{2e} = 500 \text{ mV/mm.V}$$

Le fonctionnement est parfaitement linéaire et la sensibilité est doublée par rapport au cas du montage à un seul condensateur (voir (8.2)).

EXERCICE : Influence de la résistance transversale des jauges d'extensométrie

Énoncé

I. Étude d'un brin d'une jauge d'extensométrie

On considère un fil cylindrique, rectiligne, de longueur l , de section $s = 10^{-2} \text{ mm}^2$, de résistance r égale au repos à $R = 10 \text{ } \Omega$, dont le matériau est de module d'Young $E = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

Ce fil est placé dans un pont de Wheatstone alimenté par une source de courant parfaite, $I_g = 10 \text{ mA}$ (voir figure 9.1).

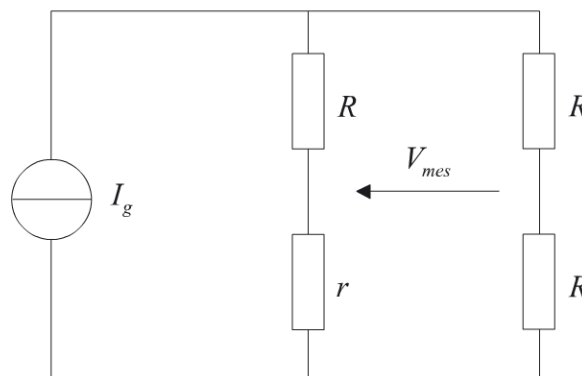


Figure 9.1 - Circuit de conditionnement

À l'équilibre mécanique, le fil n'étant soumis à aucune contrainte, les quatre résistances du pont sont égales et le pont est équilibré.

9.1 On soumet le fil à une force de traction $F = 4 \text{ N}$ dans le sens de sa longueur. Déterminer la contrainte appliquée σ .

9.2 Sachant que la limite élastique du matériau utilisé est $\sigma_l = 2 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$, vérifier que la contrainte subie par le fil demeure dans le domaine élastique.

9.3 Calculer la variation relative Δ/l de la longueur du fil.

9 • Influence de la résistance transversale des jauges d'extensométrie

9.4 Établir l'expression de la tension de mesure différentielle du pont, V_{mes} , en fonction de I_g , R et r , nouvelle valeur de la résistance du fil.

9.5 Sachant que cette tension de déséquilibre du pont est de 0,13 mV lorsqu'on applique la force de traction F au fil, calculer la variation relative $\Delta R/R$ de la résistance de ce dernier.

9.6 En déduire le coefficient de jauge K du fil.

II. Réalisation de la jauge

On réalise une jauge d'extensométrie (voir schéma figure 9.2) avec du fil du type précédent et on se propose de calculer son coefficient de jauge K_j en fonction du coefficient de jauge K du brin étudié précédemment.

La jauge est constituée de n brins longitudinaux de longueur l et de brins transversaux de longueur totale a .

9.7 En l'absence de contrainte donner les expressions de la résistance longitudinale R_l (celle des brins longitudinaux), la résistance transversale R_t (celle des brins transversaux) et la résistance totale R_j .

9.8 La jauge est parfaitement collée sur une barre cylindrique parallèlement à l'axe de celle-ci (voir figure 9.3). La barre, constituant le corps d'épreuve, est de longueur au repos L , de module d'Young E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 . Elle est soumise selon son axe à une contrainte σ_0 inférieure à la limite élastique.

Calculer en fonction de K , n , a , l , σ_0 , E_0 et ν_0 , la variation relative de R_l , la variation relative de R_t et en déduire la variation relative de R_j .

9.9 Établir l'expression du coefficient de jauge $K_j = (\Delta R_j/R_j)/(\Delta L/L)$ de la jauge en fonction de K , n , a , l , et ν_0 .

9.10 On pose $\alpha = R_t/R_l$. Donner l'expression approchée de K_j dans le cas où α est petit.

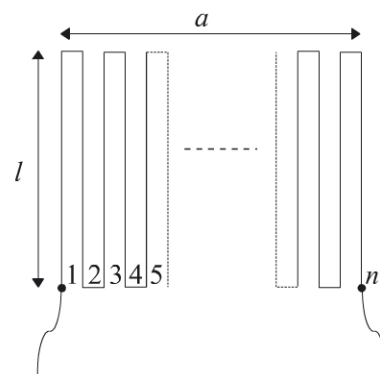


Figure 9.2 - Jauge d'extensométrie

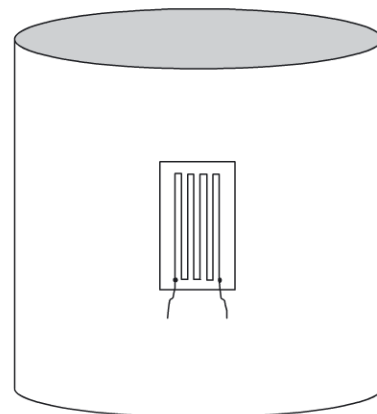


Figure 9.3 - Le corps d'épreuve équipé de la jauge

9.11 La jauge est utilisée sur deux supports métalliques différents : un acier de coefficient de Poisson $\nu_1 = 0,28$ et un alliage d'aluminium de coefficient de Poisson $\nu_2 = 0,35$; les facteurs de jauge étant respectivement K_{j1} et K_{j2} .

Calculer l'écart relatif $\delta K/K = |K_{j1} - K_{j2}|/K$ sur le coefficient de jauge.

9.12 Déterminer les valeurs maximales de α compatibles avec un écart relatif $\delta K/K < 10^{-2}$ puis $\delta K/K < 10^{-3}$.

9.13 Comment réduire pratiquement le rapport $\alpha = R_t/R_l$?

Les conditions de la question précédente sont-elles rédhibitoires compte tenu du fil utilisé ? On étudiera, par exemple, la possibilité de réaliser une jauge carrée de 3 mm de côté.

Corrigé détaillé

I. Étude d'un brin d'une jauge d'extensométrie

9.1 La contrainte appliquée se calcule immédiatement comme le rapport de la force à la section, $\sigma = 4 \cdot 10^8 \text{ N.m}^{-2}$.

9.2 Ce résultat reste inférieur à la limite élastique $\sigma_l = 2 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$, on reste donc bien dans le domaine élastique.

9.3 La variation relative de la longueur du fil est donnée par la loi de Hooke :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = 2,5 \cdot 10^{-3} \quad (9.1)$$

9.4 Le pont étant alimenté en courant, la tension différentielle de mesure est donnée par :

$$V_{mes} = \frac{r - R}{r + R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2R(r + R)}{r + 3R} I_g = \frac{r - R}{r + 3R} R I_g \quad (9.2)$$

9.5 En l'absence de contrainte la résistance du fil est R . Sous contrainte, on note cette résistance $r = R + \Delta R$. On a en inversant (9.2) :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{4V_{mes}}{R I_g - V_{mes}} = 5,2 \cdot 10^{-3} \quad (9.3)$$

9 • Influence de la résistance transversale des jauges d'extensométrie

9.6 On en déduit, d'après (9.1), (9.3) et à partir de la loi de comportement de la jauge d'extensométrie, à savoir $\Delta R/R = K\Delta l/l$, que $K = 2,083$ ce qui est cohérent puisque le fil constitue une jauge d'extensométrie métallique pour laquelle on a $K \approx 2$.

II. Réalisation de la jauge

9.7 Au repos, comme il y a n brins longitudinaux en série de résistance individuelle R , la résistance totale des brins longitudinaux est donc $R_l = nR$.

La longueur totale des brins transversaux étant a , le fil étant au repos de résistance par unité de longueur R/l , la résistance totale des brins transversaux est $R_t = aR/l$.

La résistance totale de la jauge au repos est donc donnée par $R_j = (n + a/l)R$.

9.8 Sous l'action de la contrainte axiale σ_0 , le cylindre se déforme. Restant en-dessous de la limite élastique, les déformations sont données par la loi de Hooke.

Selon la direction parallèle à la contrainte, la déformation est $\Delta L/L = \sigma_0/E_0$.

Le périmètre p de la barre se déforme comme son rayon ρ , donc selon une direction perpendiculaire à la contrainte et on a $\Delta p/p = \Delta \rho/\rho = -\nu_0 \sigma_0/E_0 = -\nu_0 \Delta L/L$.

Comme le collage est parfait, les brins longitudinaux de la jauge sont amenés à suivre la déformation longitudinale du cylindre. Le fil de la jauge étant de facteur de jauge K , on a :

$$\frac{\Delta R_l}{R_l} = K \frac{\Delta(nl)}{(nl)} = K \frac{\Delta l}{l} = K \frac{\Delta L}{L} \quad (9.4)$$

Les brins transversaux sont amenés à suivre la déformation du périmètre de la barre, d'où :

$$\frac{\Delta R_t}{R_t} = K \frac{\Delta a}{a} = -K\nu_0 \frac{\Delta L}{L} \quad (9.5)$$

(9.4) et (9.5) conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R_j}{R_j} &= \frac{\Delta R_l + \Delta R_t}{R_l + R_t} = \frac{R_l}{R_l + R_t} \frac{\Delta R_l}{R_l} + \frac{R_t}{R_l + R_t} \frac{\Delta R_t}{R_t} \\ &= \frac{nR}{\left(n + \frac{a}{l}\right)R} \cdot K \frac{\Delta L}{L} - \frac{aR/l}{\left(n + \frac{a}{l}\right)R} \cdot K\nu_0 \frac{\Delta L}{L} \\ &= \left(\frac{n - \nu_0 \frac{a}{l}}{n + \frac{a}{l}} \right) K \frac{\Delta L}{L} \end{aligned} \quad (9.6)$$

9.9 Le facteur de jauge K_j se déduit immédiatement de (9.6) et il vient :

$$K_j = \left(\frac{\Delta R_j}{R_j} \right) / \left(\frac{\Delta L}{L} \right) = K \left(\frac{n - \nu_0 \frac{a}{l}}{n + \frac{a}{l}} \right) \quad (9.7)$$

9.10 Avec $\alpha = R_i/R_l = a/nl$ petit, au premier ordre en α , (9.7) devient :

$$K_j = K \left(\frac{n - \nu_0 \frac{a}{l}}{n + \frac{a}{l}} \right) = K \left(\frac{1 - \nu_0 \alpha}{1 + \alpha} \right) \simeq K (1 - (1 + \nu_0) \alpha) \quad (9.8)$$

La résistance des brins transversaux a pour effet de réduire le facteur de jauge. En effet idéalement (avec $a = 0$), selon (9.8), on a $K_j = K$.

9.11 Le calcul de $\delta K/K$ est immédiat. À partir de l'expression approchée de K_j donnée par (9.8), on obtient :

$$\frac{\delta K}{K} = \frac{|K_{j1} - K_{j2}|}{K} \simeq \alpha(\nu_2 - \nu_1) = \frac{a}{nl}(\nu_2 - \nu_1)$$

9.12 Pour $\delta K/K < 10^{-2}$, on doit avoir $\alpha = a/nl < 1/7$ et pour $\delta K/K < 10^{-3}$, $\alpha = a/nl < 1/70$.

9.13 Pour réduire le rapport $\alpha = R_i/R_l$ et donc l'erreur qui s'introduit sur le facteur de jauge lorsqu'on colle la jauge sur des matériaux de coefficients de Poisson différents, il suffit que la longueur l des brins de la jauge soit grande et que leur nombre n soit le plus important possible pour une largeur de la jauge a donnée. Ce faisant la jauge est moins ponctuelle et fournit une valeur moyenne, sur sa surface, de la contrainte subie.

Le fil utilisé est de section $s = 10^{-2} \text{ mm}^2$, soit de diamètre 0,11 mm.

Pour $\delta K/K < 10^{-2}$, on doit avoir $\alpha < 1/7$ ce qui est facilement réalisable. Prenons, par exemple, une jauge carrée de 3 mm de côté, il faut alors avoir $n > 7$. Chaque brin étant de diamètre 0,11 mm, 7 brins occupent une largeur de 0,77 mm ce qui reste inférieur aux 3 mm de largeur de la jauge.

En revanche, pour $\delta K/K < 10^{-3}$ et toujours pour une jauge carrée de 3 mm de côté, on devrait avoir au minimum 70 brins ce qui occuperait une largeur de 7,7 mm soit plus que les 3 mm de largeur de la jauge. C'est donc impossible avec un tel fil.

10

EXERCICE : Capteur inductif à réluctance variable

Énoncé

I. Étude du capteur

Soit le circuit magnétique de la figure 10.1.

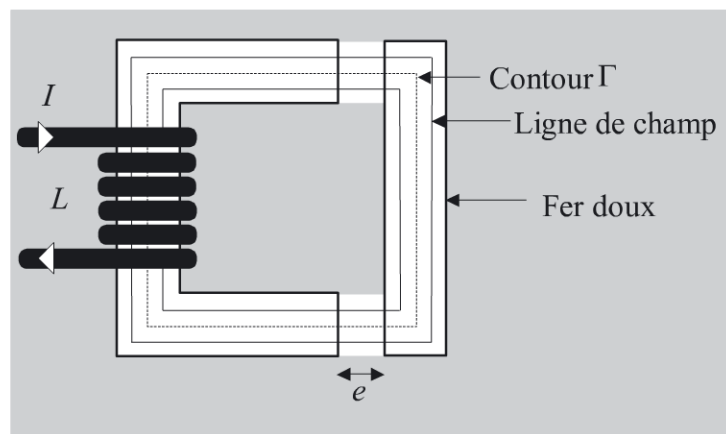


Figure 10.1- Schéma de principe du capteur

Le corps du circuit magnétique est réalisé en fer doux feuilleté. On suppose que les lignes de champ sont parfaitement guidées par le circuit magnétique et que l'entrefer e est suffisamment petit (on néglige les lignes de champ pouvant fuir dans la région symbolisée en gris sur la figure 10.1).

10.1 Donner l'expression de la circulation du champ magnétique \vec{H} sur la fibre moyenne, contour moyen Γ , sachant que la bobine possède N spires et que l'intensité du courant la parcourant est I .

10.2 Sachant que l'induction magnétique \vec{B} est à flux conservatif, que la section S du circuit magnétique est supposée constante, donner les relations liant l'induction magnétique \vec{B} aux champs dans l'air, \vec{H}_{air} , et dans le fer doux, \vec{H}_{fer} . On notera μ_0 la perméabilité magnétique de l'air (assimilé au vide) et $\mu = \mu_r \mu_0$ celle du fer doux.

10.3 Donner l'expression du flux d'induction magnétique au travers de la bobine, puis l'exprimer en fonction de l'inductance propre L de la bobine.

10.4 En appelant l la longueur du contour Γ dans le fer doux, donner l'expression de l'inductance L .

10.5 Si on alimente la bobine par un courant sinusoïdal de pulsation ω , quelle est l'expression de son impédance $Z(e)$? Que conclure quant au capteur de position ainsi réalisé (e pouvant varier)?

II. Montage push-pull

10.6 Deux capteurs du même type que le précédent sont montés en push-pull comme le schématisent les figures 10.2 et 10.3. En position de repos, les distances des pièces en U à la pièce mobile sont égales à e_0 .

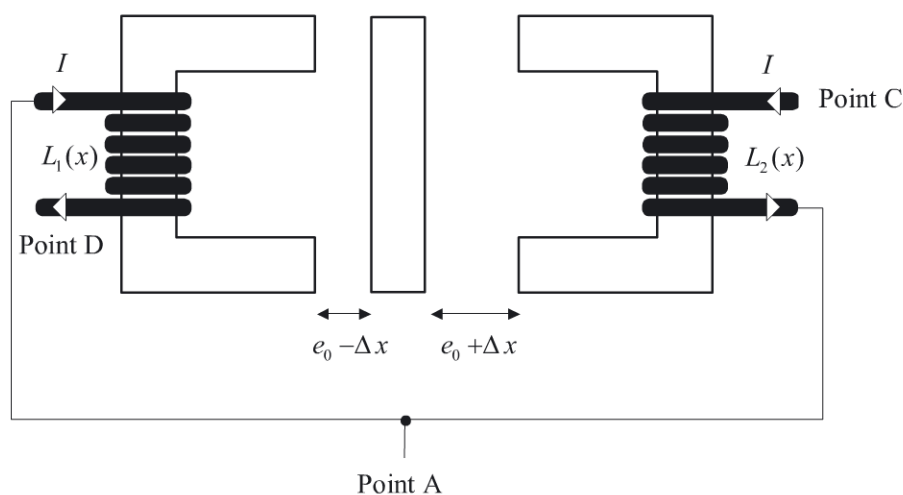


Figure 10.2 - Fonctionnement en mode push-pull

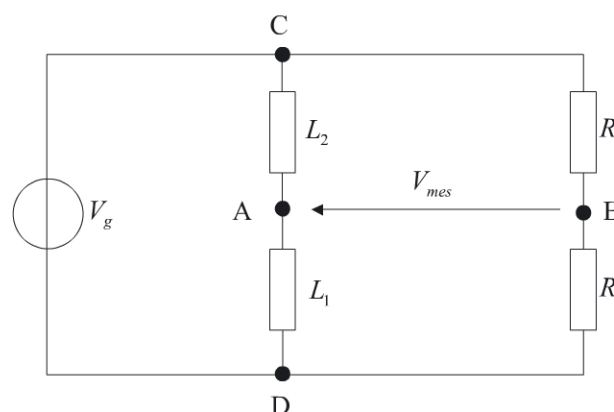


Figure 10.3 - Conditionnement

10 • Capteur inductif à réluctance variable

Donner l'expression de la tension de mesure en fonction de ωV_g , Z_1 et Z_2 puis ωV_g , L_1 et L_2 .

10.7 Montrer que le pont est équilibré pour $\Delta x = 0$.

10.8 Calculer la variation ΔV_{mes} de la tension de mesure pour $\Delta x \neq 0$ par rapport à sa valeur pour $\Delta x = 0$.

10.9 Calculer la sensibilité globale S_{mes} du système de mesure. On donne $l = 6 \text{ cm}$, $e_0 = 2 \text{ mm}$, $V_g = 10 \text{ V}$, $\mu_r = 400$.

10.10 La perméabilité relative μ_r n'est pas une constante mais dépend de la fréquence f du champ magnétique. En première approximation on peut considérer que l'on a :

$$\mu_r = \mu_{r0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (10.1)$$

μ_r représente la perméabilité relative statique et f_c la fréquence de coupure.

Calculer la fréquence maximale de l'alimentation, f_{max} , pour que la sensibilité globale reste supérieure à $S_{min} = 1,5 \text{ mV}/\mu\text{m}$. On donne $f_c = 500 \text{ Hz}$.

Corrigé détaillé

I. Étude du capteur

10.1 La circulation du champ magnétique \vec{H} sur la fibre moyenne Γ s'exprime simplement à l'aide du théorème d'Ampère par :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (10.2)$$

10.2 Puisque l'on néglige les fuites de flux, le circuit magnétique de fer doux constitue un tube de champ. \vec{B} étant à flux conservatif, on a :

$$\phi = \int_{\text{Section du circuit magnétique}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = cste.$$

Comme le long de chaque fibre du circuit magnétique \vec{B} et $d\vec{S}$ sont colinéaires et comme la section du circuit magnétique est constante, on en déduit que B est constant dans le circuit magnétique et l'entrefer.

Soit en utilisant les perméabilités magnétiques de l'air et du fer doux :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_{air} = \mu \vec{H}_{fer} = \mu_r \mu_0 \vec{H}_{fer} \quad (10.3)$$

10.3 Le flux magnétique au travers de la bobine est donné par :

$$\phi = \int_{\text{Bobine}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS = LI \quad (10.4)$$

10.4 La circulation (10.2) le long du contour Γ peut encore s'écrire :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma, \text{fer}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma, \text{air}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (10.5)$$

Ce qui devient en utilisant les résultats (10.3) et (10.4) :

$$\frac{B}{\mu} l + \frac{B}{\mu_0} 2e = \frac{N^2 BS}{L}$$

On en déduit l'expression de l'inductance de la bobine :

$$L = \frac{N^2 S}{\frac{l}{\mu} + \frac{2e}{\mu_0}} \quad (10.6)$$

10.5 La bobine étant alimentée en sinusoïdal, l'impédance de la bobine en régime permanent s'écrit $Z(e) = jL(e)\omega$ en négligeant la résistance du fil. Le capteur de déplacement réalisé en faisant varier l'entrefer e a une impédance qui est une fonction non linéaire de e .

II. Montage push-pull

10.6 La tension différentielle de mesure est donnée par :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} - \frac{1}{2} \right) V_g \cos \omega t = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{V_g}{2} \cos \omega t \\ &= \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} \frac{V_g}{2} \cos \omega t \end{aligned} \quad (10.7)$$

10.7 Pour $\Delta x = 0$, $L_1 = L_2$ soit $V_{mes} = 0$, le pont est équilibré.

10 • Capteur inductif à réluctance variable

10.8 Pour $\Delta x \neq 0$, le fonctionnement étant push-pull, on a $L_1 = L(e_0 - \Delta x)$ et $L_2 = L(e_0 + \Delta x)$. En utilisant (10.6), (10.7) devient :

$$V_{mes}(\Delta x \neq 0) = V_{mes}(\Delta x = 0) + \Delta V_{mes}$$

$$= \frac{\frac{N^2 S}{\frac{l}{\mu} + \frac{2(e_0 - \Delta x)}{\mu_0}} - \frac{N^2 S}{\frac{l}{\mu} + \frac{2(e_0 + \Delta x)}{\mu_0}}}{\frac{N^2 S}{\frac{l}{\mu} + \frac{2(e_0 - \Delta x)}{\mu_0}} + \frac{N^2 S}{\frac{l}{\mu} + \frac{2(e_0 + \Delta x)}{\mu_0}}} \frac{V_g}{2} \cos \omega t = \frac{\Delta x}{\frac{l}{\mu_r} + 2e_0} V_g \cos \omega t$$

La tension de mesure étant proportionnelle au déplacement, la mesure est linéaire.

10.9 La sensibilité de la mesure est donnée par :

$$S_{mes} = \frac{1}{\frac{l}{\mu_r} + 2e_0} V_g = 2,41 \text{ mV}/\mu\text{m}$$

10.10 Compte tenu du comportement de type premier ordre de la perméabilité magnétique, la sensibilité en régime dynamique s'écrit :

$$S_{mes} = \frac{1}{\frac{l}{\mu_{r0}} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} + 2e_0} V_g$$

Pour garder une sensibilité supérieure à $S_{\min} = 1,5 \text{ mV}/\mu\text{m}$, la fréquence d'utilisation doit rester inférieure à :

$$f_{\max} = f_c \sqrt{\left[\frac{\mu_{r0}}{l} \left(\frac{V_g}{S_{\min}} - 2e_0 \right) \right]^2 - 1} = 8,9 \text{ kHz}$$

EXERCICE : Jauge d'extensométrie capacitive haute température

Énoncé

On cherche à enregistrer les déformations d'une structure pour laquelle, pour des raisons de températures élevées, l'utilisation de jauges d'extensométrie collées classiques est impossible. On se propose d'étudier la jauge capacitive de la figure 11.1.

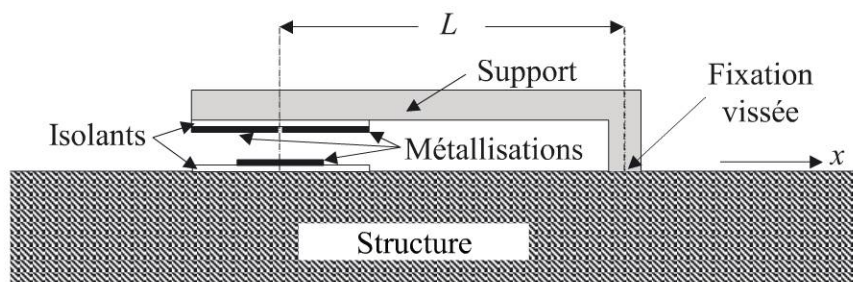


Figure 11.1- Principe de la jauge capacitive hautes températures

Les trois métallisations forment les armatures de deux condensateurs C_{12} et C_{13} schématisés figure 11.2. L'aire des armatures est S , leur longueur l et la distance entre les armatures e . La permittivité électrique de l'air environnant est considérée égale à celle du vide, ϵ_0 .

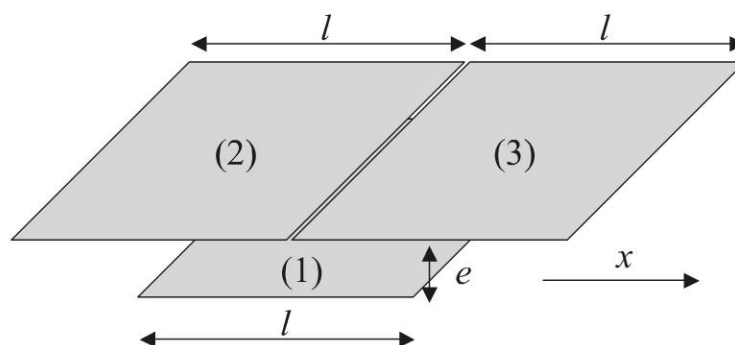


Figure 11.2- Armatures des condensateurs de la jauge

11 • Jauge d'extensométrie capacitive haute température

11.1 À l'origine l'armature (1) se trouve au milieu des armatures (2) et (3). Donner l'expression des capacités des condensateurs C_{12} et C_{13} ainsi formés. On note $C_0 = \epsilon_0 S / 2e$.

11.2 On considère que la distance entre le milieu de l'armature (1) et la fixation vissée est initialement de longueur L . La structure subit une contrainte σ orientée selon la direction x . En déduire le déplacement Δx de l'armature (1) par rapport aux armatures (2) et (3) si le matériau de la structure est de module d'Young E .

11.3 Donner alors les nouvelles expressions de C_{12} et C_{13} en fonction de ΔL , l et C_0 .

11.4 Les condensateurs sont montés en demi-pont push-pull avec deux résistances fixes selon le schéma de la figure 11.3. Le pont est alimenté en alternatif par une source de tension de fem V_g , de pulsation ω_g et d'impédance interne négligeable.

Donner l'expression de la tension de mesure en fonction de C_{12} , C_{13} et des caractéristiques de l'alimentation puis de ΔL , l et des caractéristiques de l'alimentation.

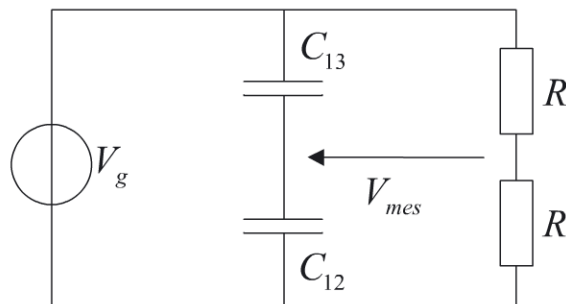


Figure 11.3 - Alimentation du capteur

11.5 Face à quel type de modulation se trouve-t-on ? Y-a-t'il ou non conservation de la porteuse ?

De façon à disposer d'une tension V_{mes} référencée à la masse, la tension V_{mes} du pont de la figure 11.3 est utilisée comme entrée d'un amplificateur d'instrumentation de gain unité. À la sortie de ce dernier, on dispose d'une tension V_{mes} référencée à la masse.

11.6 Pour récupérer l'information intéressante, on se propose de réaliser la détection synchrone de la figure 11.4 où k est une constante, V_{ref} une tension continue constante et où toutes les tensions sont référencées à la masse.

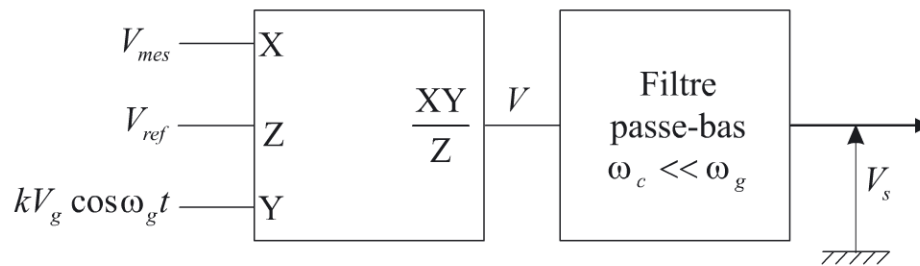


Figure 11.4- Détection synchrone

Déterminer l'expression de la tension de sortie V_s du montage.

11.7 On s'intéresse maintenant aux effets parasites et premièrement à l'effet de la température au travers de la dilatation thermique des matériaux. Comment réaliser le support des armatures (2) et (3) pour que la dilatation thermique du support et de la structure n'entraîne pas de déplacement Δx parasite ?

11.8 Expliquer pourquoi la dilatation thermique du support ayant pour effet d'entraîner une variation de l'épaisseur e des condensateurs est sans effet sur la mesure.

11.9 Expliquer comment on peut s'affranchir d'un défaut de fabrication qui donnerait des épaisseurs différentes e_{12} et e_{23} aux condensateurs C_{12} et C_{13} de façon à toujours avoir $V_{mes} = 0$ pour $\Delta L = 0$.

11.10 En supposant tous les problèmes précédents réglés, quelle source d'erreur subsiste sur la mesure de la valeur de la contrainte σ .

Corrigé détaillé

11.1 Les capacités des deux condensateurs plans formés par les métallisations sont :

$$C_{12} = \frac{\epsilon_0 S}{2e} = C_0 \quad \text{et} \quad C_{13} = \frac{\epsilon_0 S}{2e} = C_0$$

11.2 La déformation $\epsilon_{//} = \Delta L/L$ de la structure est donnée par la loi de Hooke, c'est-à-dire :

$$\epsilon_{//} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} \quad (11.1)$$

Comme la jauge est solidaire de la structure $\Delta x = \Delta L$, d'où d'après (11.1), $\Delta x = \sigma L/E$.

11 • Jauge d'extensométrie capacitive haute température

11.3 Considérant ce déplacement, on a alors :

$$C_{12} = \frac{\epsilon_0 S}{e} \frac{l}{l} \left(\frac{l}{2} - \Delta L \right) = \frac{\epsilon_0 S}{2e} \left(1 - \frac{2\Delta L}{l} \right) = C_0 \left(1 - \frac{2\Delta L}{l} \right)$$

$$C_{13} = C_0 \left(1 + \frac{2\Delta L}{l} \right)$$
(11.2)

11.4 La tension de mesure instantanée est donnée par :

$$V_{mes}(t) = \text{Re} \left[\left(\frac{\frac{1}{jC_{12}\omega_g}}{\frac{1}{jC_{12}\omega_g} + \frac{1}{jC_{13}\omega_g}} - \frac{1}{2} \right) V_g \exp j\omega_g t \right]$$

$$= \left(\frac{C_{13} - C_{12}}{C_{13} + C_{12}} \right) \frac{V_g}{2} \cos \omega_g t$$
(11.3)

En utilisant (11.2), (11.3) devient :

$$V_{mes}(t) = \frac{\Delta L}{l} V_g \cos \omega_g t$$
(11.4)

11.5 Le signal donné par (11.4) se trouve sous forme de modulation d'amplitude (modulation de l'amplitude du signal $V_g \cos \omega_g t$ par l'évolution temporelle de $\Delta L/l$) sans conservation de la porteuse (absence de ω_g dans le spectre de V_{mes}).

11.6 Le signal de sortie $V(t)$ du multiplieur est donné par :

$$V(t) = \frac{V_{mes}(t)kV_g}{V_{ref}} \cos \omega_g t = \frac{\Delta L}{l} k \frac{V_g^2}{V_{ref}} \cos^2 \omega_g t = \frac{\Delta L}{l} k \frac{V_g^2}{V_{ref}} \frac{1 + \cos 2\omega_g t}{2}$$
(11.5)

Le passage dans le filtre passe-bas supprime la composante haute-fréquence de (11.5) et on obtient :

$$V_s(t) = \frac{\Delta L}{2l} k \frac{V_g^2}{V_{ref}}$$
(11.6)

La détection synchrone permet donc de récupérer le signal utile, à savoir un signal directement proportionnel au mesurande σ au travers de ΔL qui lui est proportionnel.

11.7 Pour que la dilatation thermique du support et de la structure n'entraîne pas de déplacement Δx parasite, il suffit que les deux matériaux aient même coefficient de dilatation linéique. Si possible, le capteur sera donc construit dans le même matériau que la structure porteuse.

11.8 e n'intervenant pas dans l'expression de $V_{mes}(t)$ s'il est le même pour les deux condensateurs, l'effet de la dilatation thermique dans la direction verticale est sans influence sur la qualité de la mesure.

11.9 Si les épaisseurs e_{12} et e_{23} sont différentes, il suffit de rééquilibrer le pont pour $\Delta x = 0$ en utilisant des résistances R'_0 et R''_0 de valeurs différentes à la place des résistances R de telle façon que l'on ait :

$$\begin{aligned} V_{mes}(t) &= \left(\frac{C_{13}}{C_{12} + C_{13}} - \frac{R'_0}{R'_0 + R''_0} \right) V_g \cos \omega_g t \\ &= \left(\frac{e_{12}}{e_{13} + e_{12}} - \frac{R'_0}{R'_0 + R''_0} \right) V_g \cos \omega_g t = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{e_{12}}{e_{13} + e_{12}} = \frac{R'_0}{R'_0 + R''_0}$$

En revanche, ceci ne corrige pas complètement le défaut puisque pour $\Delta x \neq 0$ on a :

$$C_{12} = \frac{\epsilon_0 S}{2e_{12}} \left(1 - \frac{2\Delta L}{l} \right) \quad \text{et} \quad C_{13} = \frac{\epsilon_0 S}{2e_{13}} \left(1 + \frac{2\Delta L}{l} \right)$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} V_{mes}(t) &= \left(\frac{C_{13}}{C_{12} + C_{13}} - \frac{R'_0}{R'_0 + R''_0} \right) V_g \cos \omega_g t \\ &= \left(\frac{e_{12} (1 + 2\Delta L/l)}{e_{13} (1 - 2\Delta L/l) + e_{12} (1 + 2\Delta L/l)} - \frac{e_{12}}{e_{13} + e_{12}} \right) V_g \cos \omega_g t \\ &= \frac{4e_{12}e_{13}}{(e_{12} + e_{13})^2} \frac{\Delta L/l}{1 + 2\frac{e_{12} - e_{13}}{e_{12} + e_{13}} \Delta L/l} V_g \cos \omega_g t \end{aligned}$$

La différence d'épaisseur entraîne une non-linéarité de la mesure.

11.10 Si tous les problèmes précédents sont résolus, la tension de sortie du conditionneur du signal est $V_s(t) = kV_g^2 \Delta L / 2IV_{ref}$. Celle-ci est proportionnelle au déplacement engendré par la contrainte σ puisque l'on a $\Delta L/L = \sigma/E$. Le problème qui se pose vient du fait que le module d'Young du matériau de la structure dépend en fait de la température. Si on désire effectuer une mesure précise de la contrainte, il faudra mesurer cette température.

12

EXERCICE : Choix d'un capteur de température

Énoncé

On désire mesurer la température à l'intérieur d'une enceinte soumise à de brusques variations de température (c'est en fait la chambre de combustion d'un moteur à explosion monocylindre schématisé figure 12.1).

La mesure de la température est effectuée par un thermocouple.

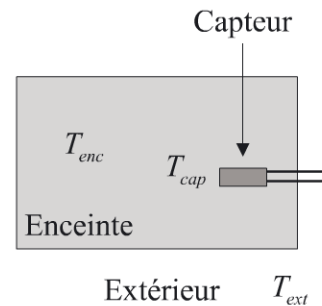


Figure 12.1 - Principe de la mesure

La quantité de chaleur passant pendant dt d'un milieu 2 à la température T_2 à un milieu 1 à la température T_1 est donnée en première approximation par :

$$\delta Q = K(T_2 - T_1)dt \quad (12.1)$$

K représente le coefficient d'échange calorifique entre le milieu 1 et le milieu 2.

On donne :

T_{ext} : La température supposée constante du milieu extérieur à l'enceinte (en K).

T_{cap} : La température du capteur (en K).

T_{enc} : La température du milieu intérieur à l'enceinte (en K).

K_{ext} : Le coefficient d'échange calorifique du capteur avec l'extérieur (en W /K).

K_{enc} : Le coefficient d'échange calorifique du capteur avec l'enceinte (en W /K).

M : La masse du capteur (en kg).

C : La capacité calorifique du capteur (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$).

12.1 Établir le bilan énergétique lors d'une variation dT_{cap} de la température du capteur pendant l'intervalle élémentaire de temps dt .

12.2 On suppose que la température extérieure est constante et on pose :

$$\Delta T_{cap} = T_{cap} - T_{ext} \quad \text{et} \quad \Delta T_{enc} = T_{enc} - T_{ext} \quad (12.2)$$

Calculer dans le domaine de Laplace la fonction de transfert :

$$\Delta T_{cap}(p) / \Delta T_{enc}(p)$$

Conclure quant au comportement du système.

12.3 Le moteur tournant à 730 tours/minute, l'évolution de la température à l'intérieur de l'enceinte est rapide (explosion du mélange comburant). Choisir le capteur le plus adapté parmi les trois proposés dans le tableau 12.1.

Tableau 12.1 - Caractéristiques des thermocouples

	Thermocouple n° 1	Thermocouple n° 2	Thermocouple n° 3
M (kg)	$5 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
C (J/kg.K)	8360	3230	5210
K_{ext} (W/K)	9	3	8
K_{enc} (W/K)	36	175	61

12.4 On fait l'approximation grossière que la température dans l'enceinte varie sinusoïdalement, la température extérieure restant constante et égale à 20 °C.

Calculer les valeurs extrêmes de la température de l'enceinte sachant que les valeurs extrêmes données par le capteur sont 288,8 °C et 960,6 °C. On rappelle qu'à une température de 0 °C correspond une température absolue de 273,15 K .

Corrigé détaillé

12.1 Tenant compte de (12.1), le bilan thermique s'écrit pour des températures exprimées en Kelvin :

$$MCdT_{cap} = K_{enc}(T_{enc} - T_{cap})dt - K_{ext}(T_{cap} - T_{ext})dt$$

12.2 Cette égalité peut être réécrite en tenant compte du fait que la température extérieure est constante et en utilisant (12.2) :

$$MC \frac{d\Delta T_{cap}}{dt} = K_{enc}(\Delta T_{enc} - \Delta T_{cap}) - K_{ext}\Delta T_{cap} \quad (12.3)$$

12 • Choix d'un capteur de température

En calculant la transformée de Laplace de (12.3) où p désigne la variable du domaine de Laplace, on obtient la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta T_{cap}(p)}{\Delta T_{enc}(p)} = \frac{K_{enc}}{K_{ext} + K_{enc}} \frac{1}{1 + \frac{MC}{K_{ext} + K_{enc}} p} \quad (12.4)$$

Cette forme est représentative d'un comportement passe-bas du premier ordre.

12.3 Le moteur tourne à 730 tours/mn ce qui correspond à une fréquence f de 12,17 Hz.

En l'absence d'autre information ou critère de choix, il est naturel de choisir le thermocouple le plus à même de suivre l'évolution temporelle de la température à l'intérieur de l'enceinte c'est-à-dire celui présentant la fréquence de coupure la plus élevée.

Cette fréquence de coupure est donnée d'après (12.4) par :

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{K_{ext} + K_{enc}}{MC}$$

La tableau 12.2 donne les valeurs des fréquences de coupure des trois thermocouples proposés.

Tableau 12.2- Fréquences de coupure

	Thermocouple n° 1	Thermocouple n° 2	Thermocouple n° 3
$f_c(\text{Hz})$	0,17	17,54	1,05

Compte tenu de ce qui précède, le choix se porte donc sur le thermocouple n° 2.

12.4 Pour une évolution sinusoïdale de la température à l'intérieur de l'enceinte, (12.4) permet d'établir l'expression de la transmittance qui s'écrit :

$$G = \frac{\Delta T_{cap}}{\Delta T_{enc}} = \frac{K_{enc}}{K_{ext} + K_{enc}} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \quad (12.5)$$

Avec $f_c = 17,54$ Hz et $f = 12,17$ Hz, on tire $G = 0,81$.

La température de l'enceinte est alors donnée à partir de (12.2) et (12.5) par :

$$T_{enc} = \frac{T_{cap} - T_{ext}}{G} + T_{ext}$$

Cette dernière expression permet de calculer les températures extrêmes prises par l'intérieur de l'enceinte à partir des températures données par le thermocouple, à savoir :

$$T_{enc,max} = 1\,184 \text{ °C} \quad \text{et} \quad T_{enc,min} = 353 \text{ °C}$$

EXERCICE : Utilisation des jauges d'extensométrie sur un corps d'épreuve cylindrique

Énoncé

Considérons le corps d'épreuve cylindrique de la figure 13.1, de rayon r et de hauteur h . Le cylindre est constitué d'un matériau de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν . Sur ce cylindre, on a collé huit jauges d'extensométrie selon la géométrie représentée figure 13.1. On suppose le collage parfait et les jauges idéales.

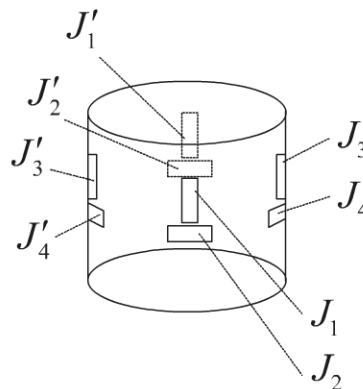


Figure 13.1 - Le corps d'épreuve équipé des jauges

Les jauges sont montées en pont selon le schéma de la figure 13.2.

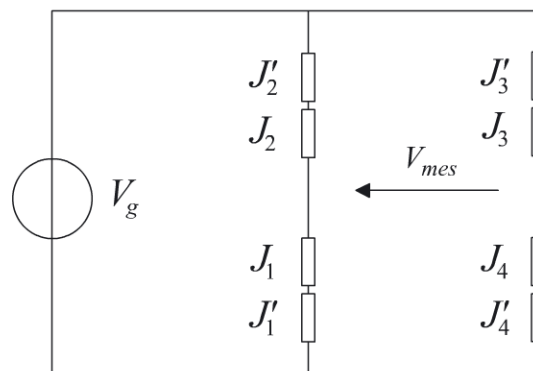


Figure 13.2 - Circuit de conditionnement

13 • Utilisation des jauges d'extensométrie sur un corps d'épreuve cylindrique

13.1 Calculer les valeurs des différentes résistances du pont puis la tension de mesure différentielle. Les huit jauges sont supposées identiques de même résistance au repos $R = 100 \Omega$ et de même facteur de jauge $K = 2$.

13.2 Le cylindre de 300 mm^2 de section est en acier ($E \simeq 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ et $\nu = 0,3$). On se limite à une contrainte $\sigma_{\max} = 10^{-4} E$ (de l'ordre du dixième de la limite élastique). Calculer la masse qu'il faut poser sur le cylindre pour exercer cette contrainte.

13.3 Calculer la variation maximale de la résistance d'une jauge.

On désire effectuer des mesures à 1 % près, montrer que dans ces conditions l'erreur de linéarité de la tension de mesure peut être négligée.

13.4 Montrer simplement que le type de montage utilisé permet d'éviter des problèmes liés à une contrainte non parfaitement axiale.

Corrigé détaillé

13.1 Le cylindre est de hauteur h et de périmètre $p = 2\pi r$. La contrainte appliquée est selon l'axe du cylindre si bien que, suivant la loi de Hooke, $\Delta h/h = \varepsilon_{//} = \sigma/E$ et $\Delta p/p = \Delta r/r = \varepsilon_{\perp} = -\nu\sigma/E$.

Les jauges, de longueur l et de résistance R au repos, sont collées sur le cylindre qui impose ses déformations (collage parfait). Chaque jauge n'est sensible qu'aux variations de sa longueur (jauge idéale). On a donc, pour les jauges J_1, J'_1, J_3 et J'_3 , $\Delta l/l = \Delta h/h = \varepsilon_{//}$ et pour les jauges J_2, J'_2, J_4 et J'_4 , $\Delta l/l = \Delta p/p = \varepsilon_{\perp} = -\nu\varepsilon_{//}$. D'où :

$$R_1 = 2R(1 + \Delta R/R) = 2R(1 + K\Delta l/l) = 2R(1 + K\varepsilon_{//}) = R_3$$

$$R_2 = 2R(1 + \Delta R/R) = 2R(1 + K\Delta l/l) = 2R(1 - \nu K\varepsilon_{//}) = R_4$$

Ce qui conduit à l'expression de la tension de mesure :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) V_g = \frac{K\varepsilon_{//}(1 + \nu)}{2 + K\varepsilon_{//}(1 - \nu)} V_g \quad (13.1)$$

13.2 On a $\sigma_{\max} = 10^{-4} E$ d'où avec $S = 300 \text{ mm}^2$, $F_{\max} = 10^{-4} ES = 6000 \text{ N}$. La force correspond au poids d'une masse d'environ 600 kg.

13.3 À cette contrainte maximale correspond une déformation maximale $\varepsilon_{//} = 10^{-4}$ et une variation maximale de la résistance d'une jauge $\Delta R = KR\varepsilon_{//} = 0,02 \Omega$.

L'approximation linéaire de V_{mes} est donnée par :

$$V_{mes,lin} = K\varepsilon_{//}(1 + \nu)\frac{V_g}{2} \quad (13.2)$$

L'erreur relative de linéarité introduite en utilisant (13.2) au lieu de (13.1) pour déterminer $\varepsilon_{//}$ (donc σ) est donnée par :

$$\frac{V_{mes} - V_{mes,lin}}{V_{mes}} = -K\varepsilon_{//}(1 - \nu)$$

Pour la valeur maximale de la contrainte, il vient $|\delta V_{mes}/V_{mes}| \approx 1,4 \cdot 10^{-4}$, valeur très inférieure à 1 %. Cette erreur est négligeable et on peut se contenter de l'expression (13.2) pour évaluer la valeur de la tension de mesure.

13.4 La contrainte n'étant plus axiale, la situation peut être schématisée comme sur la figure 13.3.

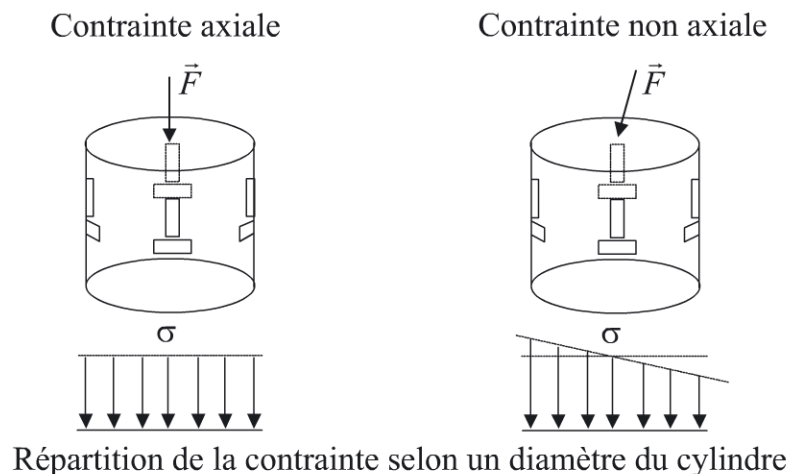


Figure 13.3 - Contrainte axiale et non axiale

Chaque résistance du pont est constituée d'un couple de jauges en regard. Au premier ordre, la contrainte supplémentaire subie par une des jauges d'un couple est subie en moins par l'autre jauge. On peut donc écrire dans le cas d'une contrainte non-axiale :

$$R_i = (R + \Delta R + \alpha R) + (R + \Delta R - \alpha R) = 2(R + \Delta R)$$

L'expression des résistances du pont est identique à celle obtenue dans le cas d'une contrainte purement axiale. Au premier ordre, il n'y a donc pas d'effet sur la tension de mesure.

14

EXERCICE : Effet de la résistance des fils de liaison du capteur dans un pont de Wheatstone

Énoncé

On considère une résistance thermométrique Pt100 de résistance $R_c(T) = R_0(1 + \alpha T)$ où T représente la température en $^{\circ}\text{C}$, $R_0 = 100 \Omega$ la résistance à 0°C et $\alpha = 3,85 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ le coefficient de température.

Cette résistance est placée dans un pont de Wheatstone schématisé figure 14.1. Le pont est alimenté par une source de tension de force électromotrice V_g et de résistance interne négligeable.

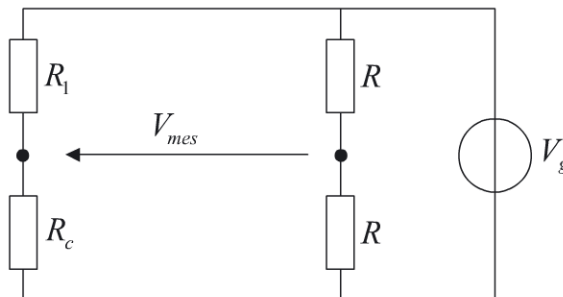


Figure 14.1 - Montage en pont du capteur

14.1 On se limite à l'étendue de mesure $[0^{\circ}\text{C}; 100^{\circ}\text{C}]$ et on équilibre le pont pour la valeur $T_0 = 50^{\circ}\text{C}$ de la température pour laquelle on pose $R_c(T_0) = R_{c0}$. L'impédance des fils de liaison liant le capteur au reste du montage est totalement négligeable (le capteur est physiquement proche du pont). Déterminer la valeur de R_1 qui permet d'équilibrer le pont.

14.2 On limite le courant I dans la Pt100 à moins de 5 mA afin de pouvoir négliger l'auto échauffement. Fixer la valeur maximale de la tension d'alimentation permettant cette limitation du courant.

14.3 Établir l'expression de la tension différentielle de mesure pour une valeur quelconque de la température pour laquelle on posera :

$$R_c(T) = R_c(T_0 + \Delta T) = R_{c0} + \Delta R_c$$

$$V_{mes}(T) = V_{mes}(T_0 + \Delta T) = V_{mes,0} + \Delta V_{mes}$$

En déduire une approximation au premier ordre en $\Delta R_c/R_{c0}$ de la sensibilité de la mesure $S_{mes} = \Delta V_{mes}/\Delta T$.

14.4 Le capteur est maintenant mis en service mais à grande distance de l'électronique constituée par le pont, de son alimentation et du système de mesure de la tension différentielle. La résistance des fils de liaison du capteur à son électronique n'est plus négligeable. Celle-ci est modélisée selon la figure 14.2 par deux résistances supplémentaires r .

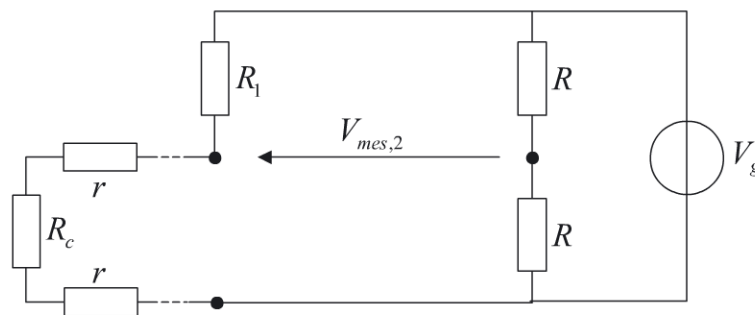


Figure 14.2 - Montage en pont, capteur éloigné

Calculer la tension de déséquilibre $V_{mes,2r}$ du pont dans ce cas puis l'erreur δV_{2r} entraînée par les fils de liaison.

Calculer la valeur maximale de r pour que l'erreur introduite sur la mesure d'une température reste inférieure à $\delta T = 0,2$ °C. On suppose que le fil de liaison est un fil de cuivre de diamètre $d = 0,5$ mm et de résistivité $1,72 \cdot 10^{-8}$ Ω.m. Calculer la longueur des fils de liaison qui correspondent à cette résistance.

Corrigé détaillé

14.1 D'après le montage de la figure 14.1, la tension différentielle de mesure est donnée par :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_c}{R_c + R_1} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{R_c - R_1}{(R_c + R_1)} \frac{V_g}{2} \quad (14.1)$$

14 • Effet de la résistance des fils de liaison du capteur dans un pont de Wheatstone

Pour une température $T_0 = 50^\circ\text{C}$ on a :

$$R_c(T_0) = R_{c0} = R_0(1 + 3,85 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 119,25 \Omega$$

À l'équilibre du pont, on doit avoir $V_{mes}(T_0) = V_{mes,0} = 0$ soit $R_1 = R_{c0}$.

14.2 Le courant maximal circulant dans la Pt100 est donné pour la valeur minimale de la résistance de la branche potentiométrique la contenant, soit $R_{c0} + R_0 = 219,25 \Omega$ à $T = 0^\circ\text{C}$. Pour limiter le courant I à moins de 5 mA, il suffit de fixer à $V_g < 1,10 \text{ V}$.

14.3 La tension de déséquilibre du pont s'écrit :

$$V_{mes} = \Delta V_{mes} = \frac{R_c - R_{c0}}{(R_c + R_{c0})} \frac{V_g}{2} = \frac{\Delta R_c}{(2R_{c0} + \Delta R_c)} \frac{V_g}{2} = \Delta R_c \frac{V_g}{4R_{c0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta R_c}{2R_{c0}}\right)}$$

Comme $\Delta R_c = R_0 \alpha \Delta T$ avec $\Delta T = T - T_0$, on peut encore écrire :

$$V_{mes} = \Delta V_{mes} = \alpha R_0 \Delta T \frac{V_g}{4R_{c0}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha R_0 \Delta T}{2R_{c0}}\right)}$$

En première approximation, on a avec $V_g = 1,10 \text{ V}$:

$$S_{mes} = \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta T} \simeq \alpha R_0 \frac{V_g}{4R_{c0}} = 0,88 \text{ mV} \cdot \text{C}^{-1} \quad (14.2)$$

14.4 On prend maintenant en compte la résistance des fils de liaison. La tension de déséquilibre du pont est donnée par (14.1) dans laquelle $R_c = R_{c0} + \Delta R_c$ doit être remplacée par $R_c = R_{c0} + 2r + \Delta R_c$, soit :

$$V_{mes,2r} = \frac{(R_c + 2r) - R_{c0}}{((R_c + 2r) + R_{c0})} \frac{V_g}{2} = \frac{2r + \Delta R_c}{(2R_{c0} + 2r + \Delta R_c)} \frac{V_g}{2}$$

Ceci conduit à une erreur donnée par :

$$\begin{aligned} \delta V_{2r} &= V_{mes,2r} - V_{mes} \\ &= \left(\frac{2r + \Delta R_c}{2R_{c0} + 2r + \Delta R_c} - \frac{\Delta R_c}{2R_{c0} + \Delta R_c} \right) \frac{V_g}{2} \\ &= \frac{4rR_{c0}}{(2R_{c0} + \Delta R_c)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2r}{2R_{c0} + \Delta R_c}\right)} \frac{V_g}{2} \end{aligned}$$

Cette erreur est d'autant plus grande que l'on se rapproche de la borne inférieure de l'étendue de mesure, à savoir 0°C . Le maximum de cette erreur est donc donné pour $\Delta R_c = R_0 - R_{c0}$, soit :

$$\delta V_{2r,\max} = \frac{4rR_{c0}}{(R_{c0} + R_0)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2r}{R_{c0} + R_0}\right)^2} \frac{V_g}{2} \quad (14.3)$$

L'erreur maximale acceptée δT restant faible, la sensibilité du dispositif est proche de celle donnée par (14.2). On a donc $\delta V_{2r,\max} \simeq S_{mes}\delta T$. La valeur maximale de r est obtenue en inversant (14.3) :

$$r = \frac{(R_{c0} + R_0)^2 S_{mes} \delta T}{2(R_{c0} V_g - (R_{c0} + R_0) S_{mes} \delta T)} = 32,5 \text{ m}\Omega$$

À cette valeur de résistance des fils de liaison, correspond une longueur donnée par $l = \pi d^2 r / 4\rho = 37 \text{ cm}$.

15

EXERCICE : Effet d'un mauvais appariement sur un pont à quatre capteurs résistifs

Énoncé

On considère le pont de la figure 15.1 où les quatre résistances sont des jauges d'extensométrie à trame pelliculaire collées sur une structure porteuse.

15.1 Donner l'expression de V_{mes} en fonction de V_g , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 . On supposera que la résistance interne de la source de tension est totalement négligeable.

15.2 En l'absence de déformation de la structure sur laquelle les jauges sont collées, les quatre jauges présentent une résistance $R_0 = 120 \Omega$. Calculer dans ce cas la valeur, notée V_{mes0} , de la tension de mesure.

15.3 Selon la façon dont elles sont collées sur la structure, chaque jauge enregistre une déformation $\pm\varepsilon$ lorsque la structure porteuse est soumise à une contrainte. Donner les expressions de R_1 , R_2 , R_3 et R_4 en fonction de R_0 et de ΔR , variation des résistances R_i par rapport à la valeur de référence R_0 provoquée par les déformations $\pm\varepsilon$. On note K le facteur de jauge.

15.4 En déduire l'expression de l'évolution ΔV_{mes} de V_{mes} par rapport à V_{mes0} due aux déformations.

15.5 On change une des jauges défectueuses, ce sera R_4 (les autres étant inchangées). Malheureusement, celle-ci présente une résistance au repos non plus égale à R_0 mais à $R_0 + r$, son facteur de jauge restant égal à K .

Donner la nouvelle valeur de la tension de mesure (au repos) que l'on notera u_0 . Pour alléger l'écriture, on pose $r = \alpha R_0$.

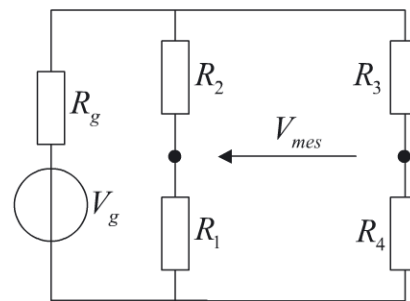


Figure 15.1 - Montage en pont

15.6 La structure porteuse subit de nouveau une contrainte entraînant une déformation des jauges. En posant $k = K\varepsilon$, calculer la nouvelle expression de la tension de mesure notée V'_{mes} en fonction de k , α et V_g .

15.7 Montrer que ce résultat peut se mettre sous la forme de la somme de l'expression de la tension V_{mes} de la question 4, de u_0 et d'un troisième terme, noté A , fonction de k , α et V_g .

k et α étant faibles, donner une expression approchée a de A .

15.8 Calculer l'erreur $\delta V = V'_{mes} - V_{mes}$ commise sur la mesure.

15.9 Identifier les deux termes constituant l'erreur précédente. Pour $r = 10^{-2}R_0$, $V_g = 5\text{ V}$ et $\Delta R = 10^{-3}R$, calculer numériquement les trois termes de V'_{mes} et conclure quant à la correction à apporter.

Corrigé détaillé

15.1 Le calcul classique donne :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) V_g = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} V_g \quad (15.1)$$

15.2 Au repos comme toutes les jauges sont de résistance R_0 , on a immédiatement $V_{mes0} = 0$. Le pont est équilibré au repos.

15.3 Pour un push-pull en pont entier une des deux possibilités est :

$$R_1 = R_0 + \Delta R \quad R_2 = R_0 - \Delta R \quad R_3 = R_0 + \Delta R \quad R_4 = R_0 - \Delta R$$

avec par définition du coefficient de jauge, $\Delta R = K\varepsilon R_0$. L'autre possibilité consiste à inverser tous les signes devant les ΔR .

15.4 On en déduit :

$$\Delta V_{mes} = V_{mes} - V_{mes0} = V_{mes} = \frac{(R_0 + \Delta R)^2 - (R_0 - \Delta R)^2}{4R_0^2} V_g = \frac{\Delta R}{R_0} V_g$$

15.5 Ici $R_4 = R_0 + r = R_0(1 + \alpha)$ au repos. Il vient immédiatement en utilisant le résultat (15.1) :

$$u_0 = \frac{R_0^2 - R_0(R_0 + r)}{2R_0(2R_0 + r)} V_g = -\frac{rR_0}{2R_0(2R_0 + r)} V_g = -\frac{\alpha}{2(2 + \alpha)} V_g$$

15 • Effet d'un mauvais appariement sur un pont à quatre capteurs résistifs

15.6 Sous une contrainte appliquée à la structure porteuse provoquant une déformation des jauges, on a $R_4 = R_0 + r - \Delta R - \Delta r = R_0(1 - k)(1 + \alpha)$. En reportant dans l'expression (15.1), on obtient :

$$\begin{aligned} V'_{mes} &= \frac{(R_0 + \Delta R)^2 - (R_0 - \Delta R)(R_0 + r - \Delta R)}{2R_0(2R_0 + r - \Delta r)} V_g \\ &= \frac{(1 + k)^2 - (1 - k)^2(1 + \alpha)}{2(2 + \alpha(1 - k))} V_g = \frac{4k - \alpha(1 - k)^2}{2(2 + \alpha(1 - k))} V_g \end{aligned}$$

15.7 En posant $V'_{mes} = V_{mes} + u_0 + A$, A s'écrit :

$$A = V'_{mes} - V_{mes} - u_0 = \frac{4k - \alpha(1 - k)^2}{2(2 + \alpha(1 - k))} V_g - kV_g + \frac{\alpha}{2(2 + \alpha)} V_g$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$A = \frac{k\alpha}{2} \frac{k(2 + \alpha) - \alpha}{(2 + \alpha)(2 + \alpha(1 - k))} V_g \quad (15.2)$$

En ne gardant que la partie principale de (15.2), on obtient la valeur approchée a de A, soit :

$$a = \frac{k\alpha}{8} (2k - \alpha) V_g$$

15.8 L'erreur commise sur la mesure est donc $\delta V = V'_{mes} - V_{mes} = u_0 + A \simeq u_0 + a$.

15.9 L'erreur est la somme de deux termes. Le premier, u_0 , ne dépendant que de r via α , est l'erreur de zéro. Le deuxième terme, a , dépendant de ΔR via k , peut être qualifié d'erreur de sensibilité.

Avec $r = 10^{-2}R_0$, $\Delta R = 10^{-3}R_0$ et $V_g = 5 \text{ V}$, soit $\alpha = 10^{-2}$ et $k = 10^{-3}$, il vient $V_{mes} = 5,0 \text{ mV}$, $u_0 = -12,4 \text{ mV}$, $V'_{mes} = -7,4 \text{ mV}$ et $a = -5,0 \cdot 10^{-5} \text{ mV}$. On remarque que l'erreur $\delta V = V'_{mes} - V_{mes} = -12,4 \text{ mV}$ est essentiellement due à l'erreur de zéro, c'est donc cette dernière qui doit être corrigée.

La figure 15.2 présente les tensions V_{mes} , u_0 et V'_{mes} pour k variant de $-2 \cdot 10^{-3}$ à $2 \cdot 10^{-3}$ pour $\alpha = 10^{-2}$.

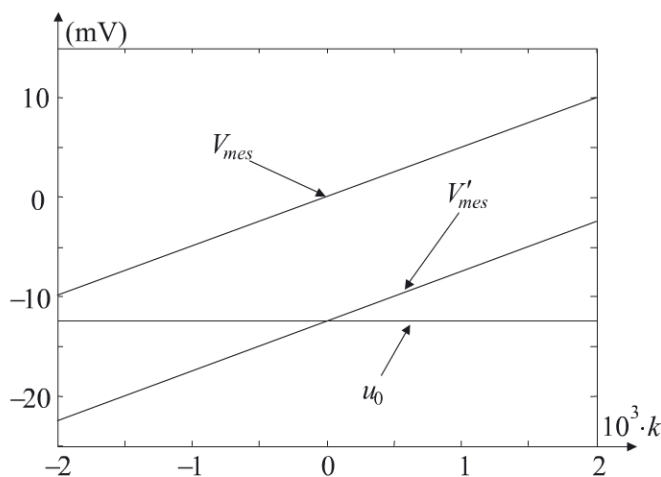


Figure 15.2 - Effet d'un mauvais appariement des jauges sur la tension de mesure

EXERCICE :

Effet de la résistance des fils de liaison d'un capteur résistif alimenté en courant

Énoncé

On considère une résistance thermométrique Pt100 de résistance $R_c(T) = R_0(1 + \alpha T)$ où T représente la température en $^{\circ}\text{C}$, $R_0 = 100 \Omega$ la résistance à 0°C et $\alpha = 3,85 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ le coefficient de température. On dispose, pour alimenter cette résistance thermométrique, d'une carte de conditionnement fournissant une sortie de courant parfaite calibrée à $I = 5 \text{ mA}$, les deux entrées différentielles d'un amplificateur d'instrumentation, la borne de sortie de ce dernier et une borne de masse. La résistance ajustable R permet de faire varier le gain G de l'amplificateur et les impédances d'entrée de ce dernier sont considérées infinies. La carte est schématisée figure 16.1.

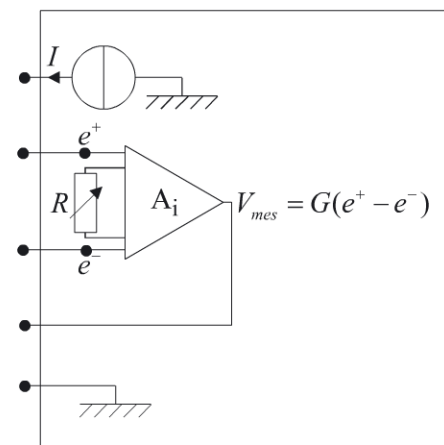


Figure 16.1 - Carte de conditionnement

16.1 La Pt100 est directement connectée entre la source de courant et la masse et ses bornes sont reliées à l'amplificateur d'instrumentation (voir figure 16.2). Les fils de liaison sont de longueur négligeable.

Déterminer l'expression de la tension de mesure V_{mes} et calculer la sensibilité de la mesure $S_{mes} = \Delta V_{mes} / \Delta T$.

Quel doit être le réglage du gain de l'amplificateur d'instrumentation pour obtenir une sensibilité $S_{mes} = 0,1 \text{ V} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$?

16 • Effet de la résistance des fils de liaison d'un capteur résistif alimenté en courant

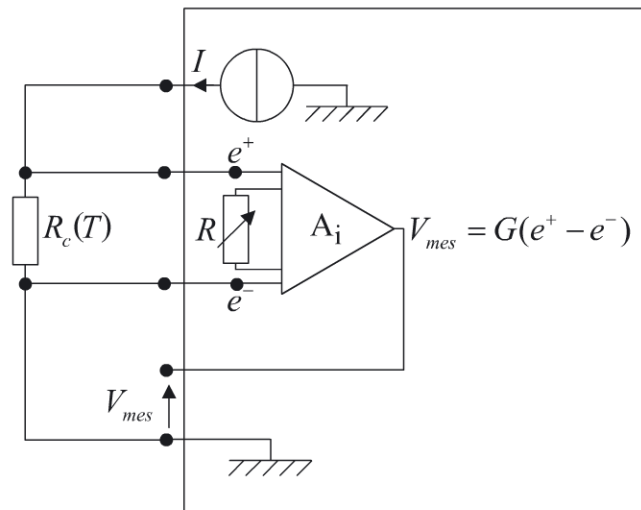


Figure 16.2- Montage 2 fils de résistance négligeable

16.2 La Pt100 est maintenant mise en service à distance de la carte et on doit donc tenir compte de la résistance des fils de liaison. Ces fils de liaison sont des fils de cuivre de résistivité $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, de diamètre $d = 0,5 \text{ mm}$ et de longueur $l = 5 \text{ m}$. Chaque fil est modélisé par sa résistance r (voir figure 16.3).

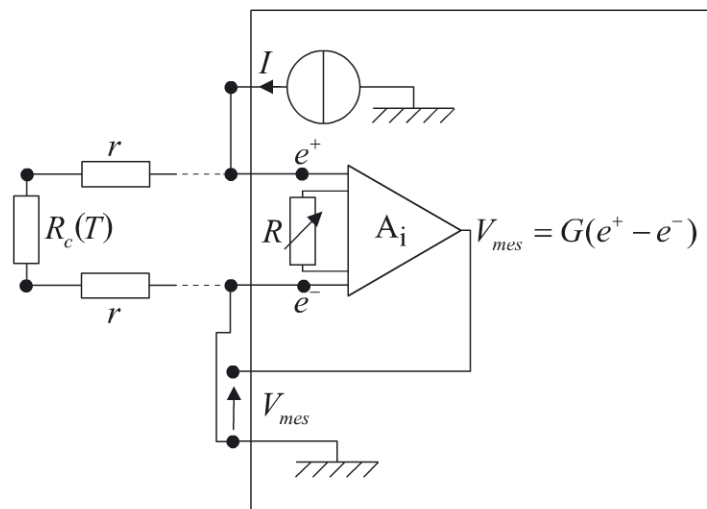


Figure 16.3- Montage 2 fils réels

Déterminer la nouvelle tension de mesure $V_{mes,2}$.

En déduire l'erreur $\delta V_2 = V_{mes,2} - V_{mes}$ sur la tension de mesure introduite par la résistance des fils de liaison.

Quelle est alors l'erreur δT_2 engendrée sur la mesure de la température ?

16.3 Pour pallier cette erreur, on modifie le montage pour obtenir un montage classique dit à quatre fils : deux fils amenant le courant à la résistance thermométrique et deux fils servant à la prise de tension aux bornes de celle-ci (voir figure 16.4).

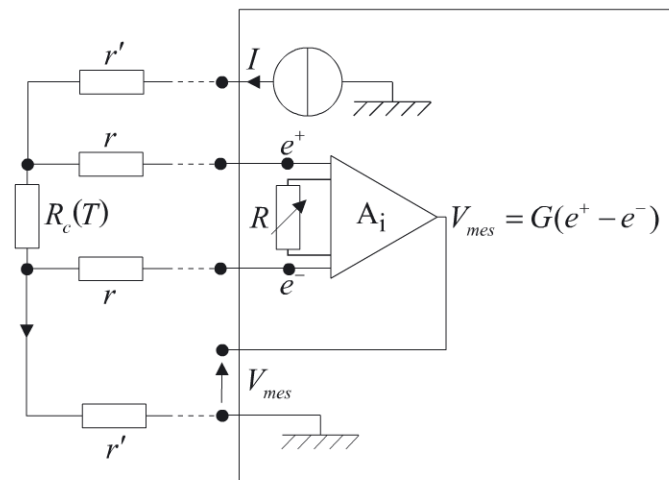


Figure 16.4 - Montage 4 fils

Déterminer la nouvelle tension de mesure $V_{mes,4}$ et conclure.

Corrigé détaillé

16.1 Les impédances d'entrée de l'amplificateur d'instrumentation peuvent être considérées comme infinies. D'après le montage de la figure 16.2, le courant circulant dans la Pt100 est le courant I délivré par la source. La tension de mesure s'écrit donc simplement :

$$V_{mes} = G(e^+ - e^-) = GR_c(T)I = GR_0I(1 + \alpha T) \quad (16.1)$$

La sensibilité de la mesure est donnée par $S_{mes} = \Delta V_{mes}/\Delta T = GR_0I\alpha$. Pour obtenir $S_{mes} = 0,1 \text{ V} \cdot \text{C}^{-1}$, il suffit de régler le gain de l'amplificateur à $G = 51,95$.

16.2 La tension de mesure s'écrit maintenant :

$$V_{mes,2} = G(e^+ - e^-) = G(R_c(T) + 2r)I = GI(R_0(1 + \alpha T) + 2r) \quad (16.2)$$

La résistance des fils de liaison introduit donc une erreur sur la tension de mesure donnée par $\delta V_2 = V_{mes,2} - V_{mes} = GI2r$. La résistance des fils est donnée par la loi d'Ohm, soit $r = \rho l/S = 438 \text{ m}\Omega$. L'erreur commise sur la tension de mesure est donc de $\delta V_2 = 228 \text{ mV}$, ce qui correspond à une erreur commise sur la température donnée par $\delta T_2 = \delta V_2/S_{mes} = 2,28 \text{ }^\circ\text{C}$.

16.3 Les impédances d'entrée de l'amplificateur étant infinies, on a immédiatement :

$$V_{mes,4} = G(e^+ - e^-) = GR_c(T)I = GR_0I(1 + \alpha T)$$

On retrouve un résultat identique à (16.1). La longueur des fils de liaisons ne joue plus aucun rôle et ne perturbe donc plus la mesure.

17

EXERCICE : Étalonnage direct – Évaluation des différents types d'erreurs[@]

Énoncé

On réalise l'étalonnage d'une balance. Le corps d'épreuve et les capteurs qui ne sont pas décrits ici permettent une charge maximale de 100 g. Le plateau de la balance a une masse supposée exacte de 50 g, si bien que la portée maximale utile est réduite à 50 g.

La tension de mesure V_{mes} analogique délivrée par l'électronique de conditionnement des capteurs est lue sur un microvoltmètre de précision suffisante.

On dispose de masses étalons et on réalise dix séries différentes de mesures en augmentant la charge ou en la diminuant. Les résultats sont donnés dans le tableau 17.1 où la tension de mesure V_{mes} en volt est donnée pour différentes charges (en gramme) du plateau de la balance, les symboles \uparrow ou \downarrow indiquent un cycle de mesures respectivement à charge croissante ou décroissante.

Tableau 17.1 – Tension de mesure en fonction de la charge de la balance (hors plateau)

		Charge du plateau					
		1,000	10,000	20,000	30,000	40,000	49,000
Série 1	\uparrow	5,140	6,050	7,042	8,045	9,047	9,953
Série 2	\uparrow	5,134	6,050	7,049	8,053	9,033	9,957
Série 3	\uparrow	5,143	6,043	7,039	8,045	9,051	9,929
Série 4	\uparrow	5,144	6,045	7,059	8,043	9,059	9,931
Série 5	\uparrow	5,137	6,044	7,043	8,037	9,038	9,951
Série 6	\downarrow	5,135	6,041	7,025	8,040	9,026	9,929
Série 7	\downarrow	5,141	6,044	7,038	8,038	9,041	9,939
Série 8	\downarrow	5,142	6,030	7,029	8,029	9,040	9,925
Série 9	\downarrow	5,141	6,037	7,046	8,019	9,051	9,935
Série 10	\downarrow	5,144	6,036	7,031	8,036	9,041	9,935

[@] Les données de cet exercice sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage).

17.1 Déterminer par régression linéaire la meilleure droite au sens des moindres carrés passant par ces points de mesure. On rappelle que les coefficients de la meilleure droite au sens des moindres carrés, d'équation $y = ax + b$, passant par N couples de points de mesure (x_i, y_i) sont donnés par :

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

En déduire une première estimation de la sensibilité S_{mes} de la mesure.

17.2 Évaluer l'erreur d'hystérésis e_h que l'on exprimera en pourcentage de l'étendue de mesure. Pour cela on tracera les écarts des points expérimentaux à la droite de régression linéaire en ayant soin de distinguer s'ils appartiennent à une série de mesures effectuée à charge croissante ou à charge décroissante.

17.3 Évaluer l'erreur de fidélité traduisant la dispersion des mesures autour de leurs valeurs moyennes toutes choses égales par ailleurs. En donner la valeur e_f en pourcentage de l'étendue de mesure.

17.4 Évaluer l'erreur de linéarité.

17.5 Déterminer l'erreur de zéro et conclure.

17.6 Afin d'obtenir un affichage numérique, la tension de mesure V_{mes} est passée au travers d'un convertisseur analogique-numérique 10 bits et de tension de référence $V_{ref} = 5 \text{ V}$. Déterminer l'erreur de résolution. Exprimer sa valeur e_q en pourcentage de l'étendue de mesure.

17.7 Déterminer l'erreur de précision e_p de la balance.

Corrigé détaillé

17.1 (17.1) permet de déterminer la meilleure droite au sens des moindres carrés passant par les résultats expérimentaux du tableau 17.1. Pour les valeurs de la charge, la masse du plateau est ajoutée à chacune des charges du tableau. Tous calculs faits, on trouve $a = 99,97 \text{ mV/g}$ et $b = 42,18 \text{ mV}$.

En première approximation, la sensibilité est donnée par $S_{mes} = 99,97 \text{ mV/g}$.

17.2 À partir de ce résultat, on évalue pour les différentes valeurs de charge, l'écart entre les mesures du tableau 17.1 et les valeurs données par la droite des moindres carrés. Les résultats figurent sur la courbe de la figure 17.1.

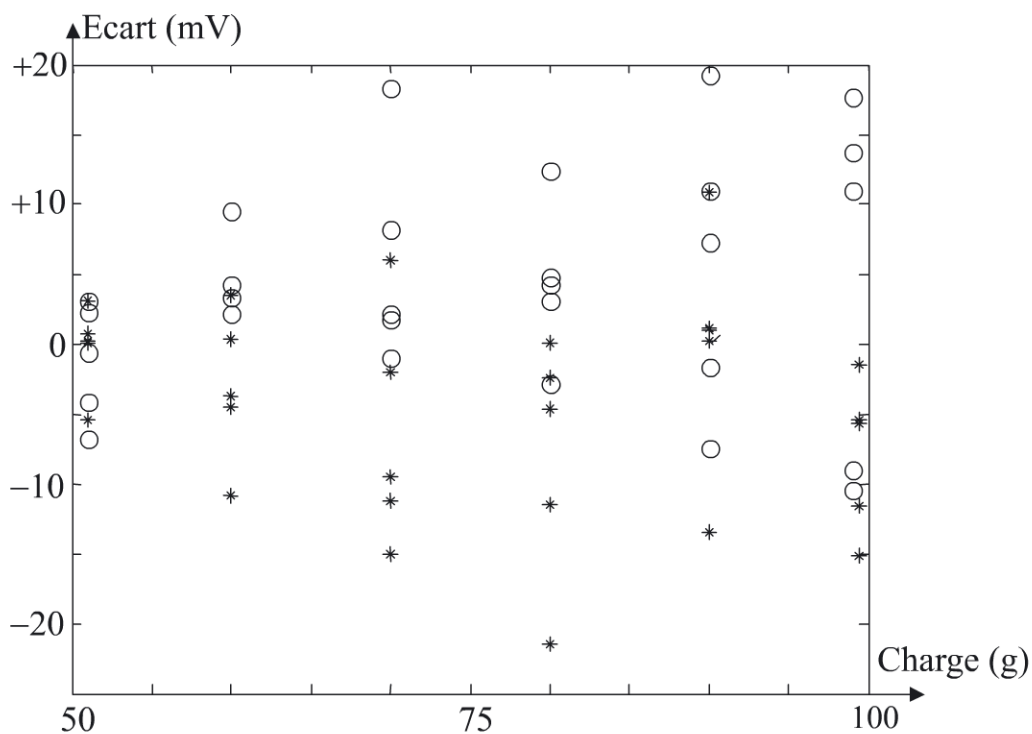


Figure 17.1 – Écarts en mV à la droite de régression,
 ○ charge totale croissante et * charge totale décroissante

Au vu de ce résultat, il semble qu'à charge donnée il existe une différence entre les mesures faites à charge croissante et celle faites à charge décroissante. Un effet d'hystérésis est donc à prendre en compte. Une estimation de l'erreur d'hystérésis peut être donnée en effectuant les moyennes des écarts sur les différentes séries pour chaque charge (élimination de la dispersion ou erreur de fidélité). Les résultats sont reportés figure 17.2.

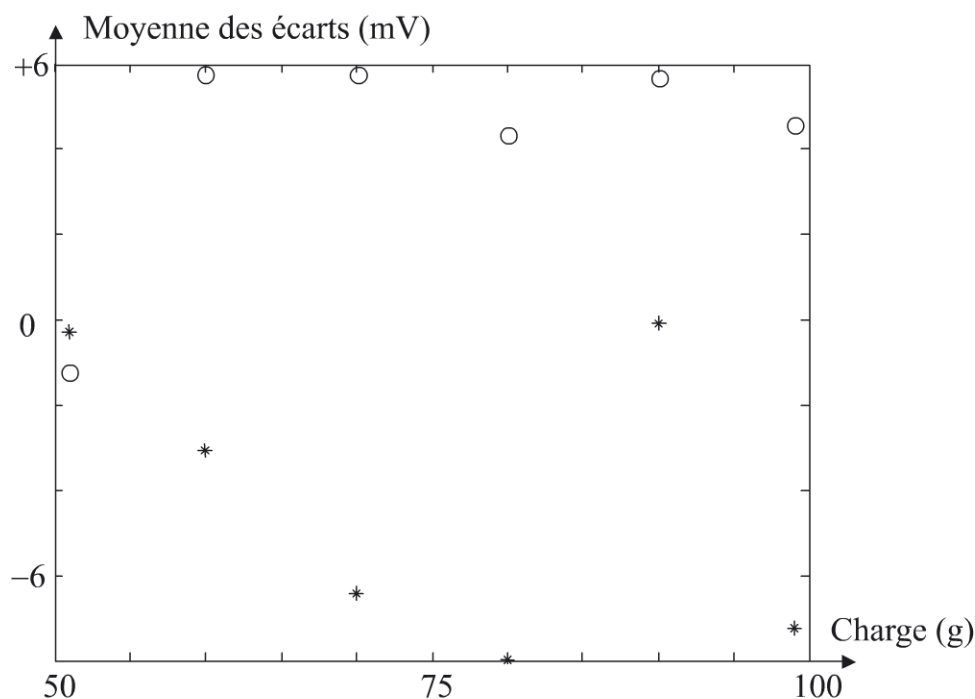


Figure 17.2 - Moyenne des écarts en mV à la droite de régression,
○ charge totale croissante et * charge totale décroissante

L'écart d'hystérésis est estimé par la plus grande des valeurs, soit -8 mV pour une charge de 30 g du plateau. Compte tenu de l'estimation de la sensibilité, ceci correspond à $-8 \text{ mV}/99,97 \text{ mV.g}^{-1} \approx -0,08$ g. En divisant ce résultat par l'étendue de mesure $E.M.$, on obtient l'erreur d'hystérésis $e_h = \pm 0,08 \text{ g}/50 \text{ g} = \pm 0,16 \%$ de l'étendue de mesure.

17.3 On calcule les écarts-types des données à même charge en séparant mesures à charge croissante et mesures à charge décroissante de façon à supprimer l'effet de l'erreur d'hystérésis, cette dernière n'étant pas négligeable. Pour les deux fois cinq groupes de mesures, on obtient les écarts-types (exprimés en mV) regroupés dans le tableau 17.2.

Tableau 17.2 - Écarts-types des mesures

	Charge du plateau					
	1,000	10,000	20,000	30,000	40,000	49,000
↑	4,2	3,5	7,7	5,4	10,5	13,3
↓	3,2	5,4	8,4	8,7	8,7	5,5

L'écart de fidélité est estimé à deux fois la plus grande de ces valeurs, soit environ 27 mV pour une charge de 50 g du plateau. Compte tenu de l'estimation de la sensibilité, ceci correspond à $27 \text{ mV}/99,97 \text{ mV.g}^{-1} \approx 0,27$ g.

17 • Étalonnage direct – Évaluation des différents types d'erreurs

En divisant ce résultat par l'étendue de mesure $E.M.$, on obtient l'erreur de finesse $e_f = \pm 0,27 \text{ g}/50 \text{ g} = \pm 0,53 \%$ de l'étendue de mesure.

17.4 Pour dissocier l'erreur de linéarité de l'erreur d'hystérésis, cette dernière n'étant pas négligeable, il est nécessaire de traiter séparément les données à charge croissante de celles à charge décroissante. De nouvelles régressions linéaires sur ces données prises séparément donnent $a_{\uparrow} = 100,54 \text{ mV/g}$ et $b_{\uparrow} = 40,42 \text{ mV}$ à charge croissante et $a_{\downarrow} = 99,90 \text{ mV/g}$ et $b_{\downarrow} = 43,94 \text{ mV}$ à charge décroissante.

À partir de ces valeurs, on peut déterminer l'écart des valeurs moyennes pour chaque groupe de mesures à charge donnée à la droite de régression correspondant. Ces résultats, exprimés en mV, sont reportés dans le tableau 17.3.

Tableau 17.3 – Écarts des moyennes aux droites de régression

	Charge du plateau					
	1,000	10,000	20,000	30,000	40,000	49,000
↑	-3,5	+2,8	+2,1	-0,2	+0,3	-1,5
↓	+2,0	-0,1	-2,6	-3,4	+5,3	-1,2

Ces valeurs ne semblent pas exprimer de tendance et de plus elles restent toujours inférieures aux écarts-types du tableau 17.2. En l'état, on ne peut donc pas conclure qu'il existe une erreur de linéarité.

17.5 L'erreur de zéro qui amène une erreur de justesse peut être estimée grâce à la régression effectuée à la question 1, soit $42,2 \text{ mV}$, ce qui correspond à la moyenne des erreurs de zéro déterminées par les deux régressions de la question 4. Cette erreur se reproduisant toujours identiquement à elle-même, il est licite de la retrancher des valeurs en jouant sur le réglage du zéro de l'électronique de conditionnement. Pour la suite, on considérera que ceci a été effectué.

17.6 On commence par retrancher 5 V (tension précise disponible puisque c'est la tension de référence du convertisseur) de façon à ramener l'excursion de V_{mes} entre 0 et 5 V . Le convertisseur étant un convertisseur 10 bits et la tension de référence de 5 V , la valeur q du quantum est environ 5 mV , $q = 5 \text{ V}/1024 = 4,88 \text{ mV}$ plus exactement. L'erreur de résolution est donc $\pm 2,5 \text{ mV}$ ce qui donne $\pm 0,025 \text{ g}$ compte tenu de la sensibilité. En pourcentage de l'étendue de mesure, l'erreur de résolution est $e_q = 0,05 \%$.

17.7 Les différents types d'erreurs étant non-corrélés et la correction de l'erreur de zéro étant supposée effectuée, l'erreur de précision de la balance est donnée par $e_p = \sqrt{e_h^2 + e_f^2 + e_q^2}$ soit tous calculs faits $\pm 0,55 \%$ de l'étendue de mesure soit encore $\pm 0,28 \text{ g}$.

EXERCICE : Correction de la dérive thermique d'un pont d'extensométrie push-pull à quatre jauges

Énoncé

On considère le pont de la figure 18.1 constitué de quatre jauges d'extensométrie.

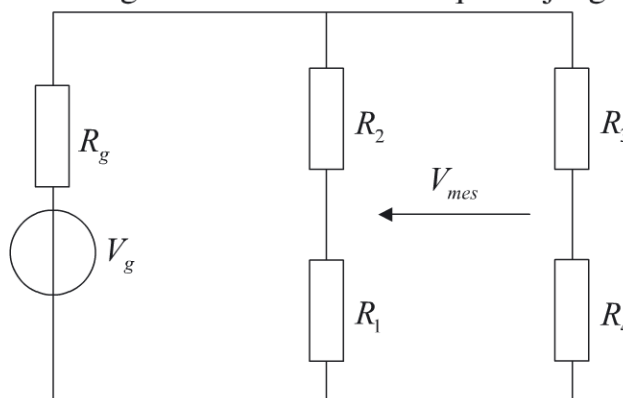


Figure 18.1 - Circuit de conditionnement en pont

Les quatre jauges du pont sont identiques, de valeur de résistance au repos $R_0 = 120 \Omega$ et de facteur de jauge $K_0 = 2$ à la température $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ considérée comme température de référence. Les jauges sont collées sur une structure qui leur transmet une déformation $\pm \varepsilon$, le pont fonctionnant en mode push-pull complet.

On note α_R le coefficient d'évolution thermique de la résistance d'une jauge au repos, c'est-à-dire que l'on a $R = R_0(1 + \alpha_R T)$ avec $\alpha_R = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. De même on note $\alpha_K = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ le coefficient d'évolution thermique du facteur de jauge, c'est-à-dire que l'on a $K = K_0(1 + \alpha_K T)$.

18.1 Donner l'expression de V_{mes} en fonction de V_g , R_g , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

18.2 Établir les expressions de R_1 , R_2 , R_3 et R_4 à $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ et donner l'expression de V_{mes} en fonction de K_0 , ε , R_0 , R_g et V_g . Calculer la sensibilité réduite $S_r = V_{mes}/\varepsilon \cdot V_g$.

18 • Correction de la dérive thermique d'un pont d'extensométrie push-pull ...

18.3 La température est maintenant T . Donner les nouvelles expressions des résistances des jauges et donner au premier ordre en T l'expression de la variation de la résistance de la jauge liée à la déformation ε .

18.4 Établir la nouvelle expression de la tension de mesure.

18.5 Pour que la tension de mesure soit indépendante de la température, on place en série avec la résistance R_g de la source, une résistance de compensation dont la valeur de la résistance est donnée en fonction de la température par $R_c = R_{c0}(1 + \alpha_c T)$. Quelle relation doit vérifier α_c ? On donne $R_g = 50 \Omega$ et $R_{c0} = 120 \Omega$.

18.6 Déterminer l'expression de la nouvelle tension de mesure et calculer la nouvelle sensibilité réduite.

Corrigé détaillé

18.1 On a immédiatement d'après la figure 18.1 :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \cdot (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4) \cdot \frac{V_g}{R_g + (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)} \\ &= \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_g(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} V_g \end{aligned} \quad (18.1)$$

18.2 À $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, le pont fonctionnant en push-pull complet, on a :

$$R_1 = R_0 [1 + K_0 \varepsilon] \quad R_2 = R_0 [1 - K_0 \varepsilon]$$

$$R_3 = R_0 [1 + K_0 \varepsilon] \quad R_4 = R_0 [1 - K_0 \varepsilon]$$

Soit en remplaçant dans (18.1) :

$$V_{mes} = K_0 \varepsilon \frac{R_0}{R_0 + R_g} V_g$$

La sensibilité réduite est donnée par :

$$S_r = K_0 \frac{R_0}{R_0 + R_g} \quad (18.2)$$

18.3 Compte tenu de l'évolution de la résistance au repos et de l'évolution du coefficient de jauge, on a maintenant :

$$R_1 = R_0(1 + \alpha_R T) [1 + K_0(1 + \alpha_K T)\varepsilon] \quad R_3 = R_0(1 + \alpha_R T) [1 + K_0(1 + \alpha_K T)\varepsilon]$$

$$R_2 = R_0(1 + \alpha_R T) [1 - K_0(1 + \alpha_K T)\varepsilon] \quad R_4 = R_0(1 + \alpha_R T) [1 - K_0(1 + \alpha_K T)\varepsilon]$$

Au premier ordre en T , on peut écrire avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} R_i &= R_0(1 + \alpha_R T) + R_0(1 + \alpha_R T)(-1)^{i+1} K_0(1 + \alpha_K T)\varepsilon \\ &\simeq R_0(1 + \alpha_R T) + (-1)^{i+1} K_0 R_0 [1 + (\alpha_R + \alpha_K)T] \varepsilon \\ &= R_0(1 + \alpha_R T) + (-1)^{i+1} K_0 R_0(1 + \beta T)\varepsilon \end{aligned}$$

On a $\beta = \alpha_R + \alpha_K = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

18.4 L'expression de la tension de mesure devient tous calculs faits :

$$V_{mes} = \frac{R_0 K_0 \varepsilon (1 + \beta T)}{R_0(1 + \alpha_R T) + R_g} V_g \quad (18.3)$$

18.5 Pour obtenir la nouvelle expression de la tension de mesure, il suffit de remplacer dans (18.3) R_g par $R_g + R_c = R_g + R_{c0}(1 + \alpha_c T)$. Il vient :

$$V_{mes} = \frac{R_0 K_0 \varepsilon (1 + \beta T)}{R_0(1 + \alpha_R T) + R_g + R_{c0}(1 + \alpha_c T)} V_g$$

Pour que V_{mes} soit indépendant de la température, il suffit que $\partial V_{mes} / \partial T = 0$, soit tous calculs faits :

$$\alpha_c = \frac{\beta(R_0 + R_{c0} + R_g) - \alpha_R R_0}{R_{c0}} = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

18.6 La tension de mesure s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \frac{R_0 K_0 \varepsilon (1 + \beta T)}{R_0(1 + \alpha_R T) + R_g + R_{c0} + \beta(R_0 + R_g + R_{c0})T - R_0 \alpha_R T} V_g \\ &= \frac{R_0 K_0 \varepsilon}{R_0 + R_g + R_{c0}} V_g \end{aligned}$$

La nouvelle expression de la sensibilité réduite est donnée par :

$$S_r = K_0 \frac{R_0}{R_0 + R_{c0} + R_g} \quad (18.4)$$

La suppression, au premier ordre, de la dépendance à la température s'effectue en contrepartie d'une baisse de la sensibilité puisque l'expression de S_r donnée par (18.4) est clairement inférieure à celle donnée par (18.2).

19

EXERCICE : Linéarisation du rapport potentiométrique – Mesure d'intensité lumineuse[@]

Énoncé

On considère une photorésistance ou LDR dont la résistance varie avec l'éclairement E auquel elle est soumise. La caractéristique de la photorésistance est donnée par $R = R_{Obsc}/R_E$ où R_{Obsc} est la résistance présentée dans l'obscurité et où $R_E = KE^{-\alpha}$ avec K et α des constantes.

Un étalonnage a été réalisé à l'aide d'un luxmètre et d'un ohmmètre de précision. Les résultats sont reportés dans le tableau 19.1.

Tableau 19.1- Étalonnage de la LDR

E (lx)	5013	4128	3321	2415	1558	1001	951	820
R (k Ω)	0,141	0,179	0,242	0,329	0,525	0,970	0,990	1,140
E (lx)	710	621	507	433	312	201	105	55
R (k Ω)	1,375	1,511	2,041	2,377	3,524	5,362	12,826	25,512

Dans l'obscurité totale, la LDR présente une résistance $R_{Obsc} = 6,032 \text{ M}\Omega$.

19.1 Déterminer les caractéristiques de la LDR.

19.2 La LDR est montée en série avec une résistance variable R_v . Le dipôle ainsi constitué est alimenté par une source de tension de fem $V_g = 5 \text{ V}$ et de résistance interne négligeable. La tension de mesure V_{mes} est prise aux bornes de la LDR. Quelle valeur doit-on donner à R_v de façon à linéariser la mesure de l'éclairement autour de la valeur $E_0 = 1000 \text{ lux}$?

19.3 Calculer l'erreur de linéarité résiduelle.

[@] Les données de cet exercice sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage).

19.1 Compte tenu de la valeur maximale de R donnée dans le tableau 19.1 et de la valeur de R_{Obsc} , on peut considérer que pour les valeurs d'éclairement données on a $R \approx KE^{-\alpha}$. En prenant le logarithme de cette expression, on obtient $\ln R = \ln K - \alpha \ln E$. Une régression linéaire au sens des moindres carrés amène $\alpha = 1,148$ et $\ln K = 14,752$ (voir figure 19.1). En première approximation, sur l'étendue de mesure donnée, la résistance de la LDR peut donc s'écrire :

$$R \approx KE^{-\alpha} = 2,551 \cdot 10^6 E^{-1,148} \Omega \quad (19.1)$$

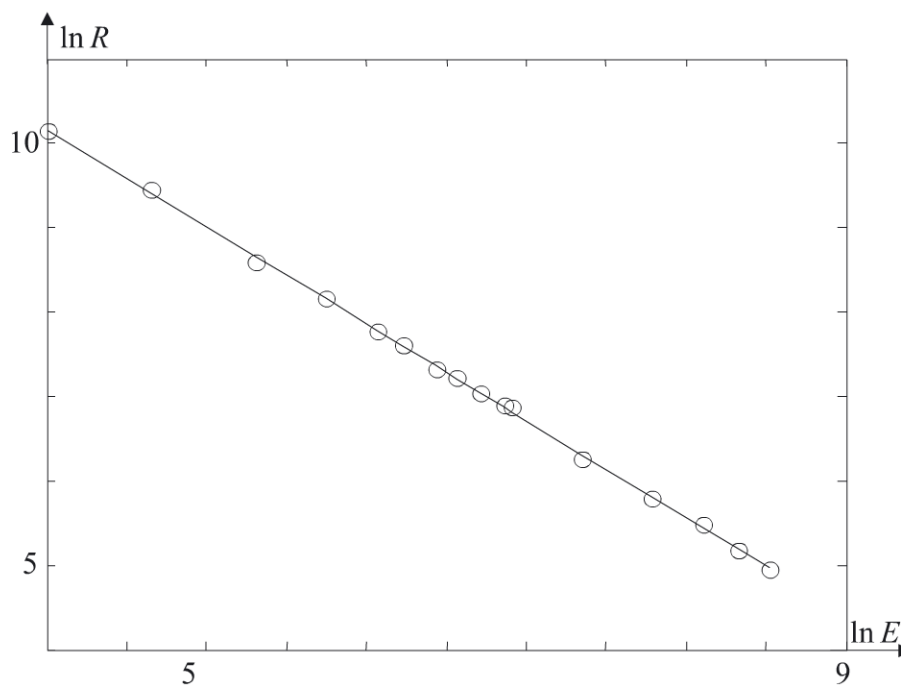


Figure 19.1- Points d'étalonnage et droite de régression par les moindres carrés

19.2 La tension de mesure est donnée par :

$$V_{mes} = \frac{R}{R + R_v} V_g$$

Pour que cette tension de mesure soit la plus linéaire possible autour de $E_0 = 1000 \text{ lx}$, il suffit qu'en ce point, la tension de mesure présente un point d'inflexion, soit :

$$\left. \frac{d^2 V_{mes}}{dE^2} \right|_{E_0} = 0 \quad (19.2)$$

19 • Linéarisation du rapport potentiométrique – Mesure d'intensité lumineuse

On pose $R_0 = R(E_0)$. Tous calculs faits, (19.2) entraîne :

$$R_v = \frac{2 \left(\frac{dR}{dE} \Big|_{E_0} \right)^2}{\frac{d^2R}{dE^2} \Big|_{E_0}} - R_0 \quad (19.3)$$

Avec (19.1), on obtient :

$$\frac{dR}{dE} = -\alpha E^{-1} R \quad \text{et} \quad \frac{d^2R}{dE^2} = \alpha(\alpha + 1) E^{-2} R \quad (19.4)$$

En remplaçant (19.4) dans (19.3), il vient :

$$R_v = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} R_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} K E_0^{-\alpha} = 63,211 \, \Omega \quad (19.5)$$

On remarque selon (19.5) que cette technique de linéarisation n'est possible que si $\alpha > 1$.

Comme le montre la figure 19.2, le fonctionnement autour du point $E_0 = 1000 \text{ lx}$ est quasiment linéaire. Le décalage entre la position réelle du point d'inflexion pour $E \simeq 1275 \text{ lx}$ et $E_0 = 1000 \text{ lx}$ provient de l'effet des erreurs expérimentales sur les données (tableau 19.1) et de l'approximation $R \simeq R_E$.

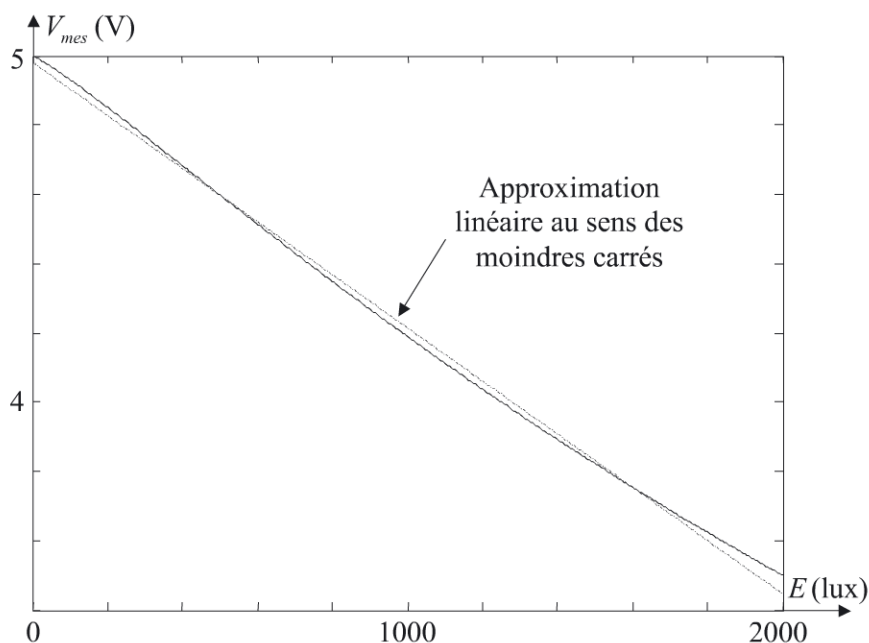


Figure 19.2 - Tension de mesure

19.3 Une régression linéaire sur l'étendue de mesure [55 lx ; 5013 lx] donne en volt l'approximation linéaire suivante de V_{mes} , $V_{mes,lin} = -3,110 \cdot 10^{-4} \cdot E + 4,9785$. L'écart de linéarité est de 54 mV, ce qui conduit à une non-linéarité résiduelle de l'ordre de 3,5 %.

EXERCICE :

Capteur de pression sonore aquatique piézoélectrique

Énoncé

I. Étude du capteur

On cherche à réaliser un capteur de pression dynamique à partir d'un matériau piézoélectrique. On rappelle que pour un matériau piézoélectrique, l'excitation électrique \vec{D} et la polarisation \vec{P} sont reliées au tenseur de contrainte $\vec{\sigma}$ et au champ électrique \vec{E} par :

$$\vec{D} = \vec{d}\vec{\sigma} + \vec{\varepsilon}\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{P} = \vec{d}\vec{\sigma} + \varepsilon_0\vec{\chi}\vec{E}$$

avec :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \vec{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(1 + \chi_{ij})$$

Pour ce matériau, dans la base des vecteurs propres de la susceptibilité on a $\forall i$, $\varepsilon_{ii} = 11\varepsilon_0$. Le tenseur piézoélectrique prend alors la forme :

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{xzx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{yyz} & 0 & 0 \\ d_{zxx} & d_{zyy} & d_{zzz} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20.1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \cdot 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 \\ 20 \cdot 10^{-12} & 2 \cdot 10^{-12} & -30 \cdot 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

20.1 Expliciter précisément dans le cas général, les différentes contraintes qui peuvent engendrer différentes composantes de polarisation du matériau.

20 • Capteur de pression sonore aquatique piézoélectrique

20.2 Dans le cas de la mesure de la pression p_0 d'un fluide isobare, quelles sont les seules contraintes qui subsistent ? Quelle relation les relie entre elles ? En déduire les faces d'un bloc du matériau qu'il faut métalliser pour réaliser un capteur de pression piézoélectrique (voir figure 20.1) ?

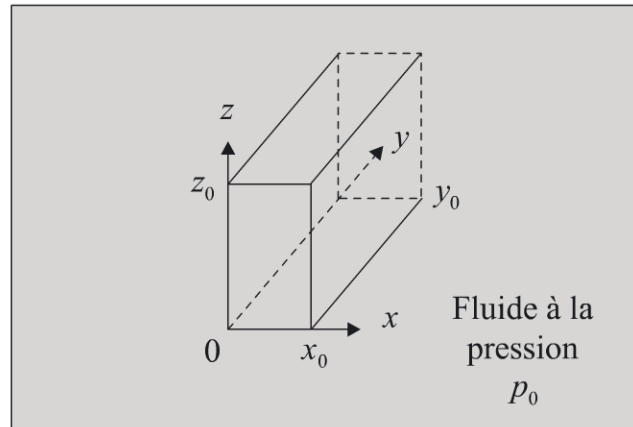


Figure 20.1 - Bloc de matériau piézoélectrique

20.3 Montrer que dans ce cas la partie de la polarisation liée à la contrainte (c'est-à-dire $\vec{d} \cdot \vec{\sigma}$) n'a qu'une composante selon z qui s'écrit kp_0 .

20.4 À partir de l'expression de l'excitation électrique \vec{D} , montrer que le générateur de courant I_g ainsi créé est de la forme :

$$I_g = K \frac{dp_0}{dt} = x_0 y_0 \frac{dD_z}{dt} + C_g \frac{dV}{dt} \quad (20.2)$$

On précisera l'expression de K et celle de C_g (capacité du condensateur constitué par les métallisations et aux bornes duquel est présente la tension V) en fonction de x_0 , y_0 , z_0 , k et ε_{zz} . On donne $x_0 = y_0 = 1 \text{ cm}$ et $z_0 = 1 \text{ mm}$. On rappelle que $\varepsilon_{zz} = 11\varepsilon_0$ et que $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

20.5 Déterminer la résistance de fuite R_g (résistance interne) du condensateur ainsi réalisé. On donne la résistivité du matériau diélectrique utilisé, $\rho = 10^{13} \Omega.m$.

II. Électronique de conditionnement

On considère que ce capteur est connecté à un amplificateur de charge (schéma figure 20.2) où l'amplificateur opérationnel, de gain en boucle ouverte A , ne peut être considéré idéal. Le câble est de résistance de fuite $R_c = 500 \text{ M}\Omega$ et de capacité parasite $C_c = 1 \text{ pF}$. La capacité de contre-réaction de l'amplificateur est $C_0 = 10 \text{ pF}$.

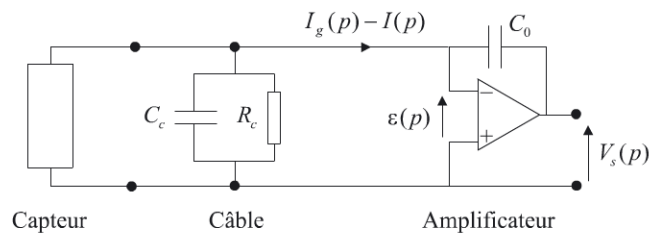


Figure 20.2 - Montage de conditionnement du capteur

20.6 Donner dans le domaine de Laplace le schéma électrique équivalent du capteur.

20.7 En posant $R = R_g // R_c$ et $C = C_g + C_c$, donner l'expression de la tension de sortie $V_s(p)$ dans le domaine de Laplace, puis celle de la fonction de transfert $H(p) = V_s(p)/p_0(p)$ du montage.

Que devient $V_s(p)$ si A peut être considéré comme infini ?

20.8 Conclure quant à la forme de cette fonction de transfert.

20.9 Donner l'expression de la pulsation de coupure ω_c du montage. On donne $A = 10^4$.

20.10 Donner l'expression du gain G_0 dans la bande passante.

20.11 Réécrire l'expression de la fonction de transfert de la question II.2 en fonction de G_0 et ω_c .

On s'intéresse maintenant à l'utilisation de ce système qui sera placé à l'arrière d'une hélice. Dès que la vitesse de rotation de l'hélice est suffisante, elle crée dans son sillage un tourbillon dans lequel apparaissent des zones de dépression. L'eau se vaporise pour former des bulles de vapeur d'eau, c'est le phénomène de cavitation. Ces bulles implosent dès qu'elles se retrouvent dans une zone où la pression est suffisante. Ces implosions créent des trains d'ondes sonores qui se propagent (voir figure 20.3). La répartition temporelle et l'intensité de ces implosions sont caractéristiques de l'hélice et de sa vitesse (signature de l'hélice). Le phénomène de cavitation est néfaste et diminue le rendement de la propulsion.

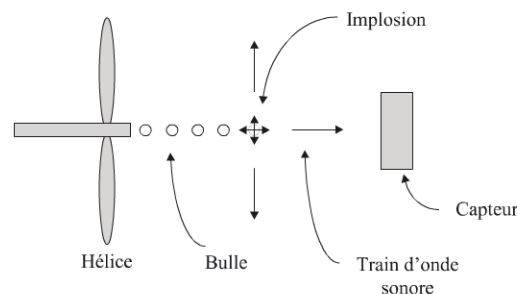


Figure 20.3 - Mesure de la signature de l'hélice

L'expérience montre que pour l'hélice étudiée, l'implosion d'une bulle induit une onde de surpression dont le spectre en fréquence contient principalement des composantes hautes fréquences ($\omega \gg \omega_c$). L'amplitude moyenne Δp des surpressions par rapport à la pression normale du fluide est de l'ordre de 10^3 Pa et on peut supposer que cette surpression est de longueur d'onde bien supérieure aux dimensions du bloc du matériau piézoélectrique.

20.12 Calculer dans ce cas l'amplitude de la tension V_s caractéristique de l'implosion d'une bulle.

Corrigé détaillé

I. Étude du capteur

20.1 Vu la forme (20.1) du tenseur diélectrique, on remarque qu'une polarisation P_x peut prendre naissance dans la direction x sous une contrainte du type σ_{zx} . De même, une polarisation P_y peut prendre naissance sous une contrainte σ_{yz} et une polarisation P_z sous des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} ou σ_{zz} .

20.2 Dans le cas de l'immersion dans un fluide, seule une contrainte hydrostatique subsiste et on a $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p_0$ et $\sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0$. Une seule polarisation apparaît alors selon la direction z . Il faut donc métalliser les faces perpendiculaires à la direction z de façon à réaliser un condensateur.

20.3 P_z est donnée dans ce cas par :

$$P_z = d_{zxx}\sigma_{xx} + d_{zyy}\sigma_{yy} + d_{zzz}\sigma_{zz} = -p_0(d_{zxx} + d_{zyy} + d_{zzz}) = kp_0$$

Compte tenu des valeurs des coefficients du tenseur diélectrique, il vient $k = 8.10^{-12} \text{ C.N}^{-1}$.

20.4 Selon l'axe z , on a $D_z = P_z + \varepsilon_{zz}E_z = kp_0 + \varepsilon_{zz}E_z$, soit en multipliant par la surface x_0y_0 des métallisations et en dérivant par rapport au temps :

$$x_0y_0 \frac{dD_z}{dt} = kx_0y_0 \frac{dp_0}{dt} + \varepsilon_{zz}x_0y_0 \frac{dE_z}{dt}$$

En négligeant les effets de bords, on a $E_z = -V/z_0$ où V représente la tension aux bornes du condensateur plan réalisé par les métallisations du bloc piézoélectrique.

On a alors :

$$x_0y_0 \frac{dD_z}{dt} = kx_0y_0 \frac{dp_0}{dt} - \varepsilon_{zz} \frac{x_0y_0}{z_0} \frac{dV}{dt}$$

Or $\varepsilon_{zz}x_0y_0/z_0$ n'est rien d'autre que la capacité C_g du condensateur plan.

$C_g dV/dt$ représente le courant circulant dans le condensateur et $x_0y_0 dD_z/dt$ le courant délivré au circuit extérieur. $kx_0y_0 dp_0/dt = K dp_0/dt$ représente donc le générateur de courant constituant un des éléments du schéma équivalent du capteur. On a :

$$I_g = K \frac{dp_0}{dt} = x_0y_0 \frac{dD_z}{dt} + C_g \frac{dV}{dt}$$

Ceci correspond bien à la forme proposée par l'équation (20.2). Numériquement on obtient :

$$K = 8.10^{-16} \text{ A.s.Pa}^{-1} \quad \text{et} \quad C_g = 9,72 \text{ pF}$$

20.5 La résistance de fuite du condensateur est donnée par la loi d'Ohm :

$$R_g = \rho \frac{z_0}{x_0y_0} = 10^8 \text{ M}\Omega$$

II. Électronique de conditionnement

20.6 Dans le domaine de Laplace, le système est donc équivalent à un générateur de courant I_g schématisé figure 20.4 ci-dessous.

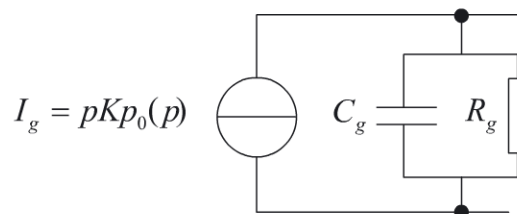


Figure 20.4- Générateur de courant équivalent

20.7 Dans le domaine de Laplace, la tension de sortie peut s'écrire :

$$V_s(p) = -A\varepsilon(p) = \varepsilon(p) - \frac{I_g(p) - I(p)}{C_0p} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(p) = \frac{R}{1 + RCp} I(p) \quad (20.3)$$

Il vient en résolvant (20.3) :

$$V_s(p) = -\frac{ARI_g(p)}{1 + RCp + RC_0(1 + A)p}$$

En posant $I_g(p) = pKp_0(p)$ on obtient la fonction de transfert du montage :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{p_0(p)} = -\frac{ARKp}{1 + RCp + RC_0(1 + A)p} \quad (20.4)$$

20 • Capteur de pression sonore aquatique piézoélectrique

Si A peut être considéré comme infini, on obtient :

$$V_s(p) = \frac{I_g(p)}{C_0 p}$$

Le montage réalise une intégration du courant $I_g(p)$.

20.8 (20.4) constitue la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre.

20.9 Sa pulsation de coupure est simplement donnée par :

$$\omega_c = \frac{1}{R(C + (1 + A)C_0)} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$$

20.10 Dans la bande passante, donc à hautes fréquences, le gain G_0 est donné par :

$$G_0 = -\frac{AKR}{R(C + (1 + A)C_0)} \simeq -\frac{K}{C_0} \simeq -8 \cdot 10^{-5} \text{ V.Pa}^{-1} \quad (20.5)$$

20.11 En utilisant les expressions (20.4) et (20.5), la fonction de transfert s'écrit plus simplement :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{p_0(p)} = G_0 \frac{p}{p + \omega_c}$$

20.12 On se trouve dans la bande passante du capteur ($\omega \gg \omega_c$) et comme la longueur d'onde est grande devant les dimensions du capteur, la surpression est ressentie comme une surpression hydrostatique. On a donc simplement :

$$V_s = G_0 \Delta p = -80 \text{ mV}$$

EXERCICE : Qualification en production d'un capteur à réluctance variable

Énoncé

On considère une production de capteurs de proximité inductifs. Leur principe est celui d'une inductance dont la valeur varie en fonction de la distance à une cible ferromagnétique (voir figure 21.1).

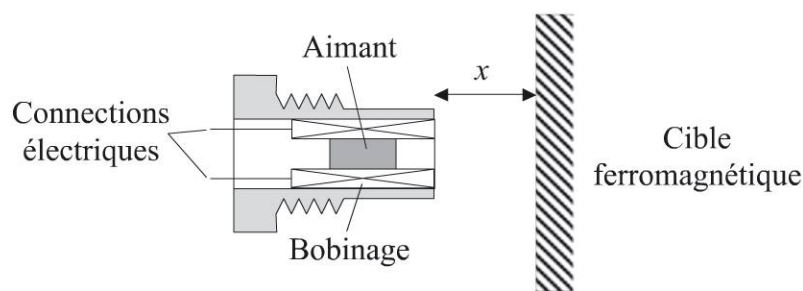


Figure 21.1 - Tête à réluctance variable

Un client commande une grosse quantité de ces capteurs qui ne seront utilisés, au maximum, que sur l'étendue de mesure $E.M.$ définie par les distances extrêmes $x_1 = 2 \text{ mm}$ et $x_2 = 16 \text{ mm}$. Chaque inductance doit être testée afin de garantir une sensibilité et une non-linéarité restant dans des tolérances imposées par le client. Pour rester compatible avec ses impératifs de production, le fabricant ne peut se permettre de tester chaque inductance que pour trois distances à la cible.

Le fabricant règle ses paramètres de production de façon à ce que la caractéristique moyenne des inductances soit :

$$L(x) = \frac{L(x=0)}{(1+kx)^2} \quad (21.1)$$

On donne $L(x=0) = 150 \mu\text{H}$ et $k = 45.10^{-3} \text{ mm}^{-1}$

21 • Qualification en production d'un capteur à réductance variable

21.1 Déterminer la sensibilité réelle $S_c(x)$ de l'inductance et la calculer au point milieu de l'étendue de mesure.

21.2 Les distances auxquelles on mesure la valeur de l'inductance de chaque capteur sont $x_1 = 2$ mm, $x_2 = 16$ mm et la distance moyenne $x_0 = 9$ mm.

Calculer les valeurs des inductances correspondantes pour une caractéristique idéale donnée par (21.1).

21.3 Déterminer l'équation de la meilleure droite (D_3) au sens des moindres carrés. On rappelle que les coefficients de la meilleure droite au sens des moindres carrés, d'équation $y = ax + b$ et passant par N couples de points de mesure (x_i, y_i) , sont donnés par :

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (21.2)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

21.4 Tracer la caractéristique idéale et la droite (D_3) de régression. En déduire une approximation S_3 de la sensibilité et l'erreur de linéarité ε_3 donnée par le plus grand écart en valeur absolue entre la caractéristique idéale et la droite de régression, écart normalisé à l'excursion de la valeur de l'inductance sur l'étendue de mesure.

21.5 À partir des courbes de la question précédente, montrer que la régression par les moindres carrés, n'est pas la méthode la plus adaptée pour déterminer la meilleure droite approchant la caractéristique réelle.

21.6 Cette constatation peut amener le constructeur à rejeter une inductance comme non-conforme en surestimant son erreur de linéarité. Pour pallier le problème, on utilise une deuxième droite construite comme suit. On détermine tout d'abord l'équation de la droite (D_2) passant par les deux extrémités de l'étendue de mesure puis celle de la droite (D_1) passant par le milieu de l'étendue de mesure et parallèle à la première. La meilleure droite, notée (D_m), approchant au mieux la caractéristique idéale, sera prise égale à la moyenne des deux droites précédentes. Déterminer l'équation de (D_m).

21.7 Tracer la caractéristique idéale et la droite (D_m). Quelles sont alors l'approximation S_m de la sensibilité et l'erreur de linéarité ε_m ?

21.8 Sur un composant idéal, déterminer en mm l'erreur de linéarité que le constructeur peut garantir.

Corrigé détaillé

21.1 La sensibilité est donnée par :

$$S_c = \frac{dL(x)}{dx} = -\frac{2kL(x=0)}{(1+kx)^3} \quad (21.3)$$

Au milieu de l'étendue de mesure proposée, c'est-à-dire en $x_0 = 9$ mm, on a $S_c(x_0) = -4,87 \mu\text{H}/\text{mm}$.

21.2 Avec (21.1), il vient immédiatement pour $x_1 = 2$ mm, $x_2 = 16$ mm et $x_0 = 9$ mm respectivement $L_1 = 126,25 \mu\text{H}$, $L_2 = 50,70 \mu\text{H}$ et $L_0 = 75,99 \mu\text{H}$.

21.3 Avec (21.2), les trois couples de points précédents donnent $a_3 = -5,40 \mu\text{H}/\text{mm}$ et $b_3 = 132,88 \mu\text{H}$.

21.4 La caractéristique idéale et la droite de régression par les moindres carrés sont représentées figure 21.2.

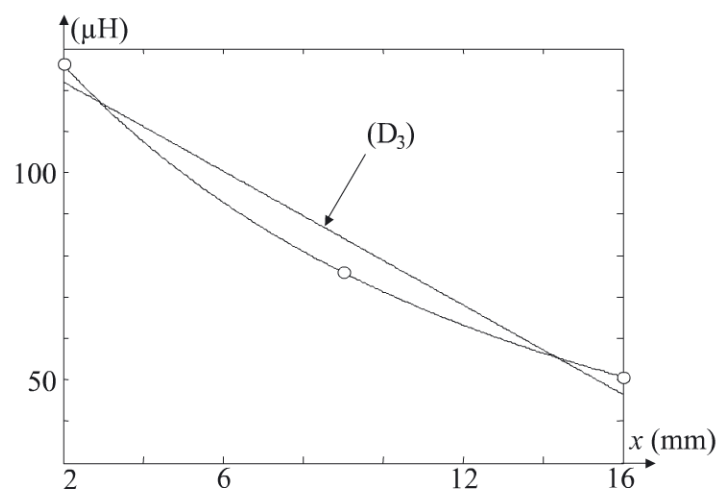


Figure 21.2 - Caractéristique idéale et droite de régression

L'approximation S_3 de la sensibilité n'est rien d'autre que le coefficient directeur de la droite de régression, soit $S_3 = -5,40 \mu\text{H}/\text{mm}$.

21 • Qualification en production d'un capteur à réductance variable

Pour obtenir l'erreur de linéarité ε_3 on trace l'écart en valeur absolue entre la droite de régression et la caractéristique idéale (voir figure 21.3).

La figure 21.3 montre clairement que l'écart maximal est d'environ $8,6 \mu\text{H}$ pour $x = 8 \text{ mm}$. Sur l'étendue de mesure, l'excursion de la valeur de l'inductance est de $126,25 - 50,70 = 75,55 \mu\text{H}$, ce qui entraîne une erreur de linéarité $\varepsilon_3 = 11,4 \% E.M.$

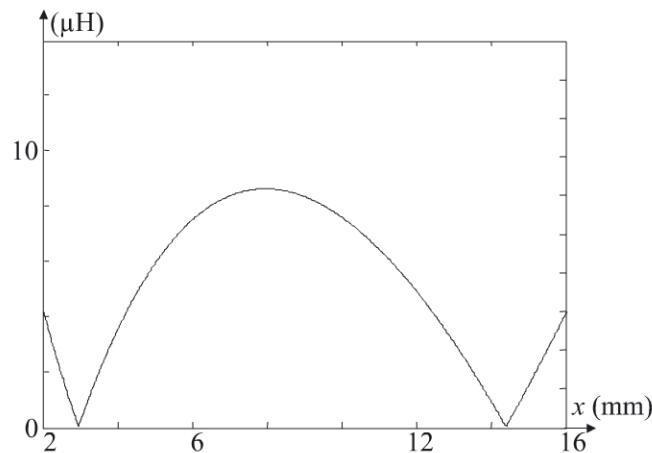


Figure 21.3 - Valeur absolue de l'écart entre la caractéristique idéale et la droite de régression

21.5 Sur les courbes de la figure 21.2 et 21.3, il apparaît clairement que la droite de régression par les moindres carrés n'est pas la meilleure droite approchant la caractéristique réelle. En effet, cette droite s'écarte trop de la caractéristique réelle au milieu de l'étendue de mesure. L'idéal serait de pouvoir ramener l'écart, en valeur absolue, à la même valeur au milieu de l'étendue de mesure qu'à ses extrémités.

21.6 L'équation de la droite (D_2) passant par les deux couples de points extrêmes de l'étendue de mesure est donnée par :

$$L = a_2x + b_2 = \frac{L_1 - L_2}{x_1 - x_2}x + \frac{L_2x_1 - L_1x_2}{x_1 - x_2}$$

Après calcul, on obtient $a_2 = -5,40 \mu\text{H}/\text{mm}$ et $b_2 = 137,04 \mu\text{H}$.

L'équation de la droite (D_1) passant par le milieu de l'étendue de mesure et parallèle à (D_2) est donnée par :

$$L = a_1x + b_1 = a_2x + (L_0 - a_2x_0)$$

Après calcul, on obtient $a_1 = -5,40 \mu\text{H}/\text{mm}$ et $b_1 = 124,55 \mu\text{H}$.

La droite moyenne (D_m) est donc d'équation :

$$L = a_mx + b_m = a_2x + \frac{b_1 + b_2}{2}$$

Après calcul, on obtient $a_m = -5,40 \mu\text{H}/\text{mm}$ et $b_m = 130,80 \mu\text{H}$.

21.7 Les droites (D_3) , (D_2) , (D_1) et (D_m) sont représentées figure 21.4 et les écarts à la caractéristique idéale figure 21.5.

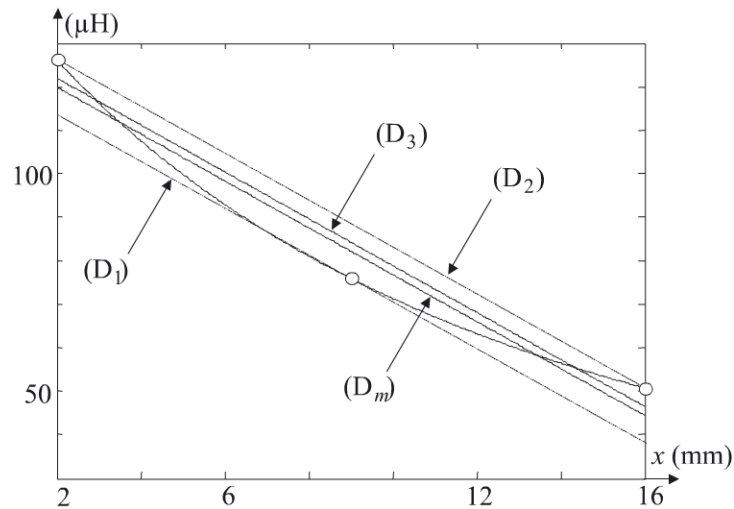


Figure 21.4 - Caractéristique idéale et les deux droites d'approximation

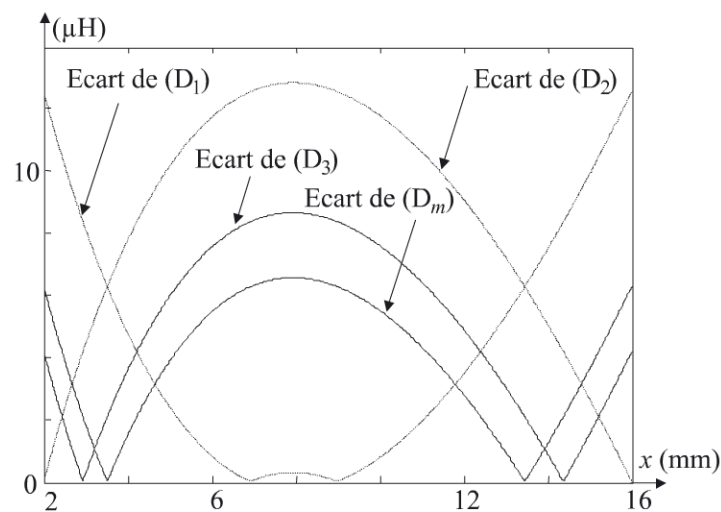


Figure 21.5 - Écarts à la caractéristique idéale

Les pentes des différentes droites (D_3) , (D_2) , (D_1) et (D_m) sont rigoureusement identiques, on a donc $S_m = -5,40 \mu\text{H}/\text{mm}$.

L'écart maximal entre la caractéristique idéale et la droite (D_m) est d'environ de $6,5 \mu\text{H}$ pour $x = 8 \text{ mm}$ (voir courbe figure 21.5). Sur l'étendue de mesure, ceci entraîne une erreur de linéarité $\varepsilon_m = 8,6 \% E.M.$

21.8 En utilisant la droite de régression par les moindres carrés, l'erreur de linéarité est $11,4 \% \cdot (x_2 - x_1) = 1,6 \text{ mm}$ alors qu'en utilisant la méthode de la droite moyenne, l'erreur calculée n'est plus que de $8,6 \% \cdot (x_2 - x_1) = 1,2 \text{ mm}$.

22

EXERCICE : Mesure télémétrique et statistique de mesure[@]

Énoncé

On considère un prototype de télémètre laser en temps de vol. L'étendue de mesure est comprise entre 1 et 100 m et le signal de sortie du télémètre est analogique. Lors d'un étalonnage, ce signal de sortie est échantillonné par une électronique haut de gamme. Cette dernière assure une résolution sur la tension de sortie correspondant au centième de millimètre. Le télémètre est placé à une distance $d = 10$ m d'une cible, distance mesurée de façon supposée exacte.

Le télémètre est interfacé avec une informatique permettant de stocker les valeurs relevées. On effectue une série de $N = 10\,000$ mesures. Pour chaque valeur de distance télémétrique, l'informatique soustrait 10 m générant ainsi une variable notée X prenant les valeurs x_i ($i = 1$ à $10\,000$) (voir histogramme des données figure 22.1).

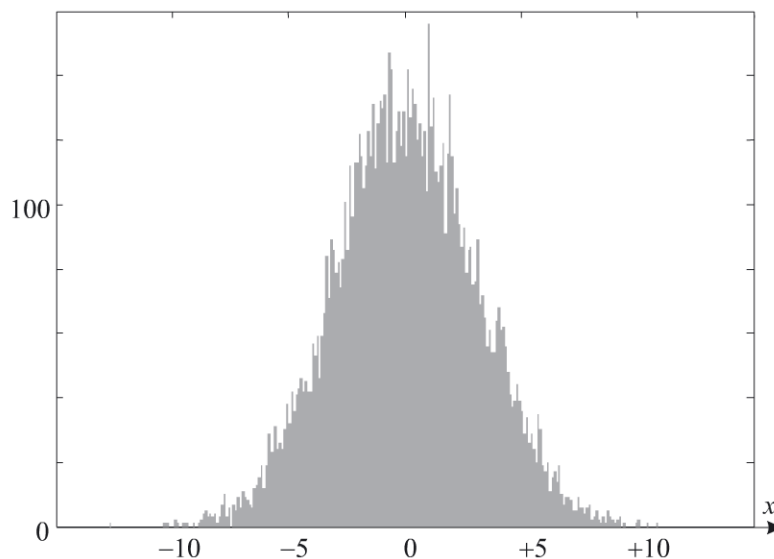


Figure 22.1 - Histogramme des données

[@] Les données de cet exercice sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage)

Deux grandeurs sont calculées directement à partir des données :

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = 0,059 \text{ mm} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - A)^2} = 3,027 \text{ mm}$$

22.1 Déterminer la meilleure estimation de la distance télémétrique mesurée par le télémètre m et la meilleure estimation s de l'écart-type de la distribution des valeurs mesurées.

22.2 On fait l'hypothèse que la distribution des données est normale et on se propose de tester la validité de cette hypothèse. Pour cela les données sont regroupées en 10 classes e_k non vides dont les effectifs M_k sont reportés dans le tableau 22.1.

Tableau 22.1 - Effectifs des dix classes

e_k	$[m - 4s ; m - 3s]$	$[m - 3s ; m - 2s]$	$[m - 2s ; m - s]$	$[m - s ; m - 0,5s]$	$[m - 0,5s ; m]$
M_k	10	196	1378	1536	1899
e_k	$[m ; m + 0,5s]$	$[m + 0,5s ; m + s]$	$[m + s ; m + 2s]$	$[m + 2s ; m + 3s]$	$[m + 3s ; m + 4s]$
M_k	1895	1470	1393	213	9

Estimer les effectifs E_k de ces classes si on admet comme exacte l'hypothèse de normalité.

Pour cela on donne dans le tableau 22.2, la probabilité P_u qu'a une variable distribuée selon une loi normale d'être située dans l'intervalle $[\mu - u \cdot \sigma ; \mu + u \cdot \sigma]$ pour $0,5 \leq u \leq 5$ et où μ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la distribution.

Tableau 22.2- Probabilité $P_u(x) = P(\mu - u \cdot \sigma \leq x \leq \mu + u \cdot \sigma)$ lorsque X est distribué selon une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ

u	P_u	u	P_u
5	$1 - 6 \cdot 10^{-7}$	2,5	0,9876
4,5	$1 - 7 \cdot 10^{-6}$	2	0,9545
4	$1 - 6 \cdot 10^{-5}$	1,5	0,8664
3,5	0,9995	1	0,6827
3	0,9973	0,5	0,3829

Calculer le $\tilde{\chi}_0^2$ réduit correspondant. On rappelle que celui-ci est donné par :

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{1}{d} \sum_k \frac{(M_k - E_k)^2}{E_k} \quad (22.1)$$

où d est le nombre de degrés de liberté. Conclure quant à l'hypothèse de normalité de la distribution des données. On se contentera d'une conclusion qualitative sans chercher à évaluer le degré de confiance de cette conclusion.

22.3 À partir de ces données, peut-on conclure quant à l'existence d'une erreur systématique ?

22.4 Donner une estimation de l'incertitude lors d'une mesure individuelle x avec un degré de confiance de 95 %.

22.5 Une des mesures individuelles donne $x_i = 11,259$ mm. Peut-on ou non conclure quant à l'éventuel caractère aberrant de cette mesure ?

22.6 L'opération d'étalonnage étant terminée, on suppose que le télémètre est suffisamment rapide pour remplacer une mesure unique par la moyenne de 8 mesures afin d'améliorer la précision. Une mesure, que l'on notera \bar{x} devient donc la moyenne de 8 mesures consécutives pendant la durée desquelles le mesurande est supposé ne pas évoluer. Donner les meilleures estimations de la moyenne et de l'écart-type de la variable \bar{X} . En déduire l'incertitude sur la mesure d'une valeur \bar{x} avec un degré de confiance de 95 %.

22.7 La mesure du télémètre doit être affichée sur un écran LCD. Combien de digits faut-il prévoir ?

Corrigé détaillé

22.1 La meilleure estimation de la valeur vraie de la variable X est la moyenne μ estimée ici à partir des valeurs mesurées x_i , soit la moyenne m des mesures :

$$m = A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = 0,059 \text{ mm}$$

Notons que, puisqu'il s'agit d'un étalonnage, μ est ici connue et vaut $\mu = 0$.

La meilleure estimation s de l'écart-type σ de la distribution est :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2} = B \sqrt{\frac{N}{N-1}} = 3,027 \text{ mm}$$

22.2 La loi normale étant symétrique par rapport à la moyenne, on a :

$$P(\mu - u \cdot \sigma \leq x \leq \mu) = P(\mu \leq x \leq \mu + u \cdot \sigma) = \frac{P_u(x)}{2}$$

m et s étant les meilleurs estimateurs de μ et σ , les effectifs estimés E_k se calculent aisément à partir des données du tableau 22.2. Par exemple l'effectif E_1 de la classe $e_1 = [m - 4s ; m - 3s]$ est donné par :

$$\begin{aligned} N \cdot (P(\mu - 4 \cdot \sigma \leq x \leq \mu) - P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq x \leq \mu)) &= N \cdot \left(\frac{P_4(x)}{2} - \frac{P_3(x)}{2} \right) \\ &= 10\,000 \left(\frac{1 - 6 \cdot 10^{-5}}{2} - \frac{0,9973}{2} \right) \\ &= 13,2 \end{aligned}$$

On procède de même pour chaque classe dont l'effectif estimé est reporté dans le tableau 22.3.

Tableau 22.3- Effectifs estimés

e_k	$[m - 4s ; m - 3s]$	$[m - 3s ; m - 2s]$	$[m - 2s ; m - s]$	$[m - s ; m - 0,5s]$	$[m - 0,5s ; m]$
E_k	13,2	214,0	1359,1	1498,8	1914,6
e_k	$[m ; m + 0,5s]$	$[m + 0,5s ; m + s]$	$[m + s ; m + 2s]$	$[m + 2s ; m + 3s]$	$[m + 3s ; m + 4s]$
E_k	1914,6	1498,8	1359,1	214,0	13,2

Afin d'évaluer le $\tilde{\chi}_0^2$ réduit, il faut déterminer le nombre de degrés de liberté d intervenant dans ce calcul. Il y a 10 classes et 3 paramètres issus des données sont nécessaires pour calculer l'effectif estimé de chaque classe, paramètres qui sont N et les estimateurs m et s . Le nombre de degré de liberté est donc $d = 10 - 3 = 7$.

Le $\tilde{\chi}_0^2$ se calcule alors aisément selon (22.1) et on obtient $\tilde{\chi}_0^2 = 0,93$. Cette valeur étant très proche de 1, on peut conclure que le comportement normal de la variable X est tout à fait probable.

22.3 Comme il s'agit d'un étalonnage, on connaît la valeur exacte $\mu = 0$. On a fait une estimation $m = 0,059$ mm (moyenne des mesures) de la valeur connue de μ . Si on recommençait une série de N mesures, on obtiendrait une nouvelle estimation m' de μ . Le théorème central limite montre que ces estimations sont réparties selon une loi normale autour de la valeur vraie μ avec un écart-type, dit écart-type de la moyenne, donné par $\sigma_m = \sigma / \sqrt{N}$ où σ est l'écart-type de la population d'origine estimé ici par $s = 3,027$ mm. On a ici $\sigma_m = 3,027/100 = 0,030$ mm. Comme $m = 0,059$ mm, cette valeur s'écarte de $0,059/0,030 \approx 2$ écarts-types de sa valeur moyenne μ . La probabilité en est donnée par le tableau 22.2, soit $P(m \geq \mu + 2\sigma) = (1 - P_2)/2 = 0,0228$ soit

environ 2 %. Devant cette probabilité faible, il est assez difficile de conclure. On peut simplement dire qu'il existe une erreur systématique mais en ayant 2 % de chance que cette affirmation soit fausse. Dans un cas comme celui-ci, il est plus prudent de recommencer une ou plusieurs séries de mesures avant de se prononcer.

22.4 L'incertitude estimée (selon la norme ISO/R1938-1971) est donnée avec un seuil de confiance de 95 % par $\pm 2\sigma$ puisque 95 % correspond d'après le tableau 22.2 à la probabilité de trouver une mesure dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$. Ici une incertitude de mesure est donc 6,05 mm.

22.5 Avec $x_i = 11,259$ mm, on se trouve à environ plus de $t = (11,259 - 0,059)/3,027 = 3,70$ écarts-types de la valeur moyenne. La loi étant normale, ceci correspond d'après le tableau 22.2 à une probabilité P comprise entre $(1 - P_{3,5})/2$ et $(1 - P_4)/2$, soit entre $2,5 \cdot 10^{-4}$ et $3 \cdot 10^{-5}$. Le critère de Chauvenet précise que si $N \cdot P < 1/4$, la valeur en cause peut être considérée comme aberrante. Ici, on a $0,3 < N \cdot P < 2,5$ et donc, la valeur $x_i = 11,259$ mm n'est pas une valeur aberrante selon le critère de Chauvenet.

22.6 La meilleure estimation de la moyenne de la variable \bar{X} reste la valeur m précédemment calculée et la meilleure estimation de l'écart-type de \bar{X} est donnée par $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{8} = 1,070$ mm. Avec un degré de confiance de 95 %, l'incertitude commise lors d'une mesure \bar{x} est donc comme à la question 4 donnée par $\pm 2s_{\bar{x}} = 2,14$ mm.

22.7 Comme l'incertitude se mesure en millimètre, le plus petit digit doit afficher le millimètre. Comme la portée maximale est d'environ 100 m, l'écran doit pouvoir afficher 99,999 m. On doit donc prévoir un affichage à 5 digits.

EXERCICE : Tachymètre optique

23

Énoncé

On considère le tachymètre de la figure 23.1, constitué d'un disque percé de N ouvertures et solidaire d'un arbre moteur tournant à la vitesse angulaire ω_{mes} . De part et d'autre du disque et à hauteur des ouvertures sont situées une diode électroluminescente (LED) et une photodiode de réception (PD), toutes deux fonctionnant dans le domaine infrarouge.

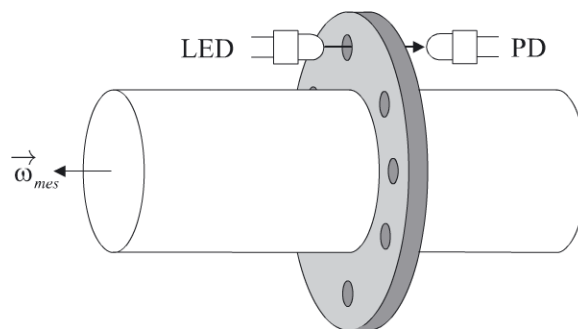


Figure 23.1 - Principe du tachymètre

Les tensions instantanées seront notées en minuscules et les tensions continues ou les amplitudes des tensions instantanées en majuscules.

Le circuit électronique de conditionnement est représenté figure 23.2. Le NE555 est monté en monostable. La sortie v_2 est à la masse tant que $v_1 > E/3$. Si v_1 passe en dessous de $E/3$, la sortie bascule vers la valeur E et ceci pour une durée $T = 1,1RC$. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

23.1 Polarisée, la diode électroluminescente présente à ses bornes une tension $V_{LED} = 1,7 \text{ V}$ pour un courant $I_{LED} = 50 \text{ mA}$ la traversant. Calculer la valeur de la résistance de protection R_1 . On donne $E = 15 \text{ V}$.

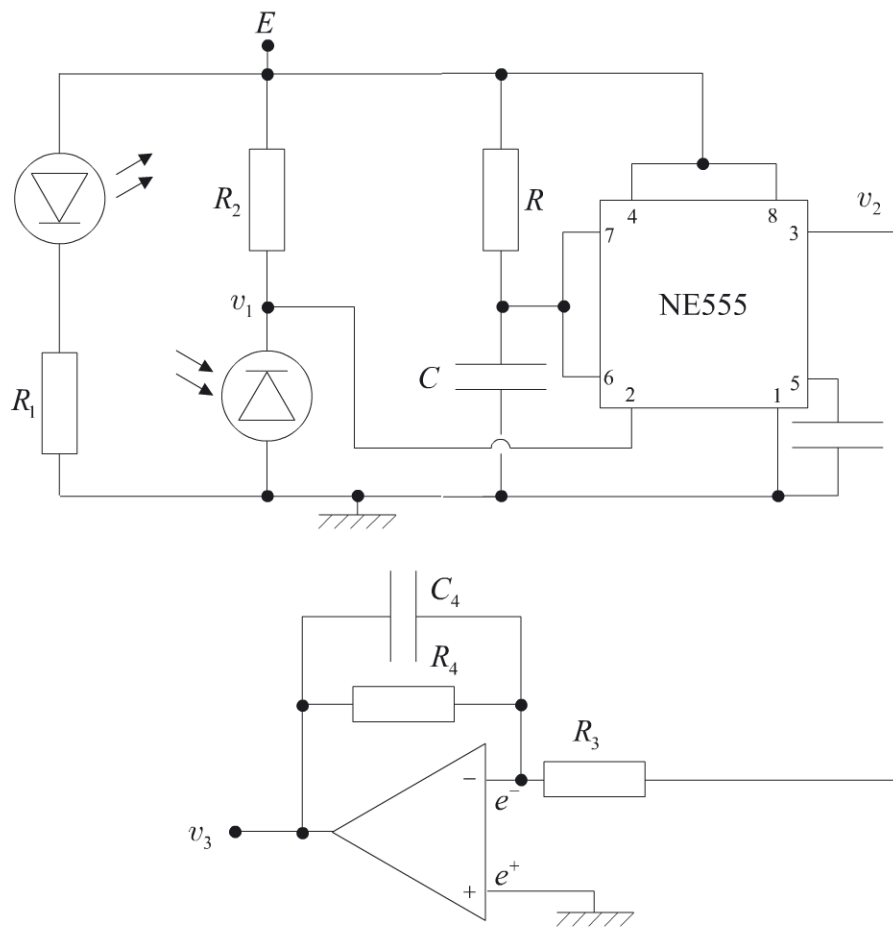


Figure 23.2 - Schéma du circuit de conditionnement

23.2 Quelle est la valeur de l'amplitude V_1 de v_1 lorsque la photodiode n'est pas éclairée par la diode électroluminescente ? On considèrera que le courant d'obscurité de celle-ci est nul.

Lors du passage d'une ouverture du disque devant l'ensemble diode-photodiode, la tension v_1 se comporte en première approximation comme une impulsion rectangulaire de largeur faible. Compte tenu de la divergence de l'émission de la diode électroluminescente, de sa distance à la photodiode et de la surface active de celle-ci, on peut estimer la puissance reçue par la surface active de la photodiode éclairée à $P = 5 \mu\text{W}$. Calculer la valeur de la résistance R_2 pour assurer une tension v_1 d'amplitude $V_1 = 4 \text{ V}$ lorsque la photodiode est éclairée sachant que sa sensibilité est $S_{PD} = 0,5 \text{ A/W}$.

23.3 Pour que le dispositif précédent fonctionne correctement, on considère qu'avant qu'une nouvelle impulsion v_1 n'arrive, il faut attendre, après le retour de v_2 à l'état stable, une durée de récupération égale à T . Donner la fréquence maximale f_{max} de fonctionnement du monostable précédent.

23.4 En déduire la fréquence maximale de rotation du disque donc de l'arbre moteur et calculer la valeur du produit RC pour que la valeur maximale de la vitesse de rotation soit de 12 000 tours/min. On donne $N = 6$.

23.5 Donner la fonction de transfert de l'étage de l'amplificateur opérationnel de la figure 23.2 et montrer que cet étage réalise un filtre.

23.6 Les valeurs de R_4 et C_4 sont choisies de façon à ce que la pulsation de coupure ω_c du filtre soit de l'ordre de quelques hertz donc très inférieure à la vitesse angulaire de rotation du disque. Que représente alors la tension instantanée v_3 ?

23.7 Déterminer l'expression de v_3 .

Calculer la sensibilité de la mesure $S_{mes} = \Delta v_3 / \Delta f_{mes}$ où f_{mes} représente la fréquence de rotation de l'arbre moteur. On donne $R_4 = 2R_3$.

Corrigé détaillé

23.1 On a immédiatement $R_1 = (E - V_{LED}) / I_{LED} = 266 \Omega$.

23.2 La photodiode n'étant pas éclairée, le seul courant qui circule est le courant d'obscurité considéré ici comme nul. La chute de tension aux bornes de la résistance R_2 est donc nulle et on a $V_1 = E$.

Le courant délivré par la photodiode éclairée est $I_{PD} = S_{PDP} = 2,5 \mu\text{A}$. On désire avoir alors $V_1 = 4 \text{ V}$. Il convient de choisir $R_2 = (E - V_1) / I_{PD} = 4,4 \text{ M}\Omega$.

23.3 Compte tenu du temps de récupération, la période minimale de répétition des impulsions de v_1 est de $2T$ et donc la fréquence maximale $f_{\max} = 1/2T$.

23.4 Le disque étant percé de N ouvertures, la fréquence maximale de rotation de l'arbre est égale à $f_{mes, \max} = f_{\max} / N = 1/(2NT)$. Pour une vitesse maximale de rotation de l'axe de 12 000 tours/min soit une fréquence $f_{mes, \max} = 200 \text{ Hz}$, on obtient :

$$T = 1/(2Nf_{mes, \max}) = 416,7 \mu\text{s} \quad \text{soit} \quad RC = T/1,1 = 378,8 \mu\text{s} \quad (23.1)$$

23.5 La fonction de transfert du dernier étage du circuit de la figure 23.2 est donnée par :

$$\frac{V_3(p)}{V_2(p)} = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{1}{1 + R_4 C_4 p} \quad (23.2)$$

Cette fonction de transfert correspond à celle d'un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = 1/R_4 C_4$.

23 • Tachymètre optique

23.6 L'arbre moteur tournant à une vitesse angulaire bien supérieure à la pulsation de coupure $\omega_c = 1/R_4C_4$ du filtre passe-bas, ce dernier ne laisse passer que la valeur moyenne ou composante continue du signal v_2 présent à son entrée.

23.7 La figure 23.3 donne le chronogramme du signal v_2 à l'entrée du filtre pour une fréquence f des impulsions v_1 .

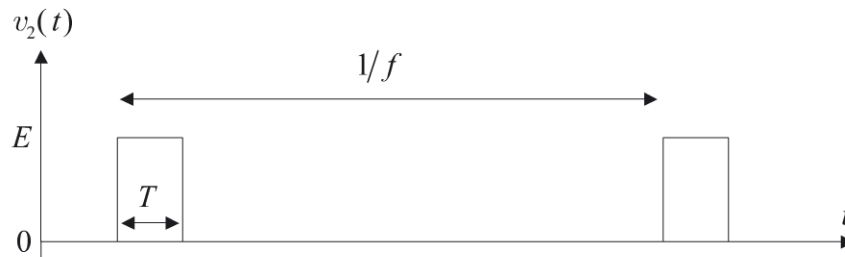


Figure 23.3 - Signal d'entrée du filtre

La valeur moyenne \bar{v}_2 du signal v_2 est donnée par :

$$\bar{v}_2 = \frac{TE + \left(\frac{1}{f} - T\right)0}{\frac{1}{f}} = fTE$$

Compte tenu de (23.2), le signal de sortie v_3 est :

$$v_3 = -\frac{R_4}{R_3}\bar{v}_2 = -\frac{R_4}{R_3}fTE$$

Soit encore en utilisant la fréquence de rotation de l'arbre moteur $f_{mes} = f/N$:

$$v_3 = -\frac{R_4}{R_3}f_{mes}NTE$$

La sensibilité du système de mesure est donnée par :

$$S_{mes} = \frac{\Delta v_3}{\Delta f_{mes}} = -\frac{R_4}{R_3}NTE$$

Compte tenu des données numériques, il vient $S_{mes} = -75 \text{ mV/Hz}$.

EXERCICE : Capteur de pression à tube borgne et jauges d'extensométrie

Énoncé

On considère un capteur destiné à la mesure de la pression p de fluides dont le corps d'épreuve est un tube borgne en acier (voir figure 24.1).

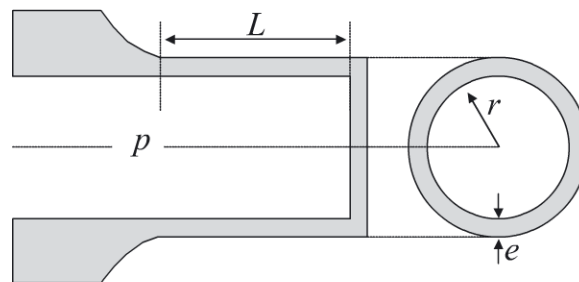


Figure 24.1 - Corps d'épreuve

On montre que les déformations du tube sont respectivement dans la direction de l'axe du tube (notée ε_1) et selon sa circonférence (notée ε_2) :

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{e} \left(\frac{L}{L+2r} - \frac{\nu}{2} \right) \frac{p}{E} = k_1 \frac{p}{E} \quad (24.1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{r}{e} \left(\frac{1}{2} - \nu \frac{L}{L+2r} \right) \frac{p}{E} = k_2 \frac{p}{E}$$

$E = 2,5 \cdot 10^{11}$ Pa est le module d'Young de l'acier utilisé et $\nu = 0,285$ son coefficient de Poisson.

24.1 On donne $r = 1$ cm, $e = 1$ mm et $L = 5$ cm. Calculer les déformations ε_1 et ε_2 pour $p = 10^7$ Pa.

24.2 On colle sur le tube borgne des jauges d'extensométrie métalliques de résistance au repos R_0 et de facteur de jauge K . Le collage est supposé parfait. Déterminer les expressions des variations ΔR_1 et ΔR_2 des résistances des jauges collées respectivement selon la longueur du tube et selon sa circonférence.

24 • Capteur de pression à tube borgne et jauges d'extensométrie

24.3 On constitue un pont de Wheatstone avec deux jauges collées selon la longueur du tube (de résistances notées R_1 et R_3) et deux jauges collées selon sa circonférence (de résistances notées R_2 et R_4). Expliquer comment doivent être collées les jauges et comment elles doivent être raccordées pour former le pont. Le pont est alimenté par une source de courant constant I_g .

24.4 Déterminer l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de R_1 , R_2 , R_3 , R_4 et I_g puis en fonction de R_0 , ΔR_1 , ΔR_2 et I_g .

24.5 En exprimant ΔR_1 et ΔR_2 en fonction de p , montrer que la mesure est linéaire et calculer la valeur de la tension de mesure pour $p = 10^7$ Pa. On donne $I_g = 5$ mA, $R_0 = 1$ k Ω et $K = 2$.

Corrigé détaillé

24.1 En utilisant les données numériques et (24.1), il vient :

$$\varepsilon_1 = 228,71 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = 118,57 \cdot 10^{-6}$$

24.2 Une jauge collée selon la longueur du tube subit dans sa longueur une déformation égale à celle de la longueur du tube, soit ε_1 . La variation de la résistance de la jauge est donc $\Delta R_1 = KR_0\varepsilon_1$. Une jauge collée selon la circonférence du tube subit dans sa longueur une déformation égale à celle du périmètre du tube, soit ε_2 . La variation de la résistance de la jauge est donc $\Delta R_2 = KR_0\varepsilon_2$.

24.3 Les jauges subissant les mêmes déformations sont collées en regard l'une de l'autre et de chaque côté du tube (compensation des déformations de flexion). Les fils de connexion de chaque jauge doivent être de même longueur et les plus courts possible (résistances parasites des fils de connexion). Les jauges doivent être connectées selon le schéma de la figure 24.2.

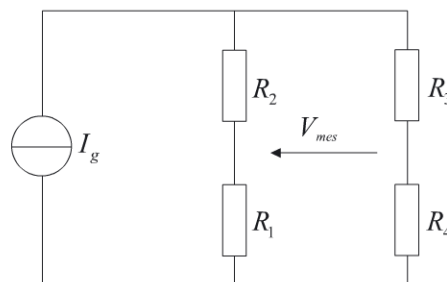


Figure 24.2 - Circuit de conditionnement en pont

24.4 On a directement :

$$\begin{aligned}
 V_{mes} &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot I_g \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \\
 &= \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_g = \frac{2R_0(\Delta R_1 - \Delta R_2) + \Delta R_1^2 - \Delta R_2^2}{2(2R_0 + \Delta R_1 + \Delta R_2)} I_g \quad (24.2)
 \end{aligned}$$

24.5 D'après la question 2 et (24.1), on a :

$$\Delta R_1 = KR_0 \varepsilon_1 = KR_0 k_1 \frac{p}{E}$$

$$\Delta R_2 = KR_0 \varepsilon_2 = KR_0 k_2 \frac{p}{E}$$

En reportant dans (24.2), il vient :

$$V_{mes} = \frac{2K(k_1 - k_2) \frac{p}{E} + K^2(k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{p}{E} \right)^2}{1 + K \frac{k_1 + k_2}{2} \frac{p}{E}} \cdot \frac{R_0 I_g}{4} = K(k_1 - k_2) \frac{p}{E} \cdot \frac{R_0 I_g}{2} \quad (24.3)$$

La mesure est linéaire.

Compte tenu des données numériques, on obtient $V_{mes} = 551 \mu\text{V}$.

EXERCICE : Piézoélectricité – Choix du piézoélectrique

Énoncé

On rappelle que les relations fondamentales de la piézoélectricité sont :

$$\vec{P} = \overset{\equiv}{d} \overset{\equiv}{\sigma} + \varepsilon_0 \overset{\equiv}{\chi} \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{D} = \overset{\equiv}{d} \overset{\equiv}{\sigma} + \overset{\equiv}{\varepsilon} \vec{E} \quad (25.1)$$

Respectivement \vec{P} , \vec{E} et \vec{D} représentent la polarisation, le champ électrique et l'excitation électrique. $\overset{\equiv}{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\overset{\equiv}{\chi}$ celui des susceptibilités électriques et $\overset{\equiv}{\varepsilon}$ celui des permittivités électriques. Le tenseur $\overset{\equiv}{d}$ est le tenseur piézoélectrique.

Pour la polarisation, on a en détaillant l'expression précédente :

$$P_x = d_{xxx}\sigma_{xx} + d_{xyy}\sigma_{yy} + d_{xzz}\sigma_{zz} + d_{xyz}\sigma_{yz} + d_{xzx}\sigma_{zx} + d_{xxy}\sigma_{xy} + \overset{\equiv}{\varepsilon} \vec{E} \Big|_x$$

$$P_y = d_{yxx}\sigma_{xx} + d_{yyy}\sigma_{yy} + d_{yzz}\sigma_{zz} + d_{yyz}\sigma_{yz} + d_{yzx}\sigma_{zx} + d_{yyx}\sigma_{xy} + \overset{\equiv}{\varepsilon} \vec{E} \Big|_y$$

$$P_z = d_{zxx}\sigma_{xx} + d_{zyy}\sigma_{yy} + d_{zzz}\sigma_{zz} + d_{zyz}\sigma_{yz} + d_{zzx}\sigma_{zx} + d_{zxy}\sigma_{xy} + \overset{\equiv}{\varepsilon} \vec{E} \Big|_z$$

On considère cinq matériaux piézoélectriques dont les tenseurs piézoélectriques $\overset{\equiv}{d}$ sont respectivement (les coefficients sont exprimés en 10^{-12} C/N) :

Quartz :

$$\begin{bmatrix} 2,3 & -2,3 & 0 & -0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & -4,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Céramique type G2000 (*Gultron Industries*) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ -39 & -39 & 80 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Céramique type PZT5A (*Vernitron Corp*) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 0 & 0 \\ -187 & -187 & 375 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Céramique type PXE5 (*RTC*) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ -195 & -195 & 390 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polyfluorure de vinylidène (PVF₂) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 20 & 2 & -30 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On considère un bloc parallélépipédique de matériau piézoélectrique dont les arêtes coïncident avec les directions principales (x , y et z) du matériau et on métallise deux faces opposées du bloc de façon à réaliser un condensateur. Le capteur ainsi réalisé est destiné à détecter des variations rapides de pression.

25.1 La taille du bloc de matériau piézoélectrique est suffisamment faible pour que l'on puisse faire l'hypothèse que les contraintes engendrées sont de type hydrostatique. Parmi les cinq cités, quel est le matériau piézoélectrique le plus adéquat ?

25.2 A quel axe du matériau doivent être perpendiculaires les faces métallisées ?

25.3 On réalise maintenant une structure enchâssant un bloc du matériau piézoélectrique de façon à ce qu'une seule de ses faces subisse les variations de pression.

Quel est le matériau le plus adapté ? Quelle face doit subir les variations de pression et quelles faces doivent être métallisées ?

Corrigé détaillé

25.1 La contrainte subie est hydrostatique (pression p). Le tenseur de contrainte s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La polarisation apparaissant dans la direction i ($i = x, y, z$) sous contrainte hydrostatique $\sigma = -p$ s'écrit $P_i = -(d_{ixx} + d_{iyy} + d_{izz})p = -d_{ih}p$. Parmi les cinq matériaux proposés, le matériau piézoélectrique le plus adéquat est celui possédant le plus grand coefficient hydrostatique d_h soit le PVF₂ pour lequel :

$$d_{zh} = (20 + 2 - 30) \cdot 10^{-12} \text{ C/N} = -8 \cdot 10^{-12} \text{ C/N}$$

25.2 La polarisation ne peut apparaître que dans la direction z . La métallisation servant à recueillir le signal électrique induit par l'effet piézoélectrique, la coupe doit donc être une coupe z , c'est-à-dire que les faces métallisées doivent être parallèles au plan xOy .

25.3 Il y a ici uniquement une contrainte de traction-compression de la face exposée à la pression. Les PZT5A et PXE5 offrent une réponse importante à cette sollicitation (polarisation selon la direction z). La réponse est plus importante dans les deux cas si la contrainte est appliquée selon la direction z sur une face perpendiculaire à la direction z . Il faudra donc métalliser les faces perpendiculaires à la direction z .

EXERCICE :

Capteur à courants de Foucault – Mesure de résistivité

Énoncé

On considère le capteur à courants de Foucault illustré sur la figure 26.1 et positionné en regard d'une cible sous test, métallique et non magnétique, dont on désire mesurer la résistivité. Ce système est destiné au contrôle soit de faibles variations de la résistivité de bons conducteurs soit de gros défauts structuraux situés sous la surface du conducteur.

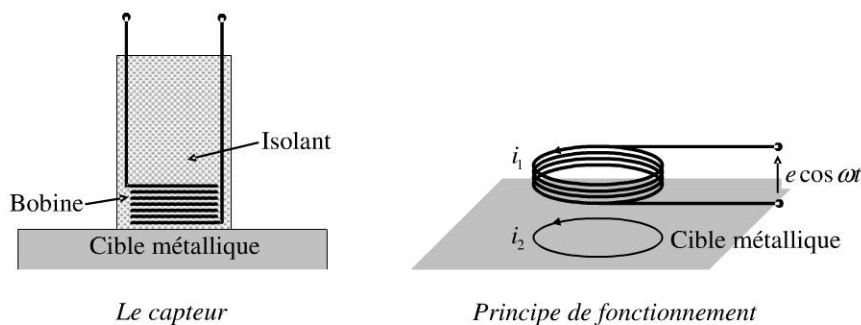


Figure 26.1 - Principe de la mesure

26.1 Expliquer le principe de fonctionnement du capteur.

26.2 La distance de la bobine à la cible est fixe, le capteur étant au contact de la cible par son isolant. Le bobinage du capteur possède une inductance propre L_1 et une résistance propre R_1 .

En notant i_1 le courant circulant dans le bobinage du capteur et i_2 les courants de Foucault induits dans la cible, donner l'expression de l'amplitude e de la tension aux bornes du bobinage du capteur en fonction de i_1 , i_2 , L_1 , R_1 , ω et M où M représente le coefficient de mutuelle inductance entre le bobinage capteur et la cible métallique.

26.3 On admet que la cible se comporte comme un bobinage d'inductance L_2 et de résistance propre R_2 . Donner l'équation régissant le secondaire du transformateur constitué par le capteur et la cible en fonction de i_1 , i_2 , L_2 , R_2 , ω et M .

26.4 En déduire les résistance et inductance apparentes, respectivement r et L , du bobinage du capteur (le primaire) quand ce dernier est au contact de la cible.

26.5 Que deviennent ces expressions si l'on considère que la cible est un bon conducteur, soit pour $R_2 \ll L_2\omega$? On posera $M = k\sqrt{L_1L_2}$ où k est le coefficient de couplage entre le bobinage du capteur et la cible, soit ici une constante puisque toutes les caractéristiques géométriques et dimensionnelles restent constantes.

Le principe du conditionnement du capteur est un oscillateur dont le capteur est partie prenante et conditionne la fréquence d'oscillation. Cet oscillateur est constitué des deux blocs suivants où les amplificateurs sont considérés comme parfaits :

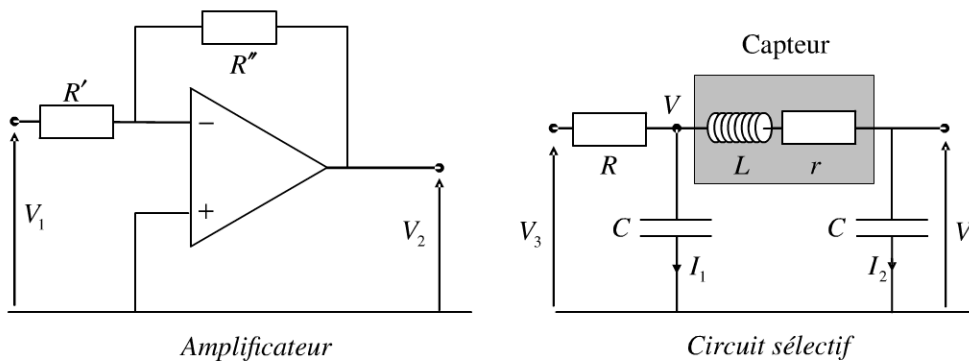


Figure 26.2 - Conditionnement du capteur

26.6 Calculer la fonction de transfert $H_1(p) = V_2(p)/V_1(p)$ de l'amplificateur où p désigne la variable dans le domaine de Laplace.

26.7 Montrer que la fonction de transfert $H_2(p) = V_4(p)/V_3(p)$ du circuit sélectif s'écrit :

$$H_2(p) = \frac{1}{RLC^2p^3 + (RrC + L)Cp^2 + (r + 2R)Cp + 1}$$

Il est conseillé d'exprimer $V_4(p)$ en fonction de C et $I_2(p)$, puis $I_2(p)$ en fonction de la tension L , r , C et $V(p)$ (voir le schéma de la figure 26.2) et enfin $V(p)$ en fonction de R , L , r , C et $V_3(p)$.

26.8 Pour réaliser un oscillateur sinusoïdal de pulsation d'oscillation ω_{oscil} , les deux blocs sont connectés de façon à ce que $V_4 = V_1$ et $V_3 = V_2$.

En déduire les conditions dites de Barkhausen imposées à la transmittance $H(j\omega_{oscil}) = H_1(j\omega_{oscil})H_2(j\omega_{oscil})$.

26.9 Déterminer la pulsation d'oscillation ω_{oscil} en fonction de r , R , L et C . En remplaçant r et L par leurs expressions en fonction R_1 , R_2 , L_1 , L_2 et k dans le cas d'un bon conducteur, montrer que cette pulsation peut se mettre sous la forme :

$$\omega_{oscil} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{k^2 L_1}{L_2(2R + R_1)} R_2}$$

On précisera l'expression de ω_0 , pulsation d'oscillation pour une cible parfaitement conductrice soit pour $R_2 = 0$.

26.10 Déduire des réponses aux questions 8 et 9 la valeur du rapport R''/R' pour que la condition de Barkhausen sur le module soit vérifiée. On admettra que l'on peut considérer que la cible est parfaitement conductrice (i.e. $R_2 = 0$) pour déterminer la valeur du rapport R''/R' et que cette valeur, une fois fixée, reste correcte pour que l'oscillateur fonctionne même si $R_2 \neq 0$.

26.11 On a pris la précaution de choisir une résistance R égale à R_1 , résistance du bobinage du capteur face à une cible parfaitement conductrice. Donner dans ce cas l'expression du rapport R''/R' et celles de la pulsation ω_0 et de la fréquence f_0 correspondantes. Applications numériques : on donne $L_1 = 1$ mH, $R_1 = 50 \Omega$, $C = 1$ nF et $k = 0,5$.

26.12 Montrer que, la résistance R_2 étant forcément proportionnelle à la résistivité ρ du matériau de la cible (i.e. $R_2 = \alpha\rho$), on a bien réalisé un capteur permettant la mesure de la résistivité de la cible. Dans le cas où la pulsation d'oscillation ω_{oscil} de l'oscillateur reste voisine de ω_0 , donner, au premier ordre en ρ , la relation liant la pulsation et la résistivité.

26.13 On rappelle que la profondeur de peau d'un matériau non magnétique est donnée par $\delta = \sqrt{2/\gamma\omega\mu_0}$ où γ est la conductivité du matériau. Estimer pour un matériau cible bon conducteur comme le cuivre, la profondeur de matériau testée par cette méthode. On donne $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega \cdot m^{-1}$.

26.14 Compte tenu des hypothèses et des résultats précédents, expliquer l'utilisation qui peut être faite de ce type de capteur.

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

► La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonvalle

► Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

27

EXERCICE : Relation mesurande-signal de mesure – Dérive thermique

Énoncé

27.1 Un système de mesure du micro-déplacement x possède à $T_0 = 20^\circ\text{C}$ une sensibilité réduite $S_r = 20 \text{ mV}/\mu\text{m}/\text{V}$ et une dérive thermique $\alpha_S = \Delta S/S \Delta T$ soit $0,1\%^\circ\text{C}^{-1}$. Sous une alimentation $V_{alim} = 10 \text{ V}$ et à $T = 25^\circ\text{C}$, quelle est la tension de sortie V_{mes} pour un déplacement $x = 10 \mu\text{m}$?

27.2 Soit un système de mesure de déplacement de sensibilité réduite $S_r = 1 \text{ mV}/\mu\text{m}/\text{V}$ et de dérive thermique $\alpha_S = \Delta S/S \Delta T = 0,5\%^\circ\text{C}^{-1}$ à $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Sous une alimentation de $V_{alim} = 5 \text{ V}$ et à $T = 25^\circ\text{C}$, à quel déplacement x correspond une tension de sortie de $V_{mes} = 41 \text{ mV}$? Quelle erreur relative d'interprétation sur ce déplacement est commise si on ne tient pas compte de la dérive thermique ?

27.3 Un capteur de pression intégré a une sensibilité réduite $S_r = 100 \text{ mV}/10^5 \text{ Pa}/\text{V}$ à une température $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Quelle est la tension V_{mes} délivrée par ce capteur pour une alimentation $V_{alim} = 5 \text{ V}$ et pour une pression $p = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ sachant qu'à la pression de référence $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, il délivre une tension $V_0 = 1 \text{ V}$?

Quelle est la tension délivrée à $T = 30^\circ\text{C}$ pour une dérive thermique de la sensibilité $\alpha_S = 1\%^\circ\text{C}$ (on supposera qu'il n'y a pas de dérive thermique de la référence V_0) ?

27.4 Un débitmètre a une sensibilité $S = 200 \text{ mV}/\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$ sur toute sa plage d'utilisation et à la température de référence $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Quelle est la tension V_{mes} délivrée par ce capteur pour un débit $D = 20 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ sachant qu'au débit de référence $D_0 = 50 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$, il délivre une tension $V_0 = 1 \text{ V}$?

Pour ce même débit, quelle est la tension délivrée à $T = 40^\circ\text{C}$ pour une dérive thermique $\alpha_S = -0,1\%^\circ\text{C}$ de la sensibilité S et pour une dérive thermique $\alpha_{V_0} = -0,2\%^\circ\text{C}$ de la référence V_0 ?

27.5 On considère un capteur de pression de marque Keller. À la pression de référence $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, la tension de sortie V_{mes} évolue avec la température T . Cette évolution est reportée dans le tableau suivant :

Tableau 27.1- Dérive thermique

T (C)	-8,6	1,0	25,8	50,6	80,7
V_{mes} (mV)	-5,5	-2,6	4,6	11,3	19,0

- À partir de ces données, peut-on déterminer la valeur de la sensibilité ?
- Déterminer graphiquement ou par régression linéaire, l'équation de la meilleure droite approximant ce comportement.
- On désire avoir $V_{mes}(p_0, T_0) = 0$ où T_0 désigne la température de référence. Donner, en explicitant le raisonnement, la valeur du coefficient $CDTZ$ (coefficient de dérive thermique du zéro) et la valeur de T_0 .

27.6 On considère un capteur à effet Hall que l'on destine à la mesure sans contact du courant I dans un conducteur rectiligne via le champ magnétique \vec{B} créé. L'étendue de mesure $E.M.$ du capteur s'étend de -900 G à $+900$ G. Les données du constructeur sont :

Tableau 27.2- Capteur de champ d'induction magnétique

Caractéristique	Symbole	Condition du test	Valeurs	Unités
Tension en champ nul	V_0	$B = 0$ G	+2,5	V
Sensibilité	S	-900 G $\leq B \leq$ +900 G	+1,3	mV/G
Dérive du zéro	α_{V_0}	$B = 0$ G -20 °C $\leq T \leq$ +40 °C	-1	mV/°C
Dérive de la sensibilité	α_S	-900 G $\leq B \leq$ +900 G -20 °C $\leq T \leq$ +40 °C	+0,2	%/°C

Caractéristiques électriques à $T_0 = 25$ °C

- Comment adapter l'étendue de mesure du capteur à l'étendue de mesure du courant ?
- Donner l'expression littérale de la tension de mesure V_{mes} obtenue pour une valeur de champ B si la mesure est effectuée à une température $T \neq T_0$. On posera $\Delta T = T - T_0$.
- Calculer dans le pire des cas l'évolution en tension ΔV_{mes} engendrée par l'évolution de la température T entre -20 °C et $+40$ °C, c'est-à-dire la différence entre la valeur approchée de la tension de mesure ne tenant pas compte de l'évolution de la température et celle correcte déterminée précédemment.
- À quelle erreur ceci correspond-il en terme de valeur de champ ?
- Déterminer la valeur de l'erreur relative commise ; est-ce acceptable ?

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- ▶ La page web de l’auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville
- ▶ Le site de Dunod, à l’adresse suivante :
www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

EXERCICE :

Capteur de pression – Dérive thermique

Énoncé

Ci-dessous est reproduit le *datasheet* d'un capteur de la pression p à sortie en tension.

Description

These miniature pressure sensors are designed to make static measurements of pressure as well as dynamic in corrosive condition. Realized entirely with titanium and stainless steel, these leveling membrane sensors are compatible with a great number of corrosive or conducting fluids. An integrated electronics makes it possible to deliver an analogical tension signal.



Figure 28.1 - Miniature pressure absolute sensor

Technical data (@ $T_0 = 25^\circ\text{C}$)

Tableau 28.1 – Datasheet

Measuring range	100 PSI absolute
Proof pressure	$\times 1,5$
Burst pressure	$\times 3$
Full scale output (V_{out} span)	5 V
Zero (V_{out} @ 0 PSI)	0 V
Linearity	$\pm 0.25\%$ of the full scale
Hysteresis	$\pm 0.25\%$ of the full scale
Resolution	$\pm 0.2\%$ of the full scale
Operating Temperature Range	-40°C to $+125^\circ\text{C}$
Compensated Temperature Range	0°C to $+60^\circ\text{C}$
Thermal Zero Shift	0,1% of the full scale @ $T = 60^\circ\text{C}$
Thermal Sensitivity Shift	0,1% of the reading @ $T = 60^\circ\text{C}$

On rappelle que 1 PSI équivaut à 6894,7572 Pa.

28.1 Donner en unités du Système International, l'étendue de mesure $E.M.$ de ce capteur.

28.2 Quelle est la limite mesurande du domaine de destruction ?

28.3 Déterminer la valeur de la sensibilité de ce capteur.

28.4 Quelle est, en unités du système international, la plus faible évolution de la pression détectable avec ce capteur ?

28.5 Dans la zone de compensation, déterminer dans le pire des cas l'écart δV_{out} introduit par la dérive thermique.

28.6 Donner l'écart correspondant δp et l'erreur engendrée ε_T en % de l'étendue de mesure.

Corrigé détaillé

28.1 L'étendue de mesure $E.M.$ en unité anglo-saxonne est de 100 PSI soit dans le Système International $E.M. = 100 \cdot 6894,7572 \simeq 6,895 \cdot 10^5$ Pa.

28.2 D'après le *datasheet*, elle est de trois fois la valeur maximale de l'étendue de mesure soit de l'ordre de $20,5 \cdot 10^5$ Pa.

28.3 Comme le zéro est nul ($V_{out}@0 \text{ PSI} = 0 \text{ V}$), comme l'extension du signal de sortie est $\Delta V_{out} = 5 \text{ V}$ et que l'étendue de mesure est :

$$E.M. = 100 \text{ PSI} \approx 6,895 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La sensibilité est donnée par $S_c = \Delta V_{out}/E.M. = 50 \text{ mV/PSI} = 725,2 \text{ mV}/10^5 \text{ Pa}$.

28.4 La plus faible évolution de la pression détectable avec ce capteur est par définition l'incertitude de mobilité (improprement dite de résolution) soit $0,2\% E.M.$ soit $0,2 \text{ PSI}$ ou encore 1380 Pa .

28.5 L'écart δV_{out} introduit par la dérive thermique lorsque la température est T et non T_0 est donné par :

$$\begin{aligned} \delta V_{out} &= V_{out}(p, T) - V_{out}(p, T_0) \\ &= [S_c(T)p + V_{out}(p = 0 \text{ Pa}, T)] - [S_c(T_0)p - V_{out}(p = 0 \text{ Pa}, T_0)] \\ &= [S_c(T) - S_c(T_0)]p + [V_{out}(p = 0 \text{ Pa}, T) - V_{out}(p = 0 \text{ Pa}, T_0)] \\ &= S_c(T_0)(1 + \alpha_{S_c}(T - T_0))p + \beta_{V_0}(T - T_0) \end{aligned} \quad (28.1)$$

Les coefficients de dérive thermique étant tous les deux de même signe, l'écart δV_{out} est extremum pour $T - T_0$ extremum dans la zone de compensation, c'est-à-dire pour $T = 60^\circ \text{C}$.

D'après les données du *datasheet*, le deuxième terme de (28.1) représente alors $0,1\% \cdot 5 \text{ V} = 5 \text{ mV}$ et le premier terme au maximum (pour $p = 100 \text{ PSI}$) $0,1\% \cdot 5 \text{ V} = 5 \text{ mV}$. Au total, on a donc au maximum $\delta V_{out} = 10 \text{ mV}$.

28.6 L'écart correspondant δp est simplement donné par :

$$\delta p = \frac{\delta V_{out}}{S_c} = 0,2 \text{ PSI} \approx 1380 \text{ Pa} \quad (28.2)$$

L'erreur engendrée ε_T est alors de $0,2\%$ de l'étendue de mesure.

29

EXERCICE : Potentiomètre rotatif – Effet de la dérive thermique

Énoncé

On considère le montage en demi-pont de la figure 29.1 où R_1 et R_2 représentent les deux résistances variables d'un potentiomètre rotatif de résistance totale $2R_0$ et de course angulaire totale Ω (voir figure 29.2). Les résistances R de l'autre branche potentiométrique sont fixes.

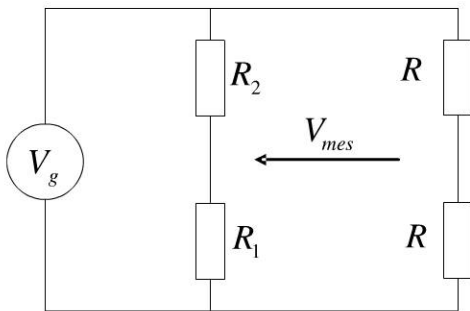


Figure 29.1- Conditionnement en pont

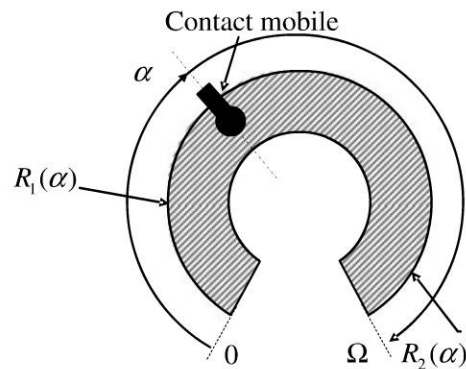


Figure 29.2 - Potentiomètre rotatif

29.1 Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de R_1 , R_2 et V_g .

29.2 Le pont est équilibré pour une valeur α_0 de la position angulaire. A priori quelle valeur doit-on choisir pour α_0 ? En déduire les valeurs $R_1(\alpha_0)$ et $R_2(\alpha_0)$.

29.3 Le mesurande évolue de $\Delta\alpha$ à partir de α_0 . Donner les expressions de $R_1(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ et $R_2(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ puis les expressions de ΔR_1 et de ΔR_2 en fonction de $\Delta\alpha$, Ω et R_0 .

29.4 Donner l'expression de la variation ΔV_{mes} de la tension de mesure associée à l'angle $\alpha_0 + \Delta\alpha$.

29.5 Calculer la sensibilité de la mesure. On donne $\Omega = 250^\circ$ et $V_g = 1$ V.

Les mesures précédentes ont été réalisées à la température de référence $T_0 = 0^\circ\text{C}$. La température varie maintenant et fait varier la résistivité de la piste du potentiomètre selon $\rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha_\rho T)$ où est la résistivité du métal à 0°C et la température est exprimée en $^\circ\text{C}$. La température constitue donc *a priori* une grandeur d'influence de la mesure.

29.6 *A priori*, pourquoi se limite-t-on à une alimentation $V_g = 1$ V aussi faible qui limite ainsi la sensibilité de la mesure ?

29.7 Donner à une température $T \neq T_0$, les expressions de $R_1(\alpha_0, T)$ et $R_2(\alpha_0, T)$ en fonction de $R_0, \alpha_\rho, \Delta T = T - T_0, R_0, \alpha_\rho$.

29.8 Donner les expressions de $R_1(\alpha_0 + \Delta\alpha, T)$ et $R_2(\alpha_0 + \Delta\alpha, T)$ pour une évolution de l'angle à une température $T \neq T_0$.

29.9 En déduire la nouvelle expression de la variation ΔV_{mes} et conclure.

Corrigé détaillé

29.1 L'expression de la tension de mesure V_{mes} est :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_g}{2} \quad (29.1)$$

29.2 Le pont doit être équilibré pour une valeur α_0 de la position angulaire qui minimise les non-linéarités de la mesure donc *a priori* pour $\alpha_0 = \Omega/2$. La résistance par unité d'angle de la piste résistive est $2R_0/\Omega$, on a donc :

$$\begin{cases} R_1(\alpha_0) = (2R_0/\Omega) \cdot (\Omega/2) = R_0 \\ R_2(\alpha_0) = 2R_0 - R_1(\alpha_0) = R_0 \end{cases} \quad (29.2)$$

29.3 De la même façon, on a :

$$\begin{cases} R_1(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \frac{2R_0}{\Omega} \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right) = R_0 \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega} \right) \\ R_2(\alpha_0 + \Delta\alpha) = 2R_0 - R_1(\alpha_0 + \Delta\alpha) = R_0 \left(1 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega} \right) \end{cases} \quad (29.3)$$

Les deux branches du potentiomètre constituent deux capteurs linéaires en $\Delta\alpha$ fonctionnant en mode push-pull.

29.4 En reportant (29.3) dans (29.1), il vient :

$$V_{mes} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_g}{2} = \frac{R_0 \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) - R_0 \left(1 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right)}{R_0 \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) + R_0 \left(1 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right)} \frac{V_g}{2} = \frac{\Delta\alpha}{\Omega} V_g = \Delta V_{mes} \quad (29.4)$$

La mesure est linéaire en $\Delta\alpha$.

29.5 La sensibilité de la mesure est donnée par $S_{mes} = \Delta V_{mes} / \Delta\alpha = 4 \text{ mV}/^\circ$.

29.6 La résistivité varie avec la température et donc par conséquence les valeurs des résistances varient avec la température. Ceci peut a priori provoquer une dérive de la tension de mesure à déplacement angulaire $\Delta\alpha$ fixe et donc par la suite une erreur d'interprétation de cette tension de mesure. Une tension d'alimentation trop importante risque d'entraîner un auto échauffement par effet Joule et donc par le principe décrit précédemment une erreur d'interprétation de la tension de mesure.

29.7 À la température $T \neq T_0$ et puisque $T_0 = 0^\circ\text{C}$, la résistance R_0 s'écrit maintenant $R_0(1 + \alpha_\rho T)$.

On a donc :

$$R_1(\alpha_0, T) = R_2(\alpha_0, T) = R_0(1 + \alpha_\rho T) \quad (29.5)$$

29.8 De la même façon que précédemment, on a :

$$\begin{cases} R_1(\alpha_0 + \Delta\alpha, T) = R_0(1 + \alpha_\rho T) \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) \\ R_2(\alpha_0 + \Delta\alpha, T) = R_0(1 + \alpha_\rho T) \left(1 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) \end{cases} \quad (29.6)$$

29.9 En reportant ces expressions dans (29.1), il vient :

$$\Delta V_{mes}(T) = \frac{R_0(1 + \alpha_\rho T) \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) - R_0(1 + \alpha_\rho T) \left(1 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right)}{R_0(1 + \alpha_\rho T) \left(1 + 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) + R_0(1 + \alpha_\rho T) \left(1 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right)} \frac{V_g}{2} = \frac{\Delta\alpha}{\Omega} V_g \quad (29.7)$$

Ce résultat est strictement identique au résultat (29.4). On en déduit que si la température constitue bien une grandeur d'influence de chaque piste résistive prise comme capteur, elle est sans effet sur la mesure, ceci en raison du conditionnement en demi-pont push-pull.

L'argument développé à la question 6 est donc sans objet et on peut se permettre d'augmenter la tension d'alimentation afin d'augmenter la sensibilité de la mesure.

EXERCICE : Résistance thermométrique en montage potentiométrique

Énoncé

On considère le montage potentiométrique ci-contre où $R_c(T) = R_c(0)(1 + AT + BT^2)$ est une résistance thermométrique de nickel et R une simple résistance fixe. Dans cette dernière expression, la température T est exprimée en $^{\circ}\text{C}$, $R_c(0) = 100\ \Omega$, $A = 5,5 \cdot 10^{-3}\ ^{\circ}\text{C}^{-1}$ et $B = 6,7 \cdot 10^{-6}\ ^{\circ}\text{C}^{-2}$. La source de tension de fem $V_g = 5\ \text{V}$ possède une impédance interne R_g négligeable. Ce système est destiné à la mesure de températures comprises entre $-50\ ^{\circ}\text{C}$ et $+90\ ^{\circ}\text{C}$.

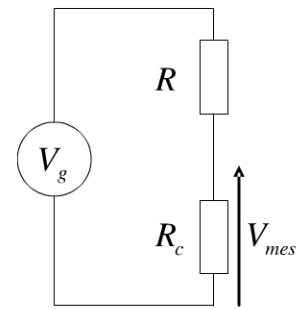


Figure 30.1 - Montage potentiométrique

30.1 *A priori*, quelle doit être la valeur de T_0 , température qui servira de référence ? On précisera la raison de ce choix.

30.2 Pour une température $T = T_0 + \Delta T$, réécrire l'expression de $R_c(T)$ sous la forme $R_c(T) = R_0(1 + \alpha\Delta T + \beta(\Delta T)^2)$ où $R_0 = R_c(T_0)$ en précisant les expressions de α , β et R_0 . Application numérique.

30.3 Donner l'expression de $\Delta R_c = R_c(T) - R_c(T_0)$ en fonction de α , β , R_0 et ΔT .

30.4 Donner l'approximation linéaire de ΔR_c au premier ordre en ΔT et en déduire la sensibilité S_c du capteur.

30.5 Donner l'expression de la tension de mesure $V_{\text{mes}}(T)$ en fonction de $R_c(T)$, R et V_g puis de ΔR_c , R_0 , R et V_g .

30.6 En déduire l'expression de la variation $\Delta V_{\text{mes}}(T) = V_{\text{mes}}(T) - V_{\text{mes}}(T_0)$ en fonction de ΔR_c , R_0 , R et V_g .

30 • Résistance thermométrique en montage potentiométrique

30.7 Donner l'approximation linéaire au premier ordre en ΔR_c de ΔV_{mes} et en déduire la sensibilité S_{cond} du conditionneur.

30.8 Donner l'expression de ΔV_{mes} en fonction de α , β , R_0 , R , ΔT et V_g .

30.9 Donner l'approximation linéaire au premier ordre en ΔT de ΔV_{mes} et en déduire la sensibilité S_{mes} de la mesure.

30.10 Calculer la valeur de R qui rend cette sensibilité maximale.

30.11 Pour cette valeur, donner alors les nouvelles expressions de S_{cond} et S_{mes} .

30.12 En repartant de l'expression de la question 5 de $\Delta V_{\text{mes}}(T)$ en fonction de $R_c(T)$, R et V_g , calculer la valeur de R qui maximalise la linéarité autour de la température T_0 .

30.13 Pour cette valeur, déterminer les nouvelles expressions de S_{cond} et S_{mes} .

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

► La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonvalle

► Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

EXERCICE : Capteur de déplacement capacitif – Non-linéarité

Énoncé

On considère le montage en quart de pont de la figure 31.1 où Z_1 et Z_2 sont les impédances complexes de deux capteurs du mesurande m et R_3 et R_4 deux résistances fixes. La source de tension sinusoïdale de pulsation ω_g et de fem V_g possède une résistance interne R_g négligeable.

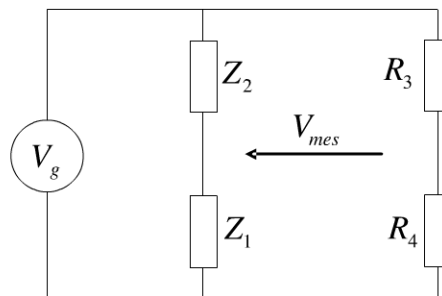


Figure 31.1- Quart de pont

31.1 Donner l'expression de V_{mes} , amplitude de la tension de mesure $V_{mes}(t)$ en fonction de Z_1 , Z_2 , R_3 , R_4 et V_g .

31.2 Le pont est équilibré pour une valeur m_0 de l'étendue de mesure $E.M.$ du mesurande pour laquelle on a $Z_1(m_0) = Z_2(m_0) = Z_0$. *A priori* quelles valeurs doit-on choisir pour m_0 ? En fonction de ces résultats, récrire V_{mes} hors équilibre en fonction de Z_1 , Z_2 et V_g .

Les deux capteurs sont constitués par des armatures identiques, planes, rectangulaires d'aire S et de longueur L . Une armature mobile est susceptible de glisser dans son plan dans la direction de sa longueur entre les deux autres armatures fixes. Les entrefers des deux condensateurs ainsi constitués sont fixes et de valeur e . Il en est de même pour la permittivité ε du milieu ambiant. À l'origine l'armature mobile est au milieu des deux armatures fixes (voir figure 31.2).

31 • Capteur de déplacement capacitif – Non-linéarité

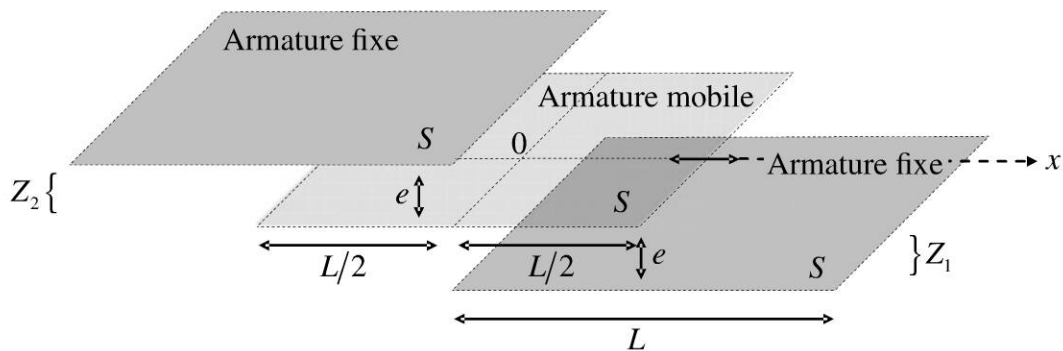


Figure 31.2 - Principe de la mesure

31.3 En négligeant les effets de bord, donner l'expression de C_0 , capacité de chaque condensateur à l'origine, en fonction de ε , e et S . En déduire l'expression de l'impédance Z_0 correspondante.

31.4 L'armature mobile se déplace de Δx vers la droite. Déterminer les expressions de C_1 et C_2 en fonction de Δx , L et C_0 puis de Z_1 et Z_2 en fonction de Δx , L et Z_0 .

31.5 Donner l'expression de la variation ΔV_{mes} .

31.6 Donner l'expression S_{mes} de la sensibilité de la mesure. On donne $L = 1$ cm et $V_g = 10$ V.

31.7 En fait les effets de bord et le couplage entre les armatures fixes font que les capacités des condensateurs ne sont pas linéaires en $\Delta x/L$.

De façon générale, on peut écrire en se limitant à l'ordre 3 en $\Delta x/L$, $C_1 = C_0 (1 + k_1(\Delta x/L) + k_2(\Delta x/L)^2 + k_3(\Delta x/L)^3)$. En déduire l'expression de C_2 .

31.8 À partir des résultats de la question 4, donner la valeur de k_1 .

31.9 En tenant compte de la non-linéarité des capteurs, quelle est la nouvelle expression de ΔV_{mes} ? On présentera le résultat sous forme d'un développement selon les puissances croissantes de $\Delta x/L$. On rappelle que $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - \dots$

31.10 Quel est l'ordre de la non linéarité de la mesure? Conclure.

31.11 Quelle relation doivent vérifier k_1 , k_2 et k_3 pour annuler toute non-linéarité?

31.12 On revient à l'expression de ΔV_{mes} calculée à la question 5 et ne tenant pas compte des non-linéarités des capteurs. Pour étudier le spectre de ΔV_{mes} (et rester dans le cadre d'un calcul simple), on suppose que l'évolution temporelle du mesurande est de la forme $\Delta x(t) = \Delta x \cos \omega t$. Après calcul, donner les pulsations

constituantes du spectre de $\Delta V_{mes}(t)$. Sous quelle forme se trouve portée l'information ?

31.13 On revient à l'expression de ΔV_{mes} , calculée à la question 9, qui tient compte des non-linéarités des capteurs. Pour une même évolution temporelle du mesurande en $\Delta x(t) = \Delta x \cos \omega t$, après calcul, donner les pulsations constituantes du spectre de $\Delta V_{mes}(t)$. Sous quelle forme se trouve maintenant portée l'information ? On se limitera à l'ordre 3 en $\Delta x/L$ dans l'expression de ΔV_{mes} . On rappelle que $\cos^3 u = (\cos 3u - 3 \cos u)/4$.

31.14 Sous quelle forme se trouverait portée l'information si on continuait le développement limité de la question 9 à des ordres supérieurs ?

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonvalle
- Le site de Dunod, à l'adresse suivante :
www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

EXERCICE : Capteur de température – Linéarisation

Énoncé

Dans ce qui suit, les températures exprimées en degrés Celsius figurent en minuscules, celles en kelvin en majuscules.

Soit un capteur de température constitué par une Pt100 insérée dans un tuyau de circulation d'eau à la température T_{eau} . Le milieu extérieur est à la température constante $t_{ext} = 20 \text{ °C}$ (soit $T_{ext} = 293,15 \text{ K}$). En négligeant la puissance dissipée par effet Joule dans le capteur, on peut établir la fonction de transfert suivante pour ce capteur à la température T :

$$H(p) = \frac{T - T_{ext}}{T_{eau} - T_{ext}} = \frac{\Delta T}{\Delta T_{eau}} = \frac{K_{eau}}{K_{eau} + K_{ext}} \frac{1}{1 + \frac{MC}{K_{eau} + K_{ext}} p} = G_0 \frac{1}{1 + \tau p}$$

K_{eau} représente le coefficient de couplage thermique entre le capteur et l'eau, K_{ext} celui entre le capteur et le milieu extérieur, M la masse du capteur et C sa capacité calorifique massique.

Numériquement, on donne le gain statique $G_0 = 5/6$ et la constante de temps $\tau = 5/3 \text{ s}$

32.1 Calculer en régime permanent la température t du capteur pour une température de l'eau de 20 °C .

32.2 À un instant pris pour origine, la température de l'eau de la canalisation passe brusquement de 20 à 100 °C . Calculer la température t du capteur au bout d'un temps $\theta = 3\tau$.

32.3 Quelle est la valeur de la température t du capteur si on attend un temps suffisamment long ?

On rappelle que la Pt100 a une résistance qui varie avec la température t exprimée en $^{\circ}\text{C}$ selon $R(t) = R(0)(1 + at + bt^2)$ où $R(0) = 100\ \Omega$ représente la résistance à $0\ ^{\circ}\text{C}$, $a = 3,90083 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$ et $b = -5,775 \cdot 10^{-7}/^{\circ}\text{C}^2$.

32.4 En considérant $t_0 = 0\ ^{\circ}\text{C}$ comme température de référence, donner la variation ΔR de $R(t)$ par rapport à $R(0)$ lorsque la température est t .

32.5 L'étendue de mesure de la Pt100 reste limitée à l'intervalle $[t_i ; t_s]$ avec $t_i = 0\ ^{\circ}\text{C}$ et $t_s = 100\ ^{\circ}\text{C}$.

On cherche à déterminer une approximation linéaire $R_{lin}(t) = R(0)(\alpha t + \beta)$ de $R(t) = R(0)(1 + at + bt^2)$ sur l'intervalle $[t_i ; t_s]$. Pour ce faire, on généralise les moindres carrés au cas continu selon :

$$\chi^2 = \frac{1}{t_s - t_i} \int_{t_i}^{t_s} [R(t) - R_{lin}(t)]^2 dt$$

Les bonnes valeurs à donner à α et β doivent minimiser χ^2 , on doit donc avoir $d\chi^2/d\alpha = 0$ et $d\chi^2/d\beta = 0$. Résoudre le système et, compte tenu que $t_i = 0$, montrer que α et β sont donnés par $\alpha = a + bt_s$ et $\beta = 1 - bt_s^2/6$ (on supposera sans le justifier que l'on peut intervertir dérivation par rapport à α et β et intégration par rapport à t).

32.6 Donner l'expression de l'écart à la linéarité que l'on notera δ puis celle de l'erreur de linéarité ε_{lin} .

32.7 À partir des résultats précédents, donner sur l'étendue de mesure l'approximation S_c de la sensibilité du capteur.

32.8 Le capteur est monté en quart de pont actif (voir figure 32.1) avec trois résistances fixes $R = 100\ \Omega$ et une source parfaite de fem $V_g = 10\ \text{V}$. L'amplificateur opérationnel est considéré comme parfait.

Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en considérant l'approximation linéaire du capteur et en déduire celle de la sensibilité S de la mesure.

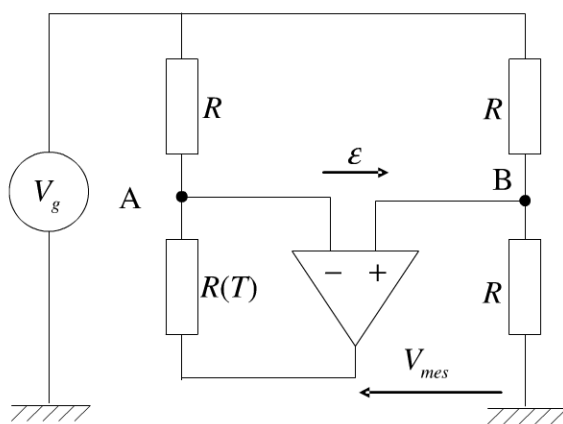


Figure 32.1 - Conditionnement du capteur

32 • Capteur de température - Linéarisation

32.9 La tension de mesure est passée dans un bloc de conditionnement du signal réalisé à partir d'un amplificateur opérationnel et d'un multimètre.

On désire que le multimètre affiche directement, en régime permanent, une tension V' égale à la température de l'eau avec un facteur d'échelle de 10 mV par °C (c'est-à-dire $V = t_{eau}/100$). Donner la relation littérale reliant V_{mes} et V' et en déduire les opérations que doit effectuer l'amplificateur opérationnel (conditionneur du signal).

32.10 Proposer un montage à amplificateur opérationnel pour le conditionneur du signal.

Corrigé détaillé

32.1 En régime permanent, si $t_{eau} = 20$ °C, alors $\Delta t_{eau} = \Delta T_{eau} = 0$ °C et donc $\Delta T = 0$ °C soit $t = 20$ °C.

32.2 Compte tenu de la forme de la fonction de transfert, dans le domaine temporel on a $\Delta T = \Delta T_{eau} G_0 (1 - e^{-\theta/\tau})$ où θ représente le temps. Pour $\theta = 3\tau$, on a :

$$\Delta T = \Delta T_{eau} G_0 (1 - e^{-3}) = \Delta t = 63,3 \text{ °C} \quad \text{soit} \quad t = 83,3 \text{ °C}$$

32.3 Pour θ tendant vers l'infini, on a $\Delta T = \Delta T_{eau} G_0 = 66,7$ °C soit $t = 66,7$ °C.

32.4 La température de référence est $t_0 = 0$ °C.

On a $\Delta R = R(t) - R(0) = R(0)(at + bt^2)$, le capteur est non-linéaire.

32.5 On a :

$$\chi^2 = \frac{R(0)}{t_s - t_i} \int_{t_i}^{t_s} [(1 + at + bt^2) - (\alpha t + \beta)]^2 dt$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \frac{d\chi^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 \int_{t_i}^{t_s} [(1 + at + bt^2) - (\alpha t + \beta)] \cdot t dt = 0 \\ \frac{d\chi^2}{d\beta} = 0 \Rightarrow -2 \int_{t_i}^{t_s} [(1 + at + bt^2) - (\alpha t + \beta)] \cdot dt = 0 \end{cases}$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{t^2}{2} + \frac{at^3}{3} + \frac{bt^4}{4} \right) - \left(\frac{\alpha t^3}{3} + \frac{\beta t^2}{2} \right) \right]_{t_i}^{t_s} = 0 \\ \left[\left(t + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3} \right) - \left(\frac{\alpha t^2}{2} + \beta t \right) \right]_{t_i}^{t_s} = 0 \end{cases} \quad (32.1)$$

Compte tenu que $t_i = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, le système (32.1) se résout en :

$$\begin{cases} \alpha = a + bt_s = 3,84 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C} \\ \beta = 1 - bt_s^2/6 = 1,00 \end{cases}$$

32.6 L'écart à la linéarité est donné par :

$$\delta = \text{Max} \left(\left| R(0) (1 + at + bt^2) - R(0) (\alpha t + \beta) \right| \right)_{t \in E.M.}$$

Cette dernière expression est maximale en $t_i = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ et $t_s = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ et de valeur $\delta = R(0) (\beta - 1) = 0,096$. On en déduit l'erreur de linéarité qui, puisque $t_i = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, s'écrit :

$$\varepsilon_{lin} = \frac{\delta}{R(t_s) - R(t_i)} = \frac{R(0) (\beta - 1)}{R(0) (1 + at_s + bt_s^2) - R(0)} = \frac{\beta - 1}{at_s + bt_s^2} \approx 0,25 \%$$

32.7 L'approximation de la sensibilité du capteur est simplement le rapport des variations $S_c = \Delta R(t) / \Delta t = \alpha R(0) = 0,384 \Omega / ^\circ\text{C}$.

32.8 L'amplificateur étant considéré comme parfait, on a :

$$V_A = \frac{R(t)V_g + RV_{mes}}{R(t) + R} \quad \text{et} \quad V_B = \frac{V_g}{2}$$

La contre-réaction amenant $V_A = V_B$, il vient :

$$V_{mes} = \frac{R - R(t)}{2R} V_g \quad (32.2)$$

Comme ici $R = R(0)$, avec $R(t) - R(0) = \Delta R$, (32.2) devient :

$$V_{mes} = -\frac{\Delta R}{2R(0)} V_g = -\frac{V_g}{2R(0)} S_c t = -\frac{\alpha V_g}{2} t = -9,6 \text{ mV}/^\circ\text{C} \quad (32.3)$$

32 • Capteur de température - Linéarisation

32.9 D'après la réponse à la question 2, $\Delta T = \Delta T_{eau} G_0 (1 - e^{-\theta/\tau})$ soit en régime permanent $\Delta T = G_0 \Delta T_{eau}$ ou encore $t = t_{ext} + G_0 (t_{eau} - t_{ext})$. On désire de plus que $V = t_{eau}/100$. Reporté dans (32.3), on obtient :

$$V_{mes} = -\frac{\alpha V_g}{2} [t_{ext}(1 - G_0) + 100G_0 V]$$

Inversement, il vient :

$$V = -\frac{2V_{mes}}{100G_0\alpha V_g} - \frac{1 - G_0}{100G_0} t_{ext} = -0,624 \cdot V_{mes} - 0,04 \quad (32.4)$$

32.10 Un montage possible serait un sommateur-inverseur (figure 32.2).

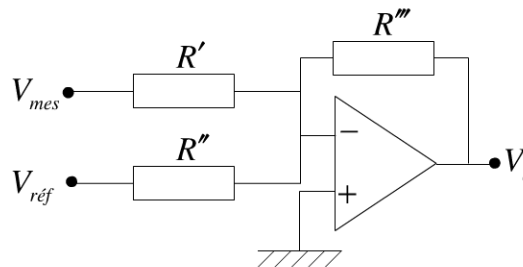


Figure 32.2 - Conditionnement du capteur

On a :

$$V_s = -R''' \left(\frac{V_{mes}}{R'} + \frac{V_{ref}}{R''} \right) \quad (32.5)$$

Avec par exemple, $R' = 1 \text{ k}\Omega$ et $V_{ref} = 4 \text{ V}$, l'identification de (32.4) à (32.5) donne $R''' = 624 \Omega$ et $R'' = 62,4 \text{ k}\Omega$.

EXERCICE : Défaut d'un potentiomètre utilisé en capteur angulaire

Énoncé

On considère le montage en demi-pont push-pull de la figure 33.1 où $R_1(\alpha)$ et $R_2(\alpha)$ désignent les deux résistances variables d'un potentiomètre rotatif. La course angulaire maximale du potentiomètre, notée Ω , est de 320° et la résistance totale de la piste, notée R , est de $2 \text{ k}\Omega$. La source de tension de fem V_g possède une résistance interne négligeable. R_3 et R_4 sont des résistances ajustables.

La piste résistive du potentiomètre présente un léger défaut d'épaisseur provenant du process industriel de fabrication si bien que la résistance $R_1(\alpha)$ doit s'écrire :

$$R_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\Omega} \left(1 + a \frac{\alpha}{\Omega} \right) \frac{R}{1 + a} \quad (33.1)$$

On désire équilibrer le pont pour une course angulaire α égale à $\Omega/2$.

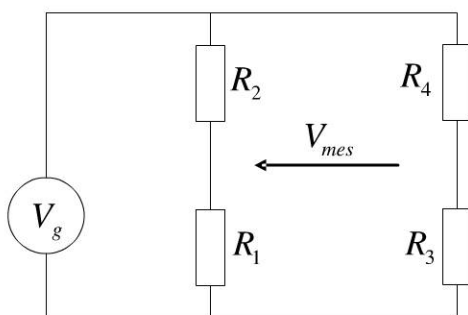


Figure 33.1 - Conditionnement en demi-pont

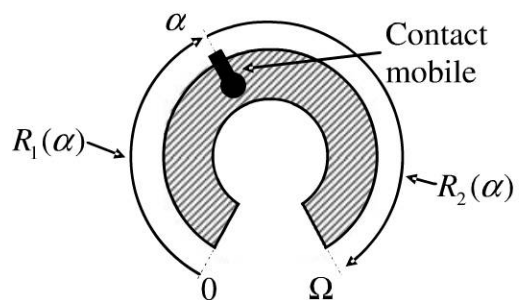


Figure 33.2 - Potentiomètre rotatif

33.1 Donner la valeur de $R_1(\Omega/2)$ notée R_{10} .

33.2 En déduire la valeur de $R_2(\Omega/2)$ notée R_{20} .

33.3 Quelles sont les valeurs à donner à R_3 et R_4 pour que le pont soit équilibré pour la position angulaire $\Omega/2$?

33.4 On considère une augmentation $\Delta\alpha$ de α à partir de la référence $\Omega/2$. Calculer $R_1(\Omega/2 + \Delta\alpha)$ puis en déduire $\Delta R_1 = R_1(\Omega/2 + \Delta\alpha) - R_{10}$.

33 • Défaut d'un potentiomètre utilisé en capteur angulaire

33.5 Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de $\Delta\alpha$, Ω , a et V_g .

33.6 Donner l'expression linéarisée $V_{mes,lin}$ de la tension de mesure V_{mes} .

33.7 En déduire l'erreur e_{lin} provenant de la non-linéarité que l'on estimera par :

$$e_{lin} = \frac{\max(V_{mes} - V_{mes,lin})}{V_{max} - V_{min}}$$

33.8 Quelle est la valeur maximale de a pour que e_{lin} reste inférieure à 1 % ?

Corrigé détaillé

33.1 En utilisant (33.1), on a immédiatement :

$$R_1(\Omega/2) = R_{10} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{2}\right) \frac{R}{1+a} = \frac{2+a}{1+a} \frac{R}{4} \quad (33.2)$$

33.2 Le mode de fonctionnement étant push-pull, on a :

$$R_2(\Omega/2) = R_{20} = R - R_{10} = \frac{2+3a}{1+a} \frac{R}{4}$$

33.3 Pour équilibrer le pont, il faut que les diviseurs de tension réalisés par chaque branche potentiométrique soient identiques.

On peut donc choisir par exemple $R_3 = R_{10}$ et $R_4 = R_{20}$ ce qui permet, à l'équilibre du pont, d'obtenir le même courant et le même effet Joule dans chaque branche potentiométrique. On minimise ainsi les risques de déséquilibre du pont liés aux variations de résistivité des résistances sous l'effet de leur auto-échauffement.

33.4 On a en remplaçant dans (33.1) :

$$\begin{aligned} R_1\left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha\right) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right) \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{a\Delta\alpha}{\Omega}\right) \frac{R}{1+a} \\ &= \left(1 + \frac{2\Delta\alpha}{\Omega}\right) \left(2 + a + \frac{2a\Delta\alpha}{\Omega}\right) \frac{1}{1+a} \frac{R}{4} \\ &= \left(2 + a + 4(1+a)\frac{\Delta\alpha}{\Omega} + 4a\left(\frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right)^2\right) \frac{1}{1+a} \frac{R}{4} \end{aligned} \quad (33.3)$$

On en déduit immédiatement en utilisant (33.2) et (33.3) :

$$\Delta R_1 = R_1\left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha\right) - R_{10} = \left((1+a)\frac{\Delta\alpha}{\Omega} + a\left(\frac{\Delta\alpha}{\Omega}\right)^2\right) \frac{R}{1+a} \quad (33.4)$$

33.5 L'expression de la tension de mesure est d'après la figure 33.1 :

$$\begin{aligned}
 V_{mes} &= \left(\frac{R_1 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right)}{R_1 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right) + R_2 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right)} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) V_g \\
 &= \left(\frac{R_1 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right)}{R_1 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right) + R_2 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right)} - \frac{R_{10}}{R_{10} + R_{20}} \right) V_g
 \end{aligned}$$

Comme $R_2 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right) = R - R_1 \left(\frac{\Omega}{2} + \Delta\alpha \right) = R - R_{01} - \Delta R_1$ et $R_{10} + R_{20} = R$, compte tenu de (33.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
 V_{mes} &= \left(\frac{R_{10} + \Delta R_1}{R_{10} + \Delta R_1 + R - R_{10} - \Delta R_1} - \frac{R_{10}}{R} \right) V_g = \frac{\Delta R_1}{R} V_g \\
 &= \frac{\Delta\alpha}{\Omega} \left(1 + \frac{a}{1+a} \frac{\Delta\alpha}{\Omega} \right) V_g
 \end{aligned} \tag{33.5}$$

33.6 L'expression linéaire de V_{mes} donc à l'ordre 1 en $\Delta\alpha/\Omega$ est simplement :

$$V_{mes,lin} = \frac{\Delta\alpha}{\Omega} V_g \tag{33.6}$$

À l'ordre 1 en $\Delta\alpha/\Omega$, le défaut lié au process de fabrication n'a pas d'effet sur la mesure.

33.7 L'expression (33.5) est monotone et croissante en $\Delta\alpha/\Omega$ sur son intervalle de variation $[-1/2 ; +1/2]$. Les valeurs extrémales de la tension de mesure sont donc :

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{1+a} \right) V_g \quad \text{et} \quad V_{\min} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{1+a} \right) V_g \tag{33.7}$$

En utilisant (33.5), (33.6) et (33.7), on a :

$$\begin{cases} \max(V_{mes} - V_{mes,lin}) = \max \left(\frac{a}{1+a} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Omega} \right)^2 V_g \right) = \frac{a}{4(1+a)} V_g \\ V_{\max} - V_{\min} = V_g \end{cases}$$

L'erreur e_{lin} provenant de la non-linéarité introduite par le défaut de process de fabrication est donc $e_{lin} = a/4(1+a)$.

33.8 Pour que cette erreur reste inférieure à 1 %, on doit avoir $a \leq 4 \cdot 10^{-2}$.

EXERCICE : Capteur capacitif – Effet de la dilatation

Énoncé

On considère le montage suivant réalisant deux capteurs capacitifs destinés à mesurer les micro-déplacements de la partie mobile dans la direction x . L'ensemble est utilisé industriellement près du creuset de fusion d'un métal et sa température T subit donc de très fortes variations. La permittivité ε du milieu peut être considérée comme totalement fixe. On espère de ce système une erreur de précision inférieure à 1 %.

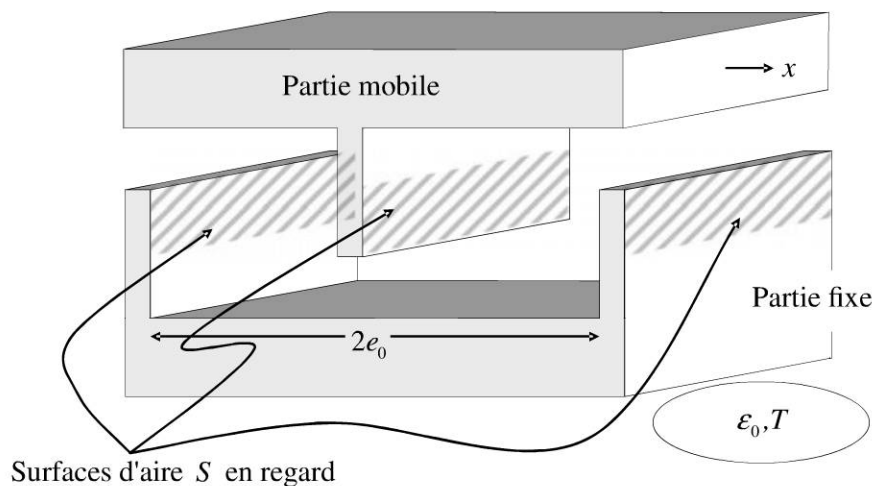


Figure 34.1 - Capteur capacitif

La partie mobile est à sa position de référence lorsqu'elle se trouve au milieu de la partie fixe. Les entrefers des deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 ainsi formés entre la partie mobile et les deux extrémités de la partie fixe valent alors e_0 . On néglige les effets de bord et on considère que les deux condensateurs sont plans d'aire S . La température prise comme référence des températures est notée T_0 .

34.1 Donner la valeur de la capacité C_0 que prennent les condensateurs dans la position d'équilibre (ou position de référence) et à la température de référence T_0 .

34.2 Les condensateurs sont alimentés en régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω . En déduire alors leur impédance commune notée Z_0 .

34.3 La partie mobile se déplace dans la direction x si bien que l'entrefer du condensateur de capacité C_1 devient $e_1 = e_0 + \Delta x$ et que celui du condensateur de capacité C_2 devient $e_2 = e_0 - \Delta x$. Donner les nouvelles impédances Z_1 et Z_2 des deux condensateurs. On exprimera ces dernières en fonction de Z_0 , e_0 et Δx .

On considère le montage de la figure ci-contre où les deux capteurs sont associés à deux résistances fixes R . La source de tension de fem V_g possède une impédance interne considérée comme négligeable.

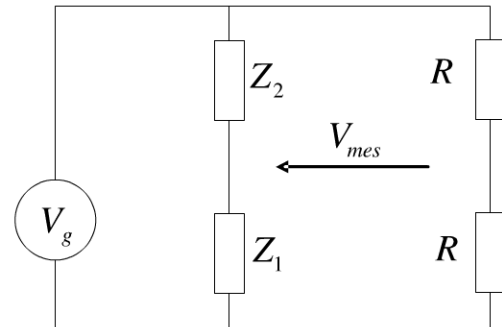


Figure 34.2 - Conditionnement

34.4 Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de Z_1 , Z_2 et V_g puis en fonction de e_0 , Δx et V_g .

À partir de la température de référence, la température du milieu augmente fortement et passe à la valeur T . Cette augmentation provoque une dilatation du matériau du capteur. Cette dilatation fait que l'aire des surfaces en regard passent de S à $S(1 + k\lambda\Delta T)(1 + \lambda\Delta T)$ où k est un coefficient sans dimension dépendant de la géométrie, λ le coefficient de dilatation linéique du matériau et $\Delta T = T - T_0$. Simultanément, l'entrefer passe de e_0 à $e_0(1 + \lambda\Delta T)$.

34.5 Donner la nouvelle valeur, notée Z'_0 , de l'impédance des deux condensateurs à l'équilibre. L'exprimer en fonction de Z_0 , k , λ et ΔT .

34.6 Comme précédemment, la partie mobile se déplace dans la direction x si bien que l'entrefer du condensateur de capacité C_1 augmente de Δx et que celui du condensateur de capacité C_2 diminue de Δx . Donner les nouvelles impédances Z'_1 et Z'_2 des deux condensateurs en fonction de Z_0 , k , λ , ΔT , e_0 et Δx .

34.7 Donner la nouvelle expression de tension de mesure V_{mes} , notée V'_{mes} , en fonction de λ , ΔT , e_0 , Δx et V_g .

34.8 L'effet de la variation de température est-elle rédhibitoire sachant que λ est de l'ordre de $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et que ΔT est au maximum de $400 \text{ }^\circ\text{C}$?

Corrigé détaillé

34.1 Les effets de bord étant négligés, la capacité est donnée par l'expression classique d'un condensateur plan à savoir $C_0 = \varepsilon S / e_0$.

34.2 En régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω , l'impédance commune Z_0 s'écrit :

$$Z_0 = \frac{1}{jC_0\omega} = \frac{e_0}{j\varepsilon S \omega}$$

34.3 De façon similaire, on a maintenant :

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{e_1}{j\varepsilon S \omega} = \frac{e_0 + \Delta x}{j\varepsilon S \omega} = Z_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{e_0} \right) \\ Z_2 = \frac{e_2}{j\varepsilon S \omega} = \frac{e_0 - \Delta x}{j\varepsilon S \omega} = Z_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{e_0} \right) \end{cases} \quad (34.1)$$

On est en présence de deux capteurs linéaires fonctionnant en mode push-pull.

34.4 Compte tenu du conditionnement représenté figure 34.2 et de (34.1), on a :

$$V_{mes} = \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{V_g}{2} = \frac{\Delta x}{e_0} \frac{V_g}{2} \quad (34.2)$$

34.5 On a maintenant :

$$Z'_0 = \frac{e'_0}{j\varepsilon S' \omega} = \frac{e_0(1 + \lambda\Delta T)}{j\varepsilon S(1 + k\lambda\Delta T)(1 + \lambda\Delta T)\omega} = \frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T}$$

34.6 La nouvelle impédance Z'_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} Z'_1 &= \frac{e_0(1 + \lambda\Delta T) + \Delta x}{j\varepsilon S(1 + k\lambda\Delta T)(1 + \lambda\Delta T)\omega} = Z'_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)} \right) \\ &= \frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T} \left(1 + \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)} \right) \end{aligned}$$

De la même façon, on a :

$$Z'_2 = \frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T} \left(1 - \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)} \right)$$

34.7 (34.2) devient alors :

$$\begin{aligned}
 V'_{mes} &= \frac{Z'_1 - Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} \frac{V_g}{2} \\
 &= \frac{\frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T} \left(1 + \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)}\right) - \frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T} \left(1 - \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)}\right)}{\frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T} \left(1 + \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)}\right) + \frac{Z_0}{1 + k\lambda\Delta T} \left(1 - \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)}\right)} \frac{V_g}{2} \\
 &= \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)} \frac{V_g}{2}
 \end{aligned}$$

34.8 Au maximum, $\lambda\Delta T \approx 4 \cdot 10^{-3}$. On peut donc écrire :

$$V'_{mes} = \frac{\Delta x}{e_0(1 + \lambda\Delta T)} \frac{V_g}{2} \approx \frac{\Delta x}{e_0} \frac{V_g}{2} (1 - \lambda\Delta T)$$

La différence relative entre V_{mes} et V'_{mes} n'est au maximum que de 0,4 % ce qui reste acceptable devant l'erreur de précision maximale requise de 1 %.

EXERCICE : Photodiode à deux cadrans utilisée en capteur d'angle

Énoncé

La photodiode à cadrans fonctionne d'un point de vue semi-conducteur exactement de la même façon que la photodiode PIN. La seule différence consiste en un très fin « mur » isolant partageant la photodiode en deux cadrans 1 et 2 comme représenté sur la figure 35.1. Tout se passe comme si on avait en fait deux photodiodes accolées.

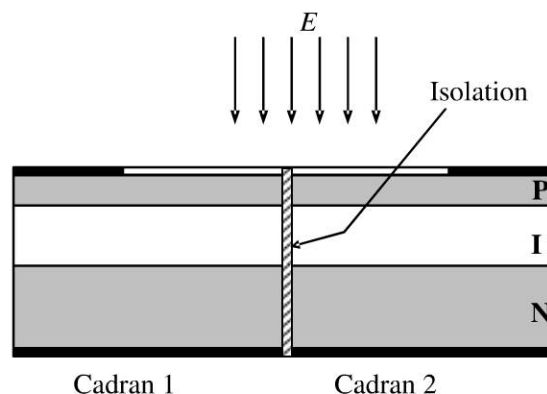


Figure 35.1 - Photodiode à cadrans

Un faisceau laser d'intensité E et de section S engendre donc deux courants I_1 et I_2 proportionnels aux aires A_1 et A_2 des surfaces S_1 et S_2 du faisceau interceptées par les cadrans 1 et 2. Si on néglige la largeur du mur d'isolation, ce qui est le cas pour la suite, on a bien évidemment $A = A_1 + A_2$ où A est l'aire de la section S du faisceau (voir figure 35.2).

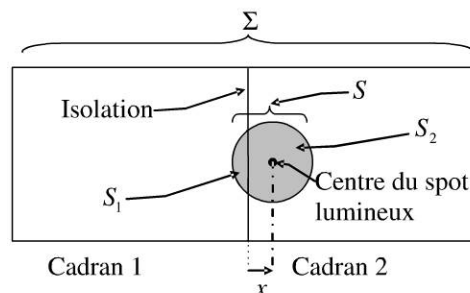


Figure 35.2 - Principe de mesure

On rappelle que l'aire A' de la surface S' coupée dans un disque de rayon r par une corde à la distance u du centre (figure 35.3) est donnée par :

$$A' = r^2 \arccos\left(\frac{u}{r}\right) - u \sqrt{r^2 - u^2}$$

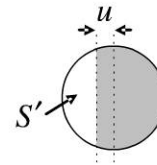


Figure 35.3 - Surface coupée S'

I. Principe de la photodiode à deux cadrans

35.1 Déterminer en fonction de x (compté positivement lorsque le centre du faisceau se déplace vers le cadran 2), la valeur de l'aire A_1 , aire de l'intersection de la section S du faisceau et du cadran 1 ; on notera r le rayon du spot lumineux. Déterminer la valeur de l'aire A_2 , aire de l'intersection de la surface S et du cadran 2.

35.2 Le faisceau lumineux a une puissance ϕ_l en sortie du laser émetteur et que le milieu de propagation n'est pas absorbant. Écrire en fonction de ϕ_l , A_1 , A_2 et A , les puissances ϕ_1 et ϕ_2 respectivement reçues par les cadrans 1 et 2 pour un déplacement x du centre du spot lumineux.

35.3 On néglige le courant d'obscurité des photodiodes et on considère qu'elles ont une même sensibilité S_{phot} , en déduire les courants I_1 et I_2 correspondants.

II. Mesure des courants

Le montage électronique de conditionnement est réalisé de la façon présentée figure 35.4 où l'on suppose que les composants utilisés sont parfaits. On suppose que la puissance lumineuse incidente du faisceau et sa position sont constantes.

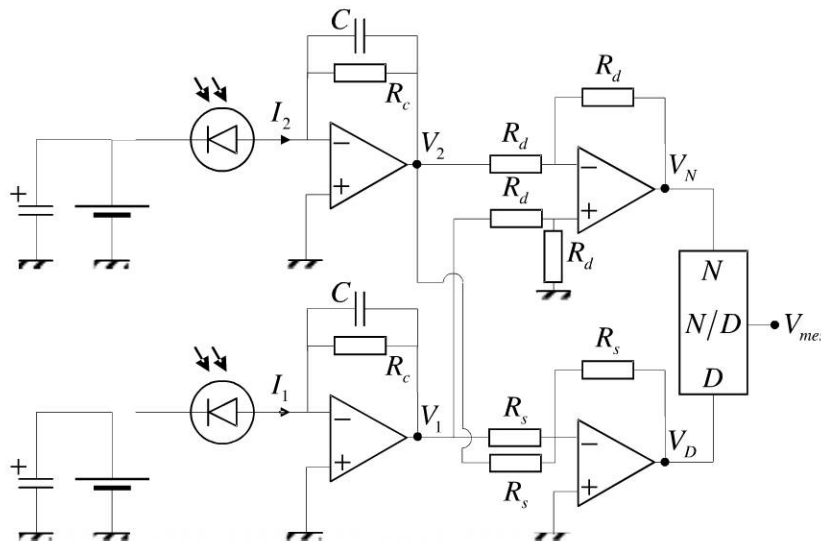


Figure 35.4 - Électronique de conditionnement

35 • Photodiode à deux cadrans utilisée en capteur d'angle

35.4 Déterminer les expressions de V_1 et V_2 . Que réalise chacune des voies du premier étage du montage précédent ?

35.5 Déterminer l'expression de V_N .

35.6 Déterminer l'expression de V_D .

35.7 Le diviseur, étage de sortie du montage précédent, possède une sortie de la forme $V.N/D$ où $V = 10$ V. Déterminer l'expression de la tension de sortie V_{mes} en fonction de I_1 , I_2 et V puis en fonction de V , x et r .

35.8 Le déplacement x restant faible, calculer l'expression de l'approximation linéaire de $V_{mes,lin}$ en x . On rappelle que le développement limité au voisinage de 0 de $\arccos(u)$ et de $\sqrt{1-u^2}$ sont donnés par :

$$\arccos(u) = \pi/2 - u - u^3/6 - 3u^5/40 + u^5\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$$

$$\sqrt{1-u^2} = 1 - u^2/2 - u^4/8 + u^4\varepsilon'(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon'(u) = 0$$

III. Principe de la mesure d'une micro rotation

On cherche à mesurer avec précision un micro angle de rotation en utilisant la photodiode à cadrans. Pour ce, on colle un miroir parfait dans un plan passant par l'axe de rotation. Un faisceau laser de section circulaire est envoyé sur le miroir avec une incidence i_0 , la photodiode est centrée sur le spot du laser lorsque l'angle de rotation est nul (on ajuste la position latérale de la photodiode de façon à avoir $I_1 = I_2$ et la photodiode parfaitement perpendiculaire au faisceau réfléchi).

Lorsque le miroir solidaire de la pièce en rotation tourne d'un angle α , le centre du spot se déplace latéralement d'une distance x sur la photodiode.

Le principe de la mesure, sans contact, est schématisé figure 35.5.

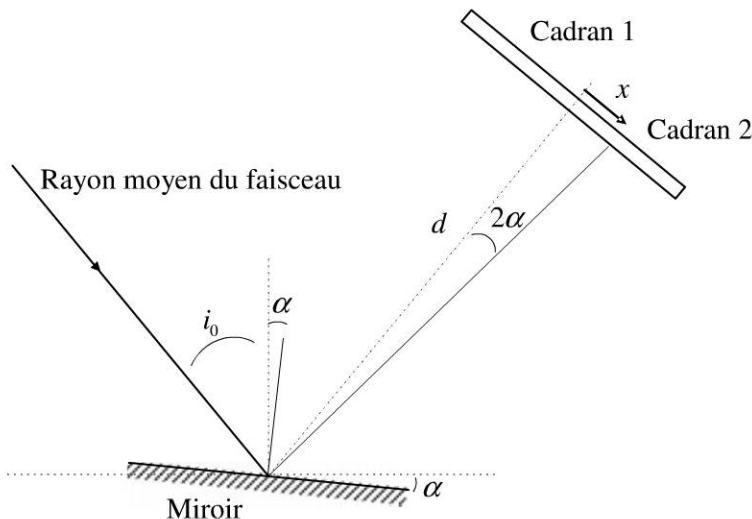


Figure 35.5 - Électronique de conditionnement

35.9 Montrer à l'aide éventuellement d'un schéma, que si le miroir tourne d'un angle α , le faisceau réfléchi tourne d'un angle 2α .

35.10 Exprimer x en fonction de l'angle α et de d , distance entre le centre du miroir et le centre de la photodiode. En donner une approximation au premier ordre en α .

On rappelle que le développement limité au voisinage de 0 de $\tan(u)$ est donné par :

$$\tan(u) = u + u^3/3 + 2u^5/15 + u^5 \varepsilon''(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon''(u) = 0$$

35.11 En déduire une approximation linéaire de la relation entre la tension de mesure V_{mes} et l'angle α .

35.12 Calculer la sensibilité de la mesure S_{mes} . On donne $d = 1$ m et $r = 1$ mm. Le résultat sera donné en V/rad puis en V/°.

35.13 Quels sont les avantages du conditionnement électronique effectué au II. ?

35.14 En poussant plus loin les développements limités des questions 35.8 et 35.10, donner l'approximation de V_{mes} à l'ordre 3 en α .

35.15 Évaluer l'erreur relative de non-linéarité ζ engendrée. La calculer pour la valeur maximale de l'angle α fixée à $\alpha_{\max} = 1/100^\circ$.

Corrigé détaillé

I. Principe de la photodiode à deux cadrans

35.1 Pour obtenir la valeur de l'aire A_1 , aire de l'intersection de la surface et du cadran 1, il suffit de prendre l'expression donnée dans l'énoncé en remplaçant la variable par x . On obtient immédiatement $A_1 = r^2 \arccos(x/r) - x \sqrt{r^2 - x^2}$.

Comme $A = A_1 + A_2$, est l'aire du spot lumineux de rayon r , on a $A = \pi r^2$ et donc $A_2 = r^2(\pi - \arccos(x/r)) + x \sqrt{r^2 - x^2}$.

35.2 En faisant l'hypothèse d'une répartition énergétique uniforme dans la section du faisceau, on a immédiatement $\phi_1 = A_1 \phi_I / A$ et $\phi_2 = A_2 \phi_I / A$.

35.3 Les courants d'obscurité étant négligés, on a directement $I_1 = S_{phot} A_1 \phi_I / A$ et $I_2 = S_{phot} A_2 \phi_I / A$.

II. Mesure des courants

35.4 Selon l'énoncé, comme on se trouve en régime statique et que les amplificateurs opérationnels sont parfaits, on obtient immédiatement les expressions $V_1 = -R_c I_1$ et $V_2 = -R_c I_2$. Le premier étage du conditionneur réalise donc une conversion courant-tension.

35.5 Il vient rapidement $V_N = V_1 - V_2$. On a là un montage soustracteur.

35.6 De même $V_D = -(V_1 + V_2)$. On a là un montage sommateur-inverseur.

35.7 On obtient en utilisant les résultats précédents :

$$V_{mes} = V \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = V \frac{(I_2 - I_1)}{(I_2 + I_1)} = V \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos(x/r) + \frac{2x}{\pi r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right)$$

35.8 À l'aide des développements de Taylor donnés dans l'énoncé, on obtient l'approximation linéaire de V_{mes} donnée par $V_{mes,lin} = 4xV/\pi r$.

III. Principe de la mesure d'une micro rotation

35.9 Les lois de la réflexion de Descartes permettent d'établir le schéma de la figure 35.6 et on a alors immédiatement $\beta = 2\alpha$ ce qui montre bien que si le miroir tourne d'un angle α , le faisceau réfléchi tourne d'un angle 2α .

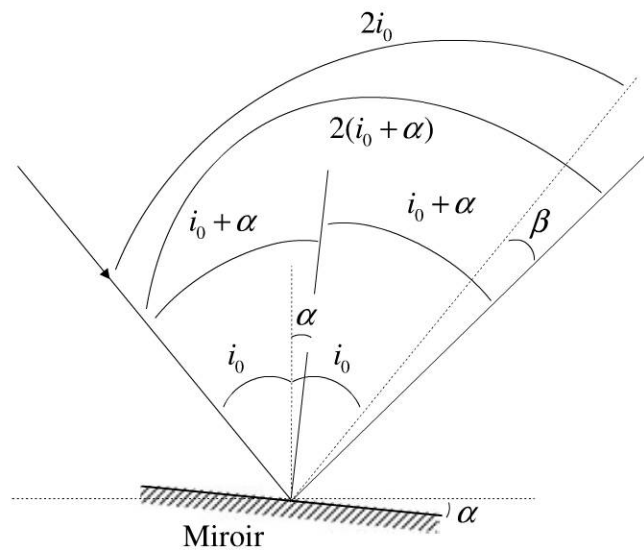


Figure 35.6 - Loi de réflexion de Descartes

35.10 D'après la figure 35.5, on a immédiatement $\tan 2\alpha = x/d$ soit, aux petits angles, $x \approx 2\alpha d$.

35.11 En remplaçant simplement le résultat précédent dans celui de la question 35.8, il vient $V_{mes,lin} = 8dV\alpha/\pi r$.

35.12 La sensibilité de la mesure S_{mes} est donnée par :

$$S_{mes} = \Delta V_{mes,lin}/\Delta\alpha = 8dV/\pi r \quad \text{soit} \quad S_{mes} = 25465 \text{ V/rd} = 444 \text{ V/}^\circ$$

35.13 L'électronique normalisant la différence des deux courants par rapport à leur somme, le résultat est indépendant de toute fluctuation de l'intensité du faisceau.

35.14 En poussant plus loin les développements limités des questions 35.8 et 35.10, on obtient :

$$\begin{cases} V_{mes} \simeq V \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos(x/r) + \frac{2x}{\pi r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right) = \frac{4xV}{\pi r} \left(1 - \frac{x^2}{6r^2} \right) \\ \frac{x}{d} = \tan 2\alpha \simeq 2\alpha + \frac{8\alpha^3}{3} \end{cases}$$

En combinant ces deux équations il vient à l'ordre 3 en α :

$$V_{mes} \simeq \frac{8Vd\alpha}{\pi r} \left[1 + \frac{4}{3}\alpha^2 \left(1 - \frac{d^2}{2r^2} \right) \right]$$

35.15 L'erreur relative de non-linéarité ζ engendrée est donnée par :

$$\zeta = \frac{4}{3}\alpha^2 \left(1 - \frac{d^2}{2r^2} \right)$$

Pour $\alpha_{\max} 1/100^\circ$, on obtient $\zeta \simeq -2\%$, ce qui est encore un ordre de grandeur acceptable.

EXERCICE : Capteur angulaire sans contact à magnétorésistance

Énoncé

Un capteur angulaire destiné à fonctionner en mode push-pull est constitué de quatre magnétorésistances en arc de cercle (voir figure 36.1). Ces magnétorésistances sont constituées d'un dépôt d'épaisseur e constante d'un matériau présentant une magnétorésistance géante. Les pistes des magnétorésistances extérieures, de résistance R_1 et R_2 , sont de rayon moyen r_e et de largeur δ_e . Les pistes des magnétorésistances intérieures, de résistance R_3 et R_4 , sont de rayon moyen r_i et de largeur δ_i .

Les largeurs des pistes peuvent être considérées comme faibles devant leurs longueurs.

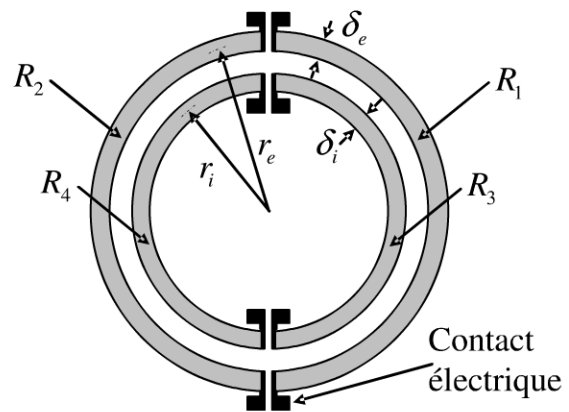


Figure 36.1 - Principe du capteur

36.1 Le système n'étant soumis à aucun champ magnétique, la conductivité du matériau est γ_0 . On suppose que chaque magnétorésistance forme un demi-cercle parfait. Donner en première approximation les valeurs des résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 des quatre magnétorésistances en fonction des variables γ_0 , e , δ_i , δ_e , r_i et r_e .

36.2 δ_i , r_i et r_e étant fixées, comment ajuster δ_e pour avoir en l'absence de champ magnétique $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$? On notera R_0 cette valeur par la suite.

36.3 Que devient la valeur commune R_0 des magnétorésistances si maintenant on place l'ensemble dans un champ d'induction magnétique uniforme d'intensité B amenant une conductivité γ_m du matériau les constituant ? On notera R_m cette grandeur et on l'exprimera en fonction de R_0 , γ_0 et γ_m .

Pour réaliser le capteur angulaire sans contact, on place le système dans l'entrefer d'un aimant donnant un champ supposé uniforme, d'intensité B sur la partie hachurée de la figure 36.2 et supposée nulle ailleurs. On rappelle que lorsque le matériau se trouve dans le champ, sa conductivité passe de γ_0 à γ_m .

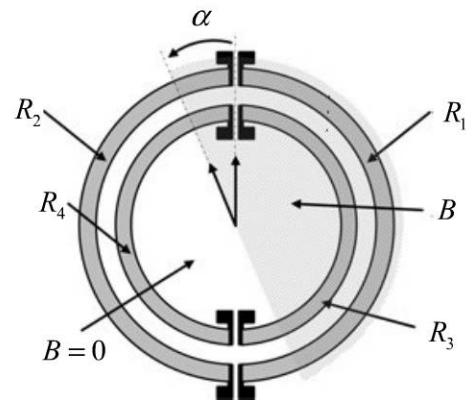


Figure 36.2 - Capteur sous le champ

36.4 Établir la nouvelle expression de la résistance R_1 dans la configuration de la figure 36.2.

36.5 De la même façon, donner les valeurs des résistances R_2 , R_3 et R_4 des trois autres magnétorésistances.

36.6 Tracer sur un même schéma les courbes d'évolution de la résistance des quatre magnétorésistances. On rappelle que la conductivité d'un matériau magnétorésistif diminue avec le carré du champ magnétique appliqué.

36.7 Conclure quant à la caractéristique des magnétorésistances utilisées en capteur d'angle selon le principe décrit par la figure 36.2.

36.8 Les quatre magnétorésistances sont montées en pont push-pull, pont alimenté par une source de courant parfaite I_g . Faire un schéma de la façon dont il faut placer les quatre magnétorésistances pour obtenir une tension de mesure différentielle optimale notée V_{mes} .

36.9 Donner l'expression de V_{mes} .

36.10 Pour $0 < \alpha < \pi$ et pour $\pi < \alpha < 2\pi$, donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} .

36.11 Pour quelles valeurs de l'angle α le pont est-il équilibré ?

36.12 Tracer la courbe d'évolution de la tension de mesure en fonction de l'angle.

36.13 Lorsque le matériau magnétorésistif est dans le champ, sa conductivité chute de 8 %. La résistance hors champ R_0 des magnétorésistances est de 100Ω et le pont est alimenté par $I_g = 10 \text{ mA}$. Donner l'expression de la sensibilité S_{mes} .

36.14 Quel est l'inconvénient de ce type de capteur ? Que pourrait-on envisager de modifier dans sa conception pour avoir une mesure non équivoque sur 360° ?

Corrigé détaillé

36.1 On a en première approximation $R_1 = R_2 = \pi r_e / (\gamma_0 \delta_e e)$ et $R_3 = R_4 = \pi r_i / (\gamma_0 \delta_i e)$. Cette approximation est d'autant plus vraie que $r_e \gg \delta_e$ et $r_i \gg \delta_i$.

36.2 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ conduit à avoir $r_i / \delta_i = r_e / \delta_e$ soit $\delta_e = \delta_i r_e / r_i$, ce qui entraîne $R_0 = \pi r_i / (\gamma_0 \delta_i e)$.

36.3 On a alors $R_0 = \pi r_i / (\gamma_m \delta_i e)$ ce qui conduit à $R_m = R_0 \gamma_0 / \gamma_m$.

36.4 Sur les parties exposées au champ, la résistance par unité d'arc est R_m / π alors que sur les parties non exposées, elle est de R_0 / π . Pour un déplacement angulaire α depuis l'origine, on a donc pour la résistance R_1 :

$$R_1 = \begin{cases} \frac{(\pi - \alpha)R_m + \alpha R_0}{\pi} & \text{si } 0 < \alpha < \pi \\ \frac{(\alpha - \pi)R_m + (2\pi - \alpha)R_0}{\pi} & \text{si } \pi < \alpha < 2\pi \end{cases}$$

36.5 On a $R_3 = R_1$ et $R_2 = R_4$, et de la même façon que précédemment, il vient :

$$R_2 = \begin{cases} \frac{(\pi - \alpha)R_0 + \alpha R_m}{\pi} & \text{si } 0 < \alpha < \pi \\ \frac{(\alpha - \pi)R_0 + (2\pi - \alpha)R_m}{\pi} & \text{si } \pi < \alpha < 2\pi \end{cases}$$

36.6 Comme $\gamma_m < \gamma_0$, il vient $R_0 < R_m$. On a donc les courbes suivantes :

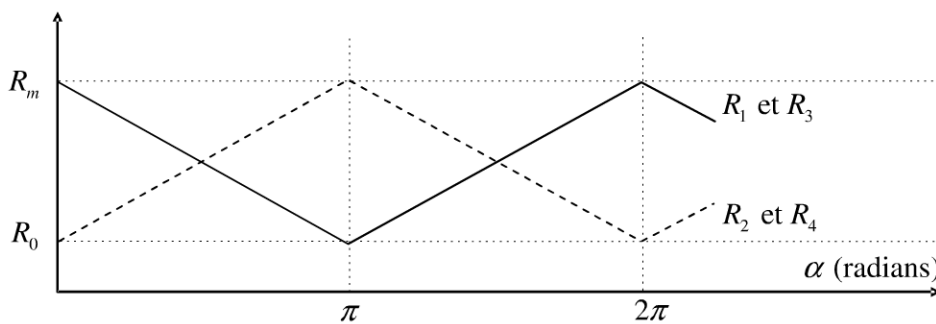


Figure 36.3 - Évolution des résistances des magnétorésistances

36.7 Les magnétorésistances varient linéairement avec le déplacement angulaire.

36.8 Une des configurations possibles du pont est représentée sur la figure 36.4.

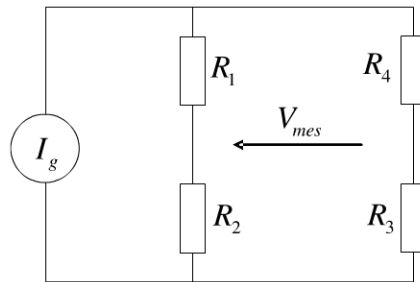


Figure 36.4 - Montage en pont

36.9 Compte tenu que $R_3 = R_1$ et $R_2 = R_4$, le même courant $I_g/2$ parcourt chaque branche et il vient :

$$V_{mes} = \frac{R_2 - R_1}{2} I_g$$

36.10 En remplaçant les résistances par leurs expressions, on obtient pour V_{mes} :

$$\begin{cases} \frac{R_m - R_0}{2} I_g \left[\frac{2\alpha}{\pi} - 1 \right] & \text{pour } 0 < \alpha < \pi \\ \frac{R_m - R_0}{2} I_g \left[3 - \frac{2\alpha}{\pi} \right] & \text{pour } \pi < \alpha < 2\pi \end{cases}$$

36.11 Le pont est équilibré ($V_{mes} = 0$) pour $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 3\pi/2$.

36.12 L'allure de la tension de mesure est représentée figure 36.5.

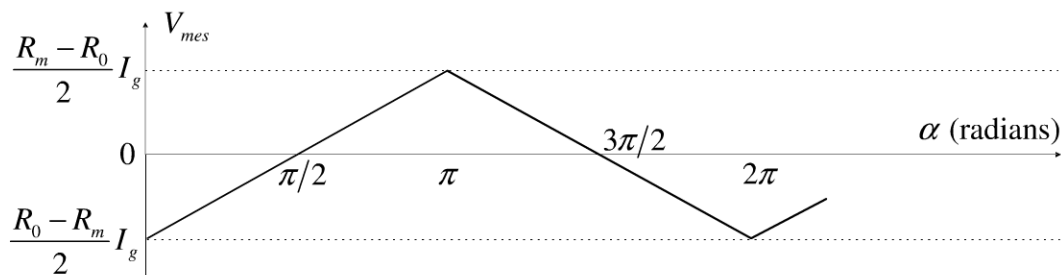


Figure 36.5 - Évolution de la tension de mesure

36.13 La sensibilité de la mesure est par définition $S_{mes} = \Delta V_{mes} / \Delta \alpha$. On obtient donc :

$$\begin{cases} S_{mes} = \frac{R_m - R_0}{\pi} I_g = 444 \mu\text{V}/^\circ & \text{pour } 0 < \alpha < \pi \\ S_{mes} = -\frac{R_m - R_0}{\pi} I_g = -444 \mu\text{V}/^\circ & \text{pour } \pi < \alpha < 2\pi \end{cases}$$

36.14 La mesure n'est non équivoque que sur $[0 ; \pi]$. Pour passer à une étendue de mesure sur $[0 ; 2\pi]$, une solution consisterait à ajouter des pistes magnétorésistives en quadrature avec les premières.

37

EXERCICE : Capteur de débit à tube Venturi – Tension de mode commun

Énoncé

On considère une conduite dans laquelle circule un liquide supposé parfait (viscosité nulle), incompressible et de masse volumique ρ . Afin d'effectuer une mesure du débit volumique Q_V on remplace une section horizontale de la conduite par un tube de Venturi muni de deux capteurs de pression comme schématisé figure 37.1. L'écoulement dans la conduite est considéré comme laminaire et stationnaire. Les rayons du tube de Venturi au niveau des capteurs de pression sont respectivement r_1 et r_2 .

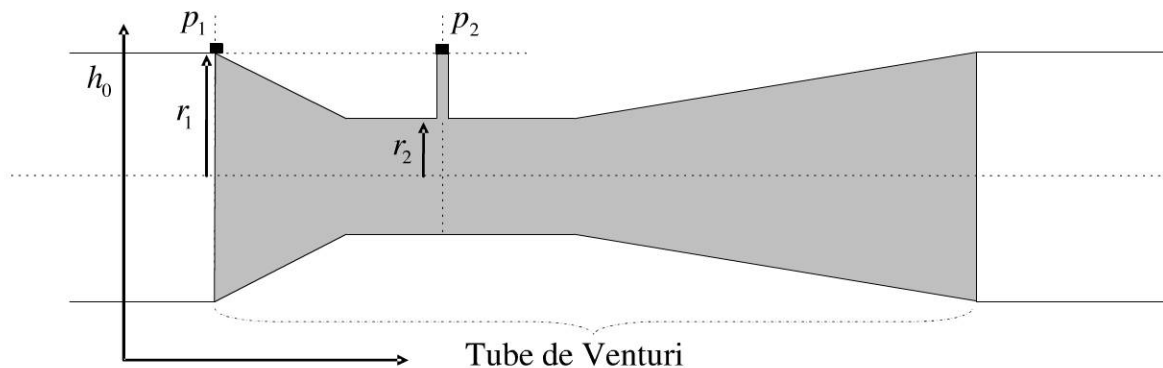


Figure 37.1- Principe du débitmètre à tube de Venturi

I. Le tube Venturi

37.1 Établir l'expression du débit Q_V volumique dans le tube de Venturi au niveau des deux capteurs.

37.2 En utilisant le théorème de Bernoulli, établir la relation entre la différence de pression $p_1 - p_2$ et le débit Q_V .

II. Amplificateur de différence – Tension de mode commun

On considère le montage amplificateur de différence de la figure 37.2.

Les tensions V_A et V_B correspondent aux tensions sortant des capteurs et mesurant respectivement les pressions p_1 et p_2 .

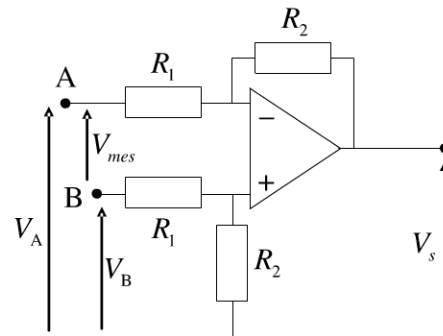


Figure 37.2 – Amplificateur de différence

37.3 L'amplificateur opérationnel est considéré parfait. Calculer la valeur de la tension de sortie V_s . On donne

$$R_2 = 1000R_1 = 1 \text{ M}\Omega \quad \text{et} \quad V_{mes} = V_A - V_B = 1 \text{ mV}$$

37.4 On considère maintenant que l'amplificateur opérationnel utilisé a un facteur de réjection du mode commun $\tau = A_d/A_{mc}$ fini (A_d et A_{mc} représentant respectivement le facteur d'amplification différentiel en boucle ouverte et le facteur d'amplification en mode commun). Calculer la nouvelle valeur de la tension de sortie V_s .

On donne

$$V_{mc} = (V_A - V_B)/2 = 1 \text{ V}, \tau = 80 \text{ dB et } A_d = 10^5$$

III. Amplificateur d'instrumentation

Pour pallier le problème précédent lié à l'amplification de la tension de mode commun, on réalise le montage amplificateur de différence ou amplificateur d'instrumentation de la figure 37.3. Cet amplificateur est réalisé à partir d'amplificateurs opérationnels identiques à ceux de la partie II.

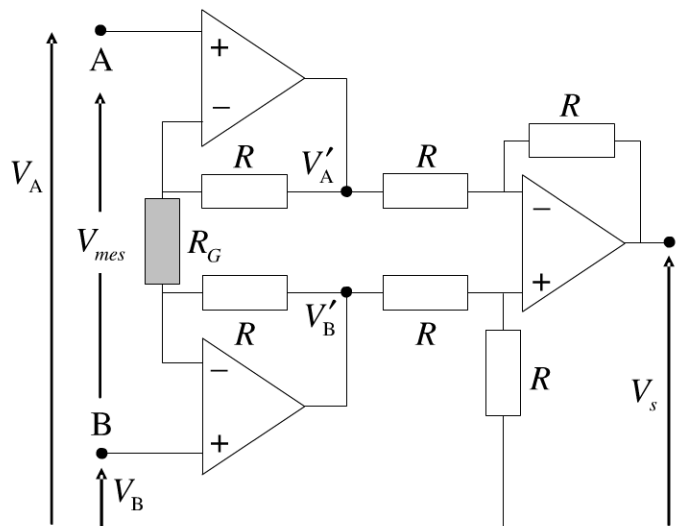


Figure 37.3 – Amplificateur d'instrumentation

37 • Capteur de débit à tube Venturi – Tension de mode commun

37.5 En considérant le facteur de réjection comme fini, calculer les tensions V'_A et V'_B .

37.6 En déduire les expressions de $V'_A - V'_B$ et $V'_A + V'_B$ puis en utilisant les résultats de la partie II, calculer la valeur de la tension de sortie V_s et le facteur de réjection du mode commun pour les mêmes valeurs de V_{mes} et V_{mc} que précédemment. On supposera que R_G est ajusté de façon à ce que le gain soit identique à celui du montage de la partie II.

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville
- Le site de Dunod, à l'adresse suivante :
www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

Partie 2

Problèmes

1

PROBLÈME : Mesure de la température de l'eau d'une installation de chauffage central

La mesure de la température au moyen d'une résistance métallique est plus simple à mettre en œuvre que la thermométrie par thermocouple. La mesure est absolue et il n'y a pas à faire appel à une jonction de référence ou à une compensation de soudure froide. En revanche et contrairement aux thermocouples, les résistances thermométriques, étant alimentées, peuvent être soumises à un effet d'auto échauffement par effet Joule si le courant n'est pas maintenu en dessous d'une valeur seuil.

Énoncé

On considère une installation de chauffage central où, entraînée par une pompe, l'eau circule à partir de la chaudière dans un réseau de canalisations. On désire pouvoir mesurer et surveiller la température de l'eau en sortie de la chaudière. Pour cela, on utilise comme capteur une sonde à résistance de platine Pt100 ($R_0 = 100 \Omega$ à 0°C) munie d'une enveloppe de protection que l'on insère dans la canalisation de sortie de la chaudière (voir figure 1.1). On fait l'hypothèse que l'eau circule toujours à la même vitesse dans cette canalisation.

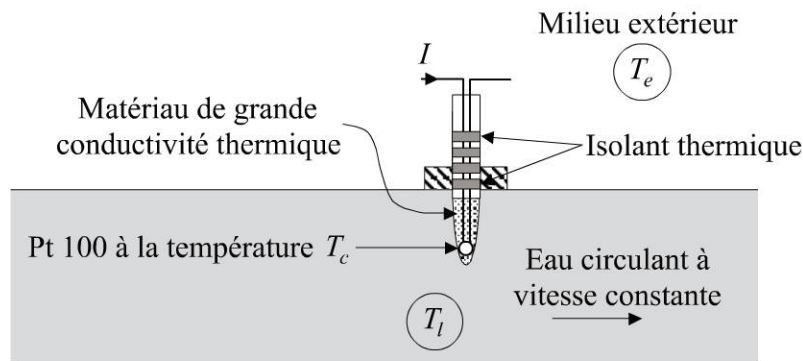


Figure 1.1 - Principe de la mesure

À la vitesse de circulation de l'eau dans le circuit, le coefficient d'échange calorifique de la résistance thermométrique avec l'eau est K_l , celui avec le milieu extérieur est K_e et sa capacité calorifique est MC . On suppose que la température extérieure est constante.

1.1 Établir la fonction de transfert du capteur donnée par :

$$H(p) = \frac{\Delta T_c(p)}{\Delta T_l(p)} = \frac{T_c(p) - T_e(p)}{T_l(p) - T_e(p)}$$

Pour ce faire on négligera la puissance P_J dissipée par effet joule dans la Pt100. Préciser les expressions du gain statique G_0 et de la constante de temps τ .

1.2 Afin de minimiser les non-linéarités, la Pt100 est montée en pont avec trois résistances fixes de valeur R égale à la résistance de la Pt100 à la température $T_{ref} = 70^\circ\text{C}$ (voir figure 1.2). Déterminer l'expression de la tension de mesure différentielle du pont sachant que la caractéristique de la Pt100 en fonction de la température T_c exprimée en $^\circ\text{C}$ est donnée en première approximation par $R(T_c) = R_0(1 + \alpha T_c)$ avec $\alpha = 3,90 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

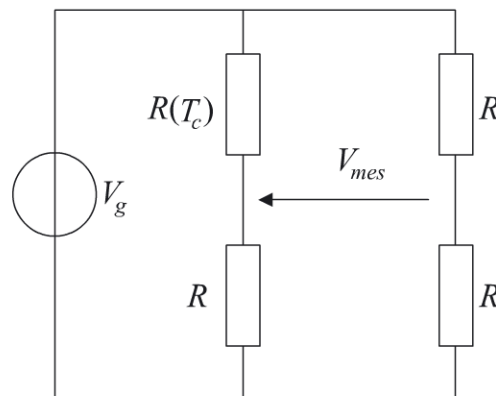


Figure 1.2 - Principe du montage

1.3 La chaudière fonctionne en régime permanent stable. La tension de mesure différentielle du pont est alors $V_{mes} = 34,2 \text{ mV}$. Pour étalonner le système de mesure, il faut estimer G_0 . On ouvre au-dessus d'un seau une vanne de purge proche de l'endroit où se trouve la Pt100. On mesure alors très rapidement la température de l'eau récupérée au moyen d'un thermomètre suffisamment précis qui donne $T_l = 65,3^\circ\text{C}$.

La température extérieure est mesurée avec le même thermomètre et on obtient $T_e = 20,0^\circ\text{C}$.

Sachant que le pont est alimenté par $V_g = 5 \text{ V}$, en déduire la valeur de G_0 .

1.4 Donner l'approximation linéaire, $V_{mes,lin} = V_0 - kT_l$, de la relation entre la tension de mesure et la température de l'eau.

1 • Mesure de la température de l'eau d'une installation de chauffage central

1.5 Afin de contrôler la température de l'eau et d'en afficher la valeur, on doit disposer d'une tension $V_s = k'T_l$ avec $k' = 0,1 \text{ V} \cdot \text{°C}^{-1}$. Le signal de mesure est utilisé comme entrée du conditionneur du signal de la figure 1.3 où l'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal et $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$.

Comme la tension V_{mes} en sortie du pont de la figure 1.2 n'est pas référencée à la masse, on utilise cette tension comme entrée différentielle d'un amplificateur d'instrumentation de gain unité afin de disposer en sortie de ce dernier d'une tension V_{mes} référencée à la masse et qui sert d'entrée au montage de la figure 1.3.

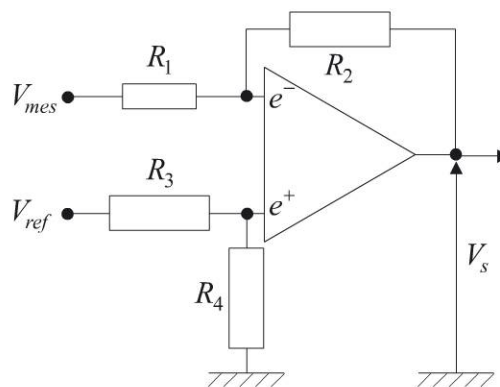


Figure 1.3 - Circuit de conditionnement du signal

Déterminer les valeurs de R_1 et V_{ref} nécessaires. On effectuera le calcul en utilisant l'approximation linéaire $V_{mes,lin} = V_0 - kT_l$ de V_{mes} .

1.6 Calculer l'erreur de linéarité, en $^{\circ}\text{C}$, présentée par V_s entre $T_l = 50^{\circ}\text{C}$ et $T_l = 90^{\circ}\text{C}$.

Corrigé détaillé

1.1 Le bilan thermique de la Pt100 s'écrit pendant un intervalle de temps de durée dt :

$$MCdT_c = K_l(T_l - T_c)dt - K_e(T_c - T_e)dt + P_Jdt \quad (1.1)$$

En tenant compte que la température extérieure est supposée constante et en négligeant la puissance P_J dissipée par effet joule, (1.1) peut encore être écrit :

$$MC \frac{d\Delta T_c}{dt} = K_l(\Delta T_l - \Delta T_c) - K_e\Delta T_c \quad (1.2)$$

On a posé $\Delta T_l = T_l - T_e$ et $\Delta T_c = T_c - T_e$.

En désignant par p la variable du domaine de Laplace, (1.2) conduit à l'expression de la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta T_c(p)}{\Delta T_l(p)} = \frac{K_l}{K_l + K_e} \frac{1}{1 + \frac{MC}{K_l + K_e} p} \quad (1.3)$$

Cette forme est représentative d'un comportement passe-bas du premier ordre où le gain statique G_0 et la constante de temps τ sont respectivement donnés par :

$$G_0 = \frac{K_l}{K_l + K_e} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{MC}{K_l + K_e}$$

1.2 À la température $T_{ref} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ on a $R = R(T_c = T_{ref}) = 127,3 \text{ } \Omega$. La tension de mesure est alors directement donnée par :

$$V_{mes} = \left(\frac{R}{R(T_c) + R} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{R - R(T_c)}{R + R(T_c)} \frac{V_g}{2} = \frac{\alpha(T_{ref} - T_c)}{1 + \frac{\alpha(T_{ref} + T_c)}{2}} \frac{V_g}{4} \quad (1.4)$$

1.3 En régime permanent, pour une valeur donnée de la tension de mesure, on obtient la température de la Pt100 en inversant (1.4), soit :

$$T_c = \frac{\alpha(V_g - 2V_{mes})T_{ref} - 4V_{mes}}{\alpha(V_g + 2V_{mes})} \quad (1.5)$$

Pour $V_{mes} = 34,2 \text{ mV}$, on obtient $T_c = 61,2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Comme on se trouve en régime permanent, on a d'après (1.3) :

$$G_0 = \frac{K_l}{K_l + K_e} = \frac{T_c - T_e}{T_l - T_e} = 0,91$$

1.4 L'approximation linéaire de V_{mes} est donnée par son développement limité à l'ordre 1 en $\alpha(T_{ref} - T_c)$, soit :

$$\begin{aligned} V_{mes,lin} &= \frac{\alpha}{1 + \alpha T_{ref}} (T_{ref} - T_c) \frac{V_g}{4} \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha T_{ref}} \left[T_{ref} - (1 - G_0)T_e \right] \frac{V_g}{4} - \frac{\alpha}{1 + \alpha T_{ref}} G_0 \frac{V_g}{4} T_l \\ &= V_0 - kT_l = 0,261 - 3,48 \cdot 10^{-3} \cdot T_l \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.5 L'amplificateur opérationnel étant idéal, on a :

$$e^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_{ref} \quad \text{et} \quad e^- = \frac{R_2 V_{mes} + R_1 V_s}{R_1 + R_2}$$

1 • Mesure de la température de l'eau d'une installation de chauffage central

La contre-réaction amène :

$$\begin{aligned}
 V_s &= \frac{R_4 R_1 + R_2}{R_1 R_3 + R_4} V_{ref} - \frac{R_2}{R_1} V_{mes} \\
 &\simeq \frac{R_4 R_1 + R_2}{R_1 R_3 + R_4} V_{ref} - \frac{R_2}{R_1} (V_0 - kT_l) \\
 &= \left(\frac{R_4 R_1 + R_2}{R_1 R_3 + R_4} V_{ref} - \frac{R_2}{R_1} V_0 \right) + \frac{R_2}{R_1} kT_l
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pour obtenir $V_s = k'T_l$ avec $k' = 0,1 \text{ V} \cdot \text{°C}^{-1}$, il faut :

$$\frac{R_4 R_1 + R_2}{R_1 R_3 + R_4} V_{ref} = \frac{R_2}{R_1} V_0 \quad \text{et} \quad k' = k \frac{R_2}{R_1} \tag{1.8}$$

Avec $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, (1.8) se résout en R_1 et V_{ref} . On obtient $R_1 = 348,2 \text{ k}\Omega$ et $V_{ref} = 505 \text{ mV}$.

1.6 Comme le montre la figure 1.4, l'écart au comportement désiré reste faible. Il peut être calculé selon $(V_s(T_l) - k'T_l)/k'$ en évaluant V_s à l'aide de (1.7) dans laquelle on utilise la véritable valeur de V_{mes} donnée par (1.4).

Entre $T_l = 50 \text{ °C}$ et $T_l = 90 \text{ °C}$, cette erreur évolue de $-0,9 \text{ °C}$ à $-0,3 \text{ °C}$ en passant par 0 °C pour la température de l'eau correspondant à la température du capteur $T_c = T_{ref} = 70 \text{ °C}$, soit $T_l = 75 \text{ °C}$.

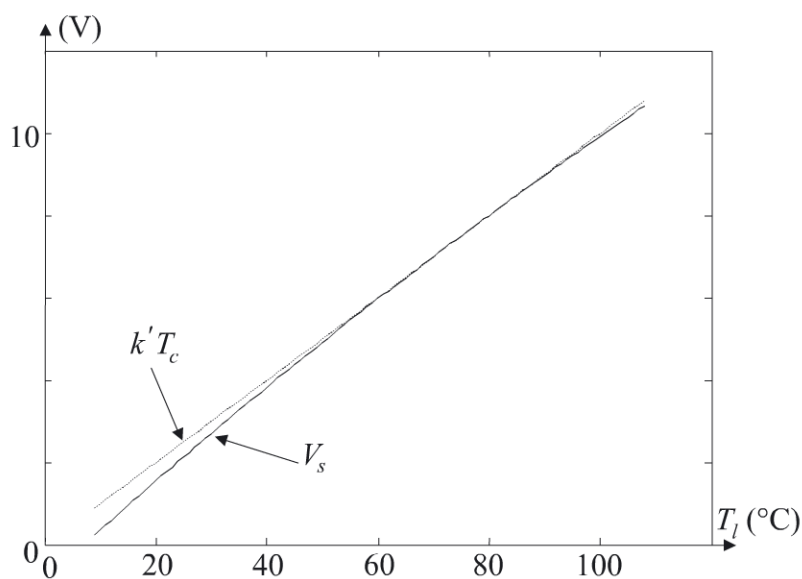


Figure 1.4 - Signal de mesure

ENCART 1.1

Les résistances thermométriques, notamment la Pt100 qui est la plus utilisée, présentent les avantages d'une grande précision et d'une grande stabilité dans le temps. Malheureusement, pour une utilisation où il y a un risque de contamination du platine, la sonde doit être gainée ce qui en augmente l'encombrement et le temps de réponse.

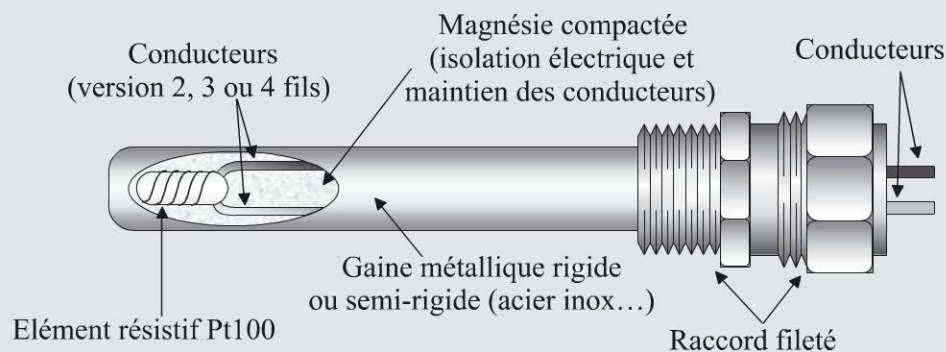


Figure 1.5 - Sonde à résistance de platine chemisée à isolation minérale

2

PROBLÈME : Jauge de Pirani

La jauge de Pirani, capteur de mesure des faibles pressions, est constituée d'un filament métallique placé dans une ampoule de verre reliée à l'enceinte dans laquelle on veut mesurer la pression. Le filament est parcouru par un courant qui provoque son échauffement par effet Joule. À l'équilibre thermique, la puissance fournie par effet Joule s'équilibre avec les puissances perdues par le filament par rayonnement, par conduction au travers des supports du filament et par conduction avec le gaz de l'enceinte. Par construction de la jauge de Pirani, on privilégie cette dernière forme d'échange thermique qui dépend de la pression du gaz dans l'enceinte. Deux techniques de mesure sont possibles.

La première consiste à alimenter la jauge à courant constant. L'état d'équilibre entre la puissance fournie par effet Joule et celle perdue par le filament sous ses différentes formes amène alors celui-ci à une température et donc à une valeur de sa résistance fonction de la pression dans l'enceinte.

La deuxième technique de mesure consiste à asservir l'alimentation de la jauge de façon à ce que la température, donc la résistance du filament, reste constante ; c'est alors l'alimentation de la jauge qui est fonction de la pression dans l'enceinte.

Ce problème ne présente que la première méthode d'utilisation de la jauge de Pirani.

Énoncé

Soit la jauge de Pirani schématisée figure 2.1.

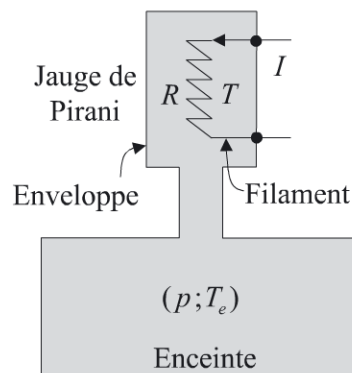


Figure 2.1 - Jauge de Pirani

On fait les hypothèses suivantes :

- la température T du filament est uniforme,
- le gaz de l'enceinte, les supports du filament et l'enveloppe externe sont à une même température T_e .

Soient P_1 la puissance échangée par conduction entre le filament et le gaz de l'enceinte à la pression p , P_2 la puissance échangée par conduction entre le filament et les bornes de connexion à son support et P_3 le bilan des puissances rayonnées par l'enveloppe et le filament. En première approximation, on a :

$$P_1 = bp(T - T_e) \quad P_2 = a(T - T_e) \quad \text{et} \quad P_3 = c\sigma(eT^4 - e_e T_e^4) \quad (2.1)$$

a , b et c représentent des constantes dépendant de la géométrie et des matériaux constituant les différents éléments, σ la constante de Stefan et e et e_e , les émissivités respectivement du filament à la température T et de l'enveloppe à la température T_e exprimée en Kelvin.

La résistance du filament dépend de sa température selon :

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

R_0 est la résistance du filament à la température $T_0 = 273,15$ K.

2.1 Écrire le bilan thermique du filament à l'équilibre. On notera R_e la résistance du filament à la température T_e et I le courant le parcourant.

2.2 Les échanges radiatifs sont minimisés en limitant l'échauffement du filament et son émissivité ; on néglige ces échanges dans la suite du problème. En déduire l'expression de $T - T_e$, puis celle de la résistance R du filament en fonction de a , b , p , $K = \alpha R_0 I^2$ et R_e .

2.3 Le filament est un fil de platine de résistivité $\rho = 1,00 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ à 0°C , de longueur $l = 10$ cm et de rayon $10 \mu\text{m}$. Calculer la valeur R_0 de la résistance du filament à la température de 0°C .

2.4 Le coefficient thermique de la résistance R constituée par le filament est $\alpha = 3,60 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$, la température du gaz de l'enceinte supposée fixe est de 25°C et le courant circulant dans le filament est $I = 100$ mA. Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} , tension mesurée aux bornes du filament.

Étudier l'évolution de $T - T_e$ et de la tension de mesure V_{mes} pour une étendue de mesure de $p = 10^2$ Pa à $p = 10^5$ Pa. On donne $a = 4 \cdot 10^{-3} \text{W} \cdot \text{K}^{-1}$ et $b = 10^{-6} \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$. Calculer la sensibilité S_{mes} de la mesure en fonction de p .

2 • Jauge de Pirani

2.5 On dispose de quatre jauges de Pirani. Deux sont identiques à la jauge précédemment étudiée et les deux autres sont totalement scellées sous un vide poussé. Les quatre jauges sont fixées sur l'enceinte et on suppose qu'elles sont toutes à l'équilibre thermique avec cette dernière.

En pratique, il suffit de réaliser deux enveloppes contenant deux filaments, l'une scellée sous vide et l'autre ouverte sur le gaz de l'enceinte.

Chaque jauge scellée sous vide constitue une résistance R_c dont on calculera la valeur en supposant qu'elle est parcourue par le même courant I que la jauge précédemment étudiée.

2.6 Les jauges sont montées en pont selon le montage de la figure 2.2. Le courant d'alimentation est le double du courant précédemment considéré $I_g = 2I = 200 \text{ mA}$.

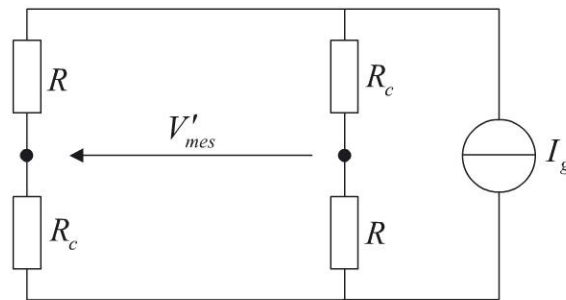


Figure 2.2 - Montage en pont des jauges de Pirani

Donner les expressions de la nouvelle tension de mesure V'_mes et de la nouvelle sensibilité S'_mes .

Corrigé détaillé

2.1 À l'équilibre thermique, la puissance totale échangée par le filament est égale à la puissance dissipée par effet Joule P_J , soit $P_1 + P_2 + P_3 = P_J$. La résistance que présente le filament est donnée par :

$$\begin{aligned} R &= R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) = R_0 (1 + \alpha(T_e - T_0)) + R_0 \alpha(T - T_e) \\ &= R_e + R_0 \alpha(T - T_e) = R_e \left(1 + \frac{R_0}{R_e} \alpha(T - T_e) \right) = R_e (1 + \alpha'(T - T_e)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le bilan thermique s'écrit donc d'après (2.1) :

$$(a + bp)(T - T_e) + c\sigma(eT^4 - e_e T_e^4) = R_e (1 + \alpha'(T - T_e)) I^2$$

2.2 En négligeant le terme radiatif, (2.2) devient :

$$(a + bp)(T - T_e) = R_e (1 + \alpha'(T - T_e)) I^2$$

On en déduit :

$$T - T_e = \frac{R_e I^2}{a + bp - \alpha' R_e I^2} = \frac{R_e I^2}{a + bp - \alpha R_0 I^2} \quad (2.3)$$

Ceci conduit à une résistance du filament donnée par :

$$R = R_e (1 + \alpha'(T - T_e)) = R_e \left(1 + \frac{\alpha R_0 I^2}{a + bp - \alpha R_0 I^2} \right) = R_e \left(1 + \frac{K}{a + bp - K} \right) \quad (2.4)$$

2.3 On a immédiatement $R_0 = \rho l / \pi r^2 = 31,83 \, \Omega$.

2.4 Compte tenu de la température de l'enceinte, on obtient :

$$R_e = R_0 (1 + \alpha(T_e - T_0)) = 34,69 \, \Omega$$

Pour un courant de $I = 100 \text{ mA}$ la constante K apparaissant dans (2.4) prend la valeur $K = \alpha R_0 I^2 = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$.

La tension de mesure est simplement donnée par $V_{mes} = RI$:

$$V_{mes} = RI = R_e I \left(1 + \frac{K}{a + bp - K} \right)$$

Les expressions (2.3) et (2.5) permettent de tracer les courbes de la figure 2.3.

La mesure est non linéaire. L'évolution de la tension de mesure $V_{mes}(p)$ en fonction de la pression se fait à partir d'une valeur $V_{mes}(0)$ donnée par :

$$V_{mes}(0) = R_e \frac{a}{a - K} I = 4,86 \text{ V}$$

La sensibilité de la mesure est donnée par (voir courbe figure 2.4) :

$$S_{mes} = \frac{dV_{mes}(p)}{dp} = -R_e I \frac{Kb}{(a - K)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{a - K} p \right)^2}$$

La jauge ainsi réalisée est destinée à la mesure de pressions inférieures à 10^4 Pa car la sensibilité tend vers 0 au fur et à mesure que la pression augmente. La sensibilité est d'autant plus importante et la mesure d'autant plus linéaire que la pression est faible. Cette jauge de Pirani constitue donc un capteur principalement dédié aux faibles pressions.

2 • Jauge de Pirani

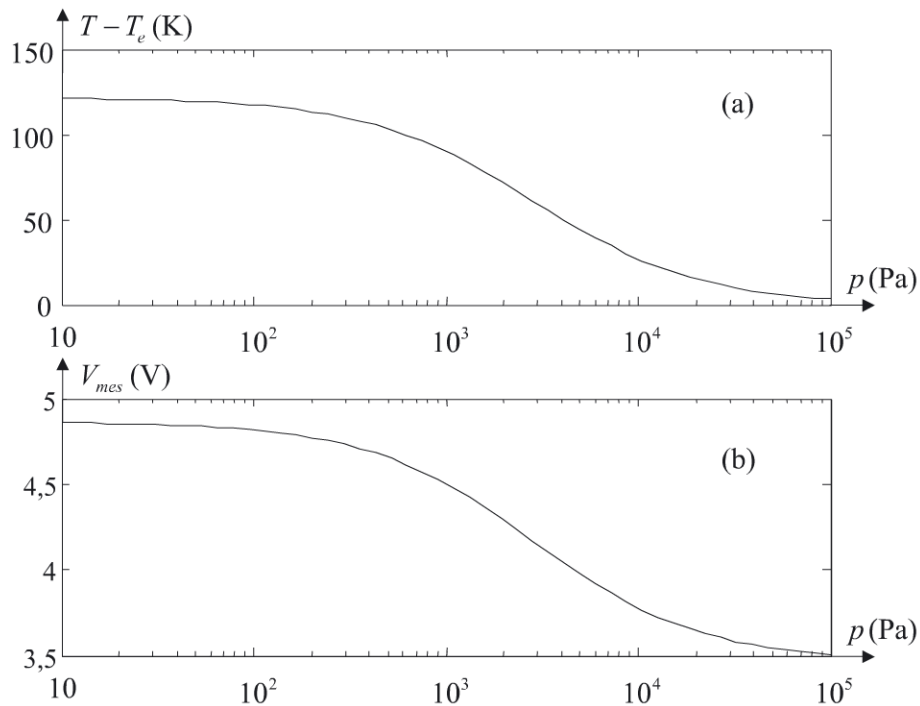


Figure 2.3 - Évolutions de la température (a) et de la tension de mesure (b) avec la pression

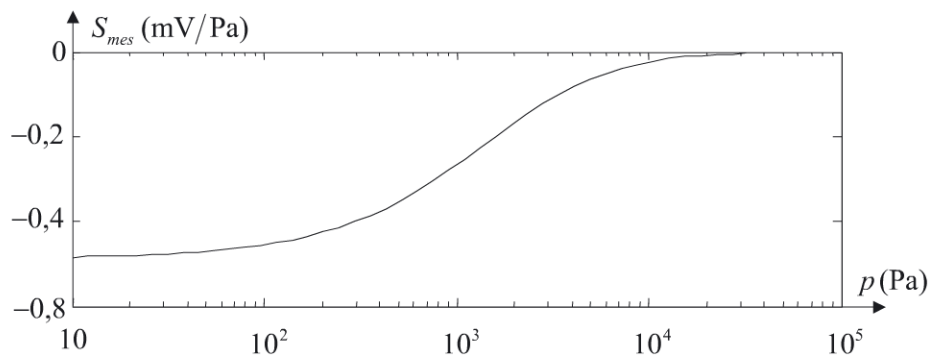


Figure 2.4 - Évolution de la sensibilité en fonction de la pression

2.5 Pour calculer R_c , il suffit de reprendre les calculs précédents en posant $p = 0$. Il vient alors :

$$R_c = R_e \left(1 + \frac{K}{a - K} \right) = \frac{a}{a - K} R_e = 48,63 \, \Omega$$

2.6 Comme les impédances des deux branches sont identiques, chacune est parcourue par le courant $I = I_g/2$ et on a immédiatement $V'_{mes} = (R_c - R)I$, soit en utilisant (2.4) et (2.6) :

$$V'_{mes} = \frac{R_e I_g}{2} \left[\left(1 + \frac{K}{a - K} \right) - \left(1 + \frac{K}{a + bp - K} \right) \right] = \frac{R_e I_g}{2} \frac{Kb}{(a - K)^2} p \frac{1}{1 + \frac{b}{a - K} p}$$

La nouvelle sensibilité est donnée par :

$$S'_{mes} = -\frac{R_e I_g}{2} \frac{Kb}{(a - K)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{a - K} p\right)^2}$$

Cette dernière reste identique à celle du montage précédent. L'avantage de ce nouveau montage est que l'on a supprimé la composante continue de la tension de mesure. En revanche et comme précédemment, la mesure de la pression dépend toujours de la température du gaz au travers de R_e .

ENCART 2.1

De fabrication peu onéreuse la jauge de Pirani permet de couvrir une étendue de mesure importante mais présente cependant de gros inconvénients. D'une part, le signal de sortie dépend de manière linéaire de la température du gaz dont on mesure la pression, température qui doit donc être mesurée par ailleurs ou maintenue constante. D'autre part, le gaz ou d'éventuels polluants de ce dernier (huile de pompe, etc.) peuvent modifier le couplage thermique entre le filament et le reste de la jauge (gaz, parois, supports, etc.) en se déposant sur le filament. De même, l'échange thermique entre le filament et le gaz dépend assez fortement de la nature de celui-ci et par nature la présence du filament chaud interdit la mesure de la pression de gaz pouvant se décomposer voire avoir un comportement explosif.

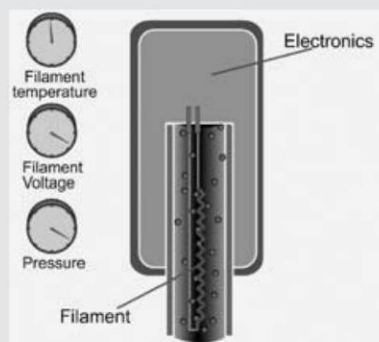


Figure 2.5 - Principe d'une jauge de Pirani (documentation BOC Edwards)



Figure 2.6 - Jauge de Pirani (documentation BOC Edwards)

3

PROBLÈME : Utilisation de capteurs de température pour la mesure de la vitesse d'un fluide

On se propose ici de mesurer la vitesse d'écoulement d'un liquide au moyen d'un capteur de température. Le capteur utilisé est un simple fil résistif alimenté à courant constant et dont le matériau est un alliage à base d'or spécifiquement élaboré. L'effet Joule provoque un échauffement du fil et donc une élévation de sa résistance et de la tension à ses bornes. D'autre part, l'écoulement du fluide autour du fil est source d'échanges thermiques d'autant plus importants que la vitesse du fluide est élevée.

À l'équilibre, le fil présente une résistance donc une tension à ses bornes fonction de sa température T_c , elle-même fonction de la vitesse du fluide.

Énoncé

3.1 Soit α le coefficient thermique de la résistance constituée par le fil chaud dont la valeur à $0\text{ }^\circ\text{C}$ est R_0 . Le courant continu circulant dans le fil chaud étant noté I , donner l'expression de la puissance P dissipée par effet Joule dans le fil.

On rappelle qu'à la température de $0\text{ }^\circ\text{C}$ correspond la température absolue $T_0 = 273,15\text{ K}$. Les températures sont exprimées dans l'échelle absolue.

3.2 Le capteur, alimenté par le courant constant I , est plongé dans un liquide à la température T_f . On note M la masse du capteur (en kg), C sa chaleur massique (en J/K.kg) et G la conductance thermique entre le capteur et le fluide (en J/K.s).

Écrire l'équation différentielle décrivant l'évolution dans le temps de la température T_c du capteur en fonction de M , C , G , du courant d'alimentation I et de la température du fluide T_f .

On supposera que les échanges thermiques par rayonnement peuvent être négligés.

3.3 En déduire en régime permanent l'expression de la température T_c du capteur.

3.4 Quel doit être le coefficient thermique de la résistance constituée par le fil pour que la température du capteur soit rigoureusement proportionnelle à la température du fluide ? Quelle est dans ce cas l'expression de la température du capteur ?

3.5 La conductance thermique entre le fluide et le capteur est une fonction de la vitesse v du fluide qui en première approximation peut s'écrire $G(v) = G_0(1 + a\sqrt{v})$. Exprimer la température du capteur en fonction de la vitesse du fluide.

3.6 Les résultats précédents montrent que la température du capteur dépend de la vitesse du fluide que l'on cherche à déterminer mais aussi, ce qui est un problème, de sa température. Il faut donc essayer de supprimer l'influence de la température du fluide qui agit comme une grandeur d'influence. Pour cela on utilise deux capteurs. Le capteur (1) est placé dans le fluide en mouvement et le capteur (2) identique au premier dans le fluide au repos selon le principe de la figure 3.1. On suppose que l'élévation de la température du fluide au repos provoquée par la présence du capteur (2) reste négligeable.

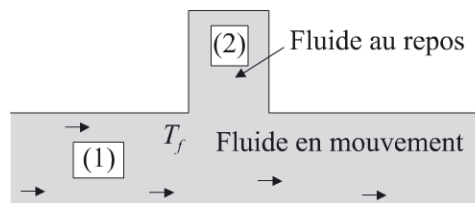


Figure 3.1 - Principe de la mesure

Les deux capteurs sont montés dans le circuit électronique de la figure 3.2.

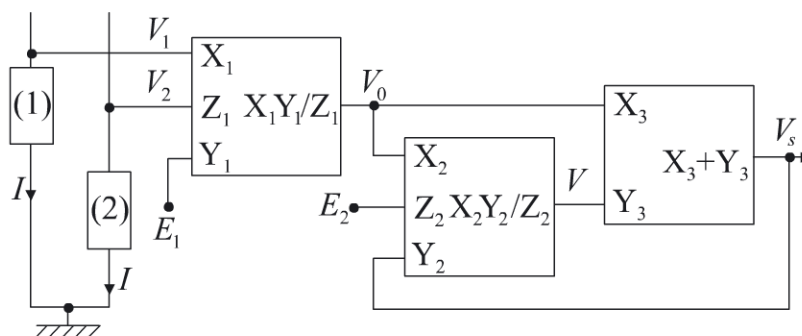


Figure 3.2 - Montage électronique

Donner l'expression de V_0 en fonction de G_0 , a , v et $K = R_0\alpha I^2$.

Conclure quant à la dépendance de V_0 avec T_f puis avec v .

3.7 Donner l'expression de V_s en fonction de V_0 et E_2 , puis en fonction de G_0 , a , v , K , E_1 et E_2 .

3 • Utilisation de capteurs de température pour la mesure de la vitesse d'un fluide

3.8 Quelle valeur faut-il donner à E_2 pour que V_s dépende linéairement de \sqrt{v} et se mette sous la forme $V_s = A(1 + a\sqrt{v})$? On donne $G_0 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ J/s.K, $a = 0,7 \text{ s}^{1/2} \cdot \text{m}^{-1/2}$, $E_1 = 1 \text{ V}$, $R_0 = 10 \Omega$ et $I = 100 \text{ mA}$.

Corrigé détaillé

3.1 On a immédiatement $P = R(T_c)I^2 = R_0(1 + \alpha(T_c - T_0))I^2$.

3.2 Puisque l'on néglige les échanges radiatifs, le bilan thermique du fil traduisant la variation dT_c de sa température pendant la durée $d\tau$ s'écrit :

$$MCdT_c = Pd\tau - G(T_c - T_f)d\tau = R_0(1 + \alpha(T_c - T_0))I^2d\tau - G(T_c - T_f)d\tau \quad (3.1)$$

3.3 En régime permanent, soit en posant que (3.1) est nul, le capteur est porté à la température T_c donnée par :

$$T_c = \frac{GT_f + R_0(1 - \alpha T_0)I^2}{G - R_0\alpha I^2} \quad (3.2)$$

3.4 Pour que T_c soit proportionnel à T_f , il suffit que $\alpha = 1/T_0 = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. L'or, avec un coefficient thermique de l'ordre de $3,60 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ est un bon candidat comme base de l'alliage à utiliser pour réaliser le fil. (3.2) devient alors :

$$T_c = \frac{G}{G - R_0\alpha I^2} T_f \quad (3.3)$$

3.5 Utilisant l'expression donnée de G , il vient immédiatement :

$$T_c = \frac{G_0(1 + a\sqrt{v})}{G_0(1 + a\sqrt{v}) - R_0\alpha I^2} T_f \quad (3.4)$$

La relation entre la température du capteur et la vitesse du fluide n'est pas linéaire et cette relation fait intervenir la température du fluide.

3.6 Les tensions V_1 et V_2 sont les tensions aux bornes de chaque capteur, soit ici :

$$V_1 = R_0(1 + \alpha(T_{c1} - T_0))I = R_0\alpha T_{c1}I \quad \text{et} \quad V_2 = R_0\alpha T_{c2}I \quad (3.5)$$

Le rapport des tensions est égal au rapport des températures données par (3.4). En posant $K = R_0\alpha I^2$, d'après le circuit de la figure 3.2, il vient :

$$V_0 = \frac{V_1 E_1}{V_2} = E_1 \frac{\frac{G_0(1 + a\sqrt{v})}{G_0(1 + a\sqrt{v}) - R_0\alpha I^2} T_f}{\frac{G_0}{G_0 - R_0\alpha I^2} T_f} = E_1 \frac{(G_0 - K)(1 + a\sqrt{v})}{G_0(1 + a\sqrt{v}) - K} \quad (3.6)$$

V_0 est indépendant de T_f mais présente toujours un comportement non linéaire par rapport à v .

3.7 On a simultanément $V_s = V + V_0$ et $V = V_s V_0 / E_2$. Avec (3.6), il vient :

$$V_s = \frac{V_0}{1 - \frac{V_0}{E_2}} = \frac{E_1(G_0 - K)(1 + a\sqrt{v})}{G_0(1 + a\sqrt{v}) - K - \frac{E_1(G_0 - K)(1 + a\sqrt{v})}{E_2}} \quad (3.7)$$

3.8 Pour que (3.7) dépende linéairement de \sqrt{v} , il suffit de fixer :

$$E_2 = \frac{E_1(G_0 - K)}{G_0}$$

V_s s'écrit alors :

$$V_s = -\frac{E_1}{K}(G_0 - K)(1 + a\sqrt{v}) = A(1 + a\sqrt{v})$$

Numériquement, on obtient $A = -5,8 \text{ V}$.

ENCART 3.1

On pourrait aller plus loin dans le conditionnement du signal. En effet le signal V_s est constitué d'un terme constant $V_{s0} = -E_1(G_0 - K)/K$ et d'un terme proportionnel à \sqrt{v} . Le terme constant peut très bien être évalué lors d'un étalonnage et soustrait de V_s qui serait alors directement proportionnel à \sqrt{v} . Un circuit de multiplication analogique dont les deux entrées seraient le signal $V_s - V_{s0}$ donnerait en sortie un signal proportionnel à la vitesse v du fluide.

Cette technique de mesure peut s'avérer délicate à mettre en œuvre et est susceptible d'être perturbée par de multiples sources d'incertitude comme l'échauffement du fluide au repos autour du capteur n° 2. Une autre technique peut être utilisée donnant directement accès au débit massique. Un élément chauffant est placé dans le fluide et symétriquement, de part et d'autre de ce dernier, on place deux capteurs de température donnant les températures T_1 et T_2 . À débit nul, on a $T_1 = T_2$ et lorsque le fluide circule dans la conduite, $T_1 < T_2$. La différence de température $T_2 - T_1$ est une fonction du débit massique dans la conduite.

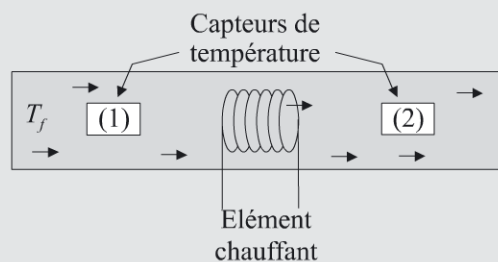


Figure 3.3 - Principe d'un débitmètre massique thermique

4

PROBLÈME : Jauges d'extensométrie – Électronique de séparation contrainte – Température

Les jauges d'extensométrie sont les capteurs résistifs les plus employés lorsqu'il s'agit de déterminer les faibles déformations d'une structure soumise à des contraintes mécaniques. La mesure des déformations peut avoir deux objectifs.

Dans le premier cas, le but de la mesure des déformations est de déterminer le champ de contraintes subies par une structure dans un but de dimensionnement, de test mécanique ou encore de surveillance de cette structure.

Dans l'autre cas, la déformation mesurée est le résultat de l'application d'un mesurande primaire sur un corps d'épreuve comme une force, une pression, une masse... Dans ce cas, la jauge est l'élément sensible d'un capteur dédié à la mesure de la force, de la pression, de la masse...

Une des difficultés de l'utilisation des jauges d'extensométrie réside dans leur sensibilité à la température. En effet, cette grandeur d'influence peut engendrer sur une jauge, des variations de résistance de la jauge du même ordre de grandeur que celles engendrées par les déformations à mesurer. Aussi, la correction des effets de la température est un des points clés de la qualité des mesures par jauges d'extensométrie.

Énoncé

Soit le montage de la figure 4.1 que l'on réalise à partir d'amplificateurs opérationnels supposés idéaux :

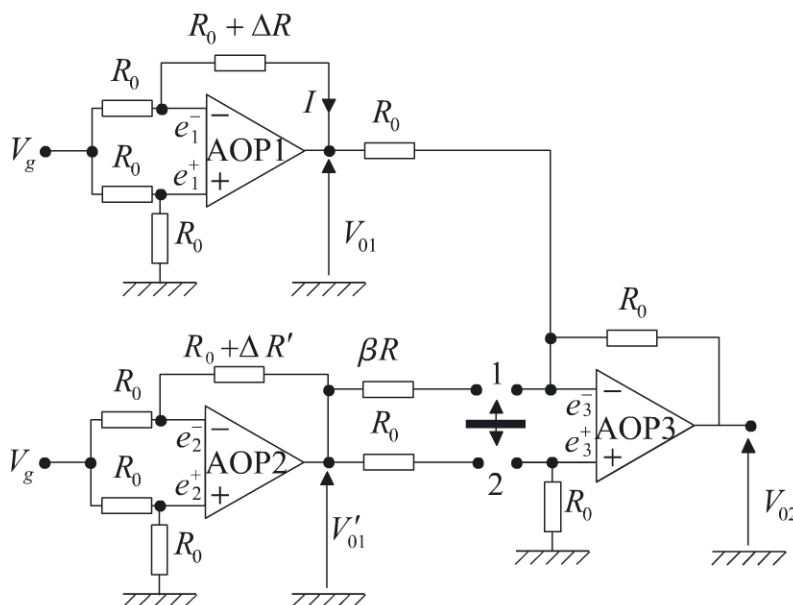


Figure 4.1- Circuit de conditionnement

- 4.1** Donner l'expression de V_{01} en fonction de V_g , ΔR et R_0 .
- 4.2** Donner l'expression de V'_{01} en fonction de V_g , $\Delta R'$ et R_0 .
- 4.3** Donner l'expression de V'_{02} , valeur de V_{02} pour l'interrupteur en position 1 en fonction de V_{01} , V'_{01} et β .
- 4.4** Donner l'expression de V''_{02} , valeur de V_{02} pour l'interrupteur en position 2 en fonction de V_{01} et V'_{01} .

$R_0 + \Delta R$ et $R_0 + \Delta R'$ correspondent aux résistances que présentent deux jauges de contrainte J et J' , de facteur de jauge K_0 et de résistance au repos R_0 à la température de référence T_0 , collées sur un corps d'épreuve constitué d'un cylindre d'aluminium de rayon r et de hauteur h , de coefficient de Poisson ν_s et de module d'Young E_s (voir figure 4.2). Le corps d'épreuve est soumis à une contrainte σ de direction parallèle à l'axe du cylindre et inférieure à la limite élastique.

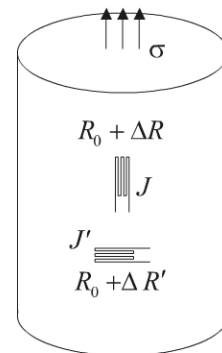


Figure 4.2 - Corps d'épreuve

- 4.5** Établir les expressions des variations relatives des dimensions du cylindre, $\Delta h/h$ et $\Delta r/r$, consécutives à l'application de la contrainte.
- 4.6** La température de l'ensemble étant la température de référence T_0 , en déduire les variations relatives, $\Delta l/l$ et $\Delta l'/l'$, des longueurs des deux jauges J et J' , puis les variations relatives $\Delta R/R_0$ et $\Delta R'/R_0$ de leurs résistances. Les jauges sont supposées identiques, parfaitement collées sur le corps d'épreuve et on néglige tout effet d'épaisseur des jauges.
- 4.7** En reprenant les résultats des questions précédentes, déterminer les nouvelles expressions de V'_{02} et V''_{02} . Donner la valeur de β qui permet d'annuler V'_{02} .
- 4.8** Les jauges sont réalisées en fil de constantan. À la température de 25°C , on a $K_0 = 2,1$ et $R_0 = 120 \Omega$.

On calculera, à 25°C , les deux variations des résistances pour une contrainte appliquée $\sigma = 10^{-4}E_s$. Le coefficient de Poisson $\nu_s = 0,345$ de l'aluminium est supposé indépendant de la température.

Toujours à 25°C , calculer V''_{02} . On donne $V_g = 5 \text{ V}$.

4 • Jauges d'extensométrie – Électronique de séparation contrainte – Température

On s'intéresse maintenant aux effets de la température sur les jauges de contrainte et donc sur les tensions de mesure. On note λ_j le coefficient de dilatation linéique des jauges, α_ρ le coefficient thermique de la résistivité et λ_s le coefficient de dilatation linéique du matériau du cylindre.

4.9 On considère tout d'abord que les jauges sont isolées, c'est-à-dire non collées sur le cylindre.

Calculer la variation relative de la résistance des jauges provoquée par une augmentation ΔT de la température par rapport à la température T_0 de référence. On donne $\rho = \rho_0(1 + \alpha_\rho T)$ avec $\rho_0 = 49 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ la résistivité à $0^\circ C$, $\alpha_\rho = 3,7 \cdot 10^{-5} ^\circ C^{-1}$ et $\lambda_j = 1,7 \cdot 10^{-5} ^\circ C^{-1}$.

4.10 On considère maintenant que les jauges sont collées sur le cylindre. Calculer la variation relative supplémentaire de la longueur des jauges (dite variation différentielle) puis la variation relative de résistance correspondante provoquée par l'augmentation ΔT de la température. On donne le coefficient de dilatation linéique de l'aluminium $\lambda_s = 2,3 \cdot 10^{-5} ^\circ C^{-1}$.

4.11 En utilisant les résultats des deux questions précédentes montrer que l'augmentation ΔT de la température provoque une augmentation de la résistance des jauges que l'on peut écrire sous la forme $\Delta R = R_0 \beta_{j/s} \Delta T$. On précisera l'expression de $\beta_{j/s}$.

À la variation de la résistance de la jauge liée à une variation de température, on peut associer une élongation apparente de la jauge (élongation qui provoque une même variation de la résistance de la jauge que la variation de température). Déterminer l'élongation apparente $\Delta l/l_{app}$ des jauges.

On considère maintenant que la résistance des jauges varie en raison de la présence de la contrainte σ et d'une variation ΔT de la température (avec toujours $R(\sigma = 0, T_0) = R_0$).

4.12 Donner les nouvelles expressions de $\Delta R/R_0$ et $\Delta R'/R_0$.

4.13 En déduire les nouvelles expressions de V'_{02} et V''_{02} . Calculer V''_{02} , on donne $V_g = 5 V$.

4.14 Expliquer comment, par action sur l'interrupteur, on peut mesurer séparément l'action de la contrainte et l'action de l'élévation de température.

4.1 L'amplificateur opérationnel AOP1 étant idéal, les tensions sur les entrées de l'amplificateur sont :

$$e_1^+ = V_g/2 \quad \text{et} \quad e_1^- = V_{01} + (R_0 + \Delta R)I = V_g - R_0I$$

La présence de la contre-réaction entraîne $e_1^+ = e_1^-$ ce qui conduit à :

$$I = V_g/2R_0 \quad \text{et} \quad V_{01} = -V_g\Delta R/2R_0 \quad (4.1)$$

4.2 Le montage de l'amplificateur AOP2 étant similaire, V'_{01} se calcule de la même façon et on obtient :

$$V'_{01} = -V_g\Delta R'/2R_0 \quad (4.2)$$

4.3 La présence de la contre-réaction entraîne $e_3^+ = e_3^-$. Comme en position 1 de l'interrupteur, $e_3^+ = 0$, il vient :

$$V'_{02} = -R_0 \left(\frac{V_{01}}{R_0} + \frac{V'_{01}}{\beta R_0} \right) = - \left(V_{01} + \frac{V'_{01}}{\beta} \right) \quad (4.3)$$

4.4 Pour l'interrupteur en position 2, on a $e_3^+ = e_3^- = V'_{01}/2$, d'où :

$$V''_{02} = \frac{V'_{01}}{2} - R_0 \left(V_{01} - \frac{V'_{01}}{2} \right) \frac{1}{R_0} = V'_{01} - V_{01} \quad (4.4)$$

4.5 D'après la loi de Hooke, on a :

$$\frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_{//} = \frac{\sigma}{E_s} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta r}{r} = \varepsilon_{\perp} = -\nu_s \varepsilon_{//} = -\nu_s \frac{\sigma}{E_s} \quad (4.5)$$

4.6 Le collage des jauges étant parfait, celles-ci subissent la même déformation que le corps d'épreuve à leur interface avec celui-ci. Comme de plus, on néglige tout effet d'épaisseur des jauges et du collage, la jauge J subit au total la même déformation dans sa longueur que celle de la hauteur du cylindre, on a donc :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_{//}$$

4 • Jauges d'extensométrie – Électronique de séparation contrainte – Température

La jauge J' subit la même déformation dans sa longueur que celle le périmètre P du cylindre, soit :

$$\frac{\Delta l'}{l'} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta r}{r} = \varepsilon_{\perp} = -\nu_s \varepsilon_{//}$$

Le facteur de jauge K_0 étant identique pour les deux jauges, il vient :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = K_0 \frac{\Delta l}{l} = K_0 \varepsilon_{//} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta R'}{R_0} = K_0 \frac{\Delta l'}{l'} = -K_0 \nu_s \varepsilon_{//} \quad (4.6)$$

4.7 Avec (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4), il vient :

$$V'_{02} = -\left(V_{01} + \frac{V'_{01}}{\beta}\right) = \frac{V_g}{2} \left(\frac{\Delta R}{R_0} + \frac{\Delta R'}{\beta R_0}\right) = K_0 \varepsilon_{//} \left(1 - \frac{\nu_s}{\beta}\right) \frac{V_g}{2}$$

$$V''_{02} = V'_{01} - V_{01} = -\frac{V_g}{2} \left(\frac{\Delta R'}{R_0} - \frac{\Delta R}{R_0}\right) = K_0 \varepsilon_{//} (1 + \nu_s) \frac{V_g}{2}$$

Pour annuler V'_{02} , il convient de régler la valeur de β à $\beta = \nu_s$.

4.8 À 25 °C et pour $\sigma = 10^{-4} E_s$, (4.5) et (4.6) conduisent à $\Delta R/R_0 = 210 \cdot 10^{-6}$ et $\Delta R'/R_0 = -72 \cdot 10^{-6}$ soit $\Delta R = 25,2 \text{ m}\Omega$ et $\Delta R' = -8,7 \text{ m}\Omega$. Dans les mêmes conditions, on a $V''_{02} = 706 \text{ }\mu\text{V}$.

4.9 La résistance d'une jauge est donnée par la loi d'Ohm $R = \rho l/s$ avec s la section du fil des jauges et l leur longueur, ρ étant la résistivité du matériau des jauges. Une variation ΔT de la température d'une jauge initialement à la température T_0 , va entraîner, au premier ordre, une variation ΔR de sa résistance R_0 donnée par :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta s}{s}$$

Au premier ordre en ΔT , on peut écrire $\Delta \rho/\rho = \alpha_{\rho} \Delta T$, $\Delta l/l = \lambda_j \Delta T$ et $\Delta s/s = 2\lambda_j \Delta T$ où α_{ρ} et λ_j représentent respectivement le coefficient thermique de la résistivité et le coefficient de dilatation linéique du matériau de la jauge. On a donc pour une élévation ΔT de la température :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = (\alpha_{\rho} - \lambda_j) \Delta T = \alpha_R \Delta T$$

L'application numérique donne $(\alpha_{\rho} - \lambda_j) = \alpha_R = 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ soit une variation de résistance de $2,4 \text{ m}\Omega/^{\circ}\text{C}$.

4.10 Les jauges sont collées sur le cylindre. Elles sont amenées, par le collage, à subir la même déformation dans le sens de leur longueur que le corps d'épreuve sur lequel elles sont collées et c'est donc le corps d'épreuve qui impose sa déformation.

Par rapport à ce qui a déjà été pris en compte précédemment, il faut ajouter un accroissement de longueur lié à la différence de coefficient de dilatation entre le matériau de la jauge et le matériau du corps d'épreuve, soit $\Delta l/l|_{diff} = (\lambda_s - \lambda_j)\Delta T$. À cet accroissement de longueur supplémentaire correspond une variation supplémentaire, dite différentielle, de la résistance de la jauge et donnée par $\Delta R/R_0|_{diff} = K_0(\lambda_s - \lambda_j)\Delta T$. Comme $K_0(\lambda_s - \lambda_j) = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, on obtient une variation de résistance de $1,5 \text{ m}\Omega/^\circ\text{C}$.

4.11 On en déduit que l'accroissement de température ΔT provoque un accroissement de résistance donné par $\Delta R = R_0 [(\alpha_\rho - \lambda_j) + K_0(\lambda_s - \lambda_j)] \Delta T = R_0 \beta_{j/s} \Delta T$.

Compte tenu des données numériques, il vient $\beta_{j/s} = 3,26 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ soit une variation de résistance de $3,9 \text{ m}\Omega/^\circ\text{C}$.

On remarquera que ces effets thermiques entraînent des variations de résistance des jauges qui peuvent être du même ordre de grandeur que celles entraînées par la contrainte et calculées à la question 8.

À la variation de la résistance de la jauge liée à une variation de température, on peut associer une élongation apparente de la jauge donnée par :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \beta_{j/s} \Delta T = K_0 \left. \frac{\Delta l}{l} \right|_{app} \quad \text{soit} \quad \left. \frac{\Delta l}{l} \right|_{app} = \frac{\beta_{j/s} \Delta T}{K_0} = 15,5 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta T$$

4.12 En présence de la contrainte σ et d'une variation ΔT de la température, on a :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = K_0 \varepsilon_{//} + \beta_{j/s} \Delta T \quad \text{et} \quad \frac{\Delta R'}{R_0} = -K_0 \nu_s \varepsilon_{//} + \beta_{j/s} \Delta T$$

4.13 Compte tenu du choix $\beta = \nu_s$, les nouvelles expressions de V'_{02} et V''_{02} sont :

$$\begin{aligned} V'_{02} &= \frac{V_g}{2} \left(\frac{\Delta R}{R_0} + \frac{\Delta R'}{\beta R_0} \right) = \frac{V_g}{2} \left(K_0 \varepsilon_{//} + \beta_{j/s} \Delta T + \frac{-K_0 \nu_s \varepsilon_{//} + \beta_{j/s} \Delta T}{\nu_s} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\nu_s} \right) \beta_{j/s} \Delta T \frac{V_g}{2} \\ V''_{02} &= -\frac{V_g}{2} \left(-K_0 \nu_s \varepsilon_{//} + \beta_{j/s} \Delta T - K_0 \varepsilon_{//} - \beta_{j/s} \Delta T \right) = K_0 \varepsilon_{//} (1 + \nu_s) \frac{V_g}{2} \end{aligned}$$

Pour $\sigma = 10^{-4} E_s$, il vient $V'_{02} (\mu\text{V}) = 318 \cdot \Delta T$ et $V''_{02} (\mu\text{V}) = 706$. On remarquera que V''_{02} garde exactement la même expression que celle déterminée à la question 7 en l'absence d'évolution de la température.

4.14 Par action sur l'interrupteur, soit on sélectionne V''_{02} , et on a accès à la contrainte via $\varepsilon_{//}$ sans être affecté par les variations de température, soit on sélectionne V'_{02} et on a accès à une mesure de l'effet de la température.

ENCART 4.1

Les jauges d'extensométrie sont étudiées de façon à minimiser au maximum et pour un matériau de structure donné l'effet de la température. À la variation de la résistance de la jauge liée à une variation de température on peut associer une élongation apparente de la jauge. Si tous les phénomènes étaient linéaires, on pourrait a priori espérer réaliser une jauge telle que les deux termes constituant $\beta_{j/s}$ se compensent ; on obtiendrait alors une jauge parfaitement auto-compensée. Les courbes de la figure 4.3 donnent la déformation apparente de deux jauges différentes collées sur une structure en acier.

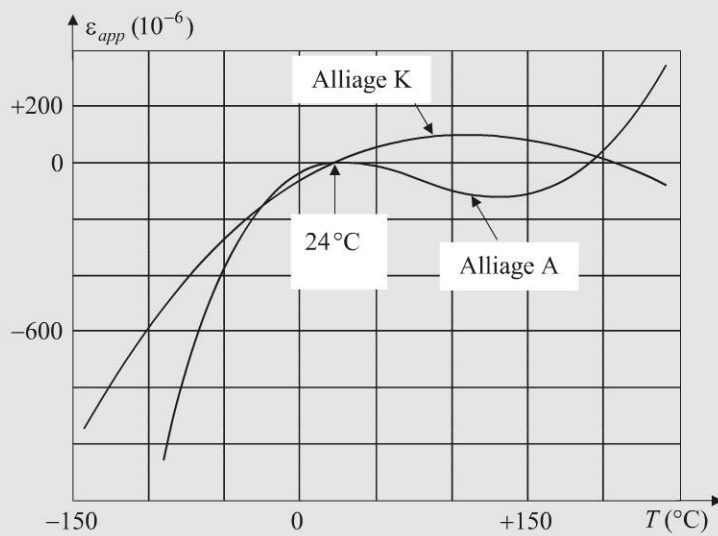


Figure 4.3 - Déformation apparente de deux types de jauges collées sur une structure en acier (documentation Vishay)

PROBLÈME : Capteur résistif non linéaire[@]

Ce problème traite de la réduction de la non-linéarité de la mesure réalisée avec un capteur résistif non linéaire. Différents montages sont envisagés et comparés : montage potentiométrique alimenté en tension ou en courant, quart de pont, demi-pont push-pull et linéarisation par quart de pont actif.

Énoncé

I. Capteur résistif

Soit un capteur dont l'impédance purement résistive R_c évolue en fonction du mesurande m sur l'étendue de mesure $m \in [0,2]$ selon le tableau 5.1.

Tableau 5.1 - Résistance du capteur

m	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
R_c	100,00	101,00	102,01	103,03	104,05	105,08	106,11
$R_{c,lin}$	99,81	100,87	101,93	102,99	104,05	105,11	106,17
m	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3
R_c	107,15	108,19	109,24	110,30	111,36	112,43	113,51
$R_{c,lin}$	107,23	108,29	109,35	110,41	111,47	112,53	113,59
m	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
R_c	114,59	115,68	116,77	117,87	118,97	120,08	121,20
$R_{c,lin}$	114,65	115,71	116,77	117,83	118,89	119,95	121,01

Une étude par régression polynomiale sur les valeurs montre que le comportement de ce capteur est très bien décrit par la loi suivante :

$$R_c(m) = am^2 + bm + c \quad \text{avec} \quad a = 0,3 \quad b = 10 \quad \text{et} \quad c = 100$$

Sur l'étendue de mesure on pratique, par la méthode des moindres carrés, une régression linéaire de la caractéristique du capteur. On obtient une approximation linéarisée de la loi de variation du capteur donnée par :

$$R_{c,lin}(m) = b'm + c' \quad \text{avec} \quad b' = 10,6 \quad \text{et} \quad c' = 99,81$$

Ceci entraîne une modélisation linéaire de la résistance du capteur, $R_{c,lin}$, indiquée dans le tableau précédent.

[@] Les données de ce problème sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage).

5 • Capteur résistif non linéaire

- 5.1** Calculer l'écart à la linéarité δR_c sur l'étendue de mesure donnée.
- 5.2** Calculer l'erreur de linéarité ε .
- 5.3** Donner sous l'approximation linéaire, la sensibilité S_c du capteur.
- 5.4** Autour de quelle valeur m_0 du mesurande vaut-il mieux évaluer les évolutions de celui-ci, valeur pour laquelle on posera $R_c(m_0) = R_{c0}$?
- 5.5** En posant que pour m évoluant de Δm depuis de m_0 , R_c évolue de ΔR_c depuis R_{c0} , mettre ΔR_c sous la forme $\Delta R_c = A (\Delta m)^2 + B \Delta m$.

II. Montage potentiométrique – Alimentation en tension

Ce capteur est monté dans un conditionneur potentiométrique alimenté par un générateur de tension constante, de f.e.m. V_g et d'impédance interne négligeable ($R_g = 0$) (voir figure 5.1).

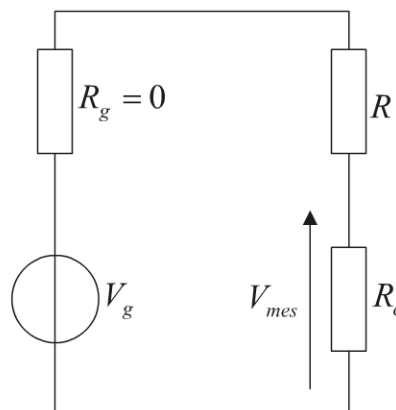


Figure 5.1 - Montage potentiométrique

On limite l'utilisation du capteur à l'étendue de mesure donnée et on utilise pour l'expression de la résistance du capteur l'expression quadratique précédente de R_c supposée exacte.

- 5.6** Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de V_g , R_c et R puis en en fonction de V_g , ΔR_c , R_{c0} et R .
- 5.7** En posant que pour la valeur de référence m_0 , la tension de mesure s'écrit V_{mes0} , calculer l'évolution ΔV_{mes} de la tension de mesure pour une évolution Δm du mesurande entraînant une variation ΔR_c de la résistance du capteur.
- 5.8** Quelle valeur optimale faut-il alors donner à R ? Que devient alors l'expression de ΔV_{mes} ?

5.9 En déduire l'approximation linéaire $\Delta V_{mes,lin}$ de ce résultat en fonction de Δm ?

5.10 Calculer dans cette approximation la sensibilité réduite S_r de la mesure.

5.11 Le but de la mesure est d'extraire l'évolution du mesurande de l'évolution de la tension de mesure. Ceci se fait très simplement de manière électronique si ΔV_{mes} est proportionnel à Δm .

Déterminer l'erreur de linéarité, $\varepsilon_1 = (\Delta V_{mes} - \Delta V_{mes,lin})/\Delta V_{mes}$, lorsqu'on approche ΔV_{mes} par $\Delta V_{mes,lin}$. On calculera son approximation à l'ordre 2 en Δm et on en cherchera la valeur maximale sur l'étendue de mesure.

III. Montage potentiométrique - Alimentation en courant

On remplace dans le conditionneur précédent la source de tension par une source de courant I_g parfaite. On garde évidemment la même valeur de référence m_0 du mesurande que précédemment, valeur pour laquelle on a $R_c(m_0) = R_{c0}$.

5.12 Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de I_g , R_c puis déterminer l'expression de l'évolution ΔV_{mes} de la tension de mesure pour une évolution Δm du mesurande entraînant une variation ΔR_c de la résistance du capteur.

5.13 En déduire l'approximation linéaire $\Delta V_{mes,lin}$ de ΔV_{mes} .

5.14 Comparer ce résultat au cas de l'alimentation en tension.

5.15 Déterminer l'erreur de linéarité ε_2 si on approche ΔV_{mes} par $\Delta V_{mes,lin}$ et l'évaluer à l'ordre 2 en Δm .

IV. Montage en quart de pont

Le capteur est monté dans un pont alimenté par un générateur de tension constante de f.e.m. V_g et d'impédance interne négligeable ($R_g = 0$) comme sur la figure 5.2. La valeur de référence du mesurande reste identique.

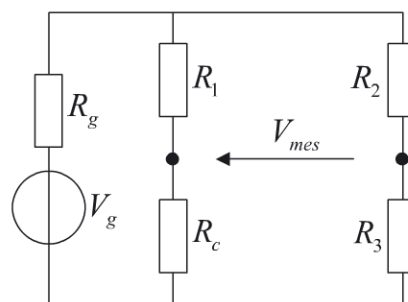


Figure 5.2 - Montage en quart de pont

5 • Capteur résistif non linéaire

5.16 Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de R_c , R_1 , R_2 , R_3 et V_g .

5.17 Donner les valeurs de R_1 , R_2 et R_3 permettant l'équilibre du pont pour la valeur m_0 du mesurande.

5.18 En déduire, pour une variation Δm du mesurande à partir de la valeur m_0 , l'expression rigoureuse de la variation ΔV_{mes} en fonction de ΔR_c , R_{c0} et V_g puis en fonction de A , B , Δm , R_{c0} et V_g .

5.19 Donner l'approximation linéaire $\Delta V_{mes,lin}$ de ΔV_{mes} en fonction de R_{c0} , B , V_g et Δm .

5.20 Toujours dans l'approximation linéaire, en déduire l'expression de la sensibilité réduite S_r de la mesure.

5.21 En fonction de R_{c0} , A , B et Δm , calculer l'erreur de linéarité ε_3 , l'évaluer au second ordre en Δm et en donner la valeur maximale.

V. Montage en demi-pont push-pull

On considère un deuxième capteur identique à R_c que l'on substitue à R_1 . R_c et R_1 fonctionnent en mode push-pull.

5.22 Exprimer ΔV_{mes} en fonction de ΔR_c , ΔR_1 , R_{c0} et V_g en supposant que l'équilibre du pont est toujours réalisé pour la même valeur m_0 .

5.23 Donner les expressions de ΔR_c et ΔR_1 .

5.24 En tenant compte des expressions précédentes, donner la nouvelle expression de ΔV_{mes} .

5.25 Donner l'approximation linéaire $\Delta V_{mes,lin}$ de ΔV_{mes} .

5.26 Toujours dans l'approximation linéaire, en déduire l'expression de la sensibilité réduite S_r de la mesure.

5.27 En fonction de R_{c0} , A et Δm , calculer l'erreur de linéarité ε_4 . En donner la valeur maximale.

VI. Linéarisation amont – Montage en quart de pont actif

On désire éventuellement améliorer la linéarité de façon active à l'aide du montage suivant où seul R_c est un capteur.

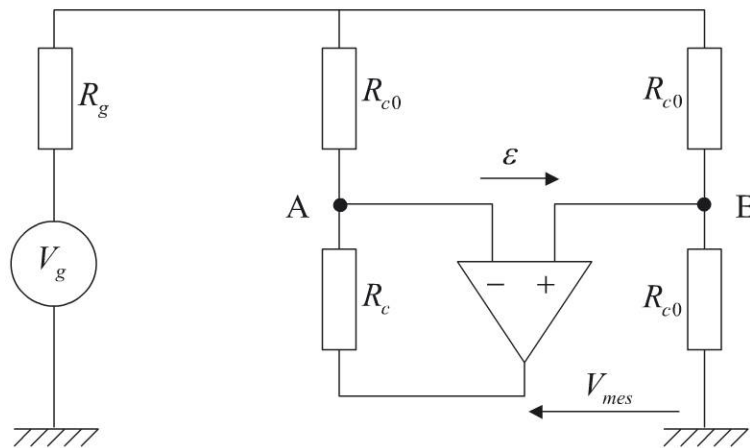


Figure 5.3 - Montage en quart de pont actif

- 5.28** L'amplificateur opérationnel étant supposé idéal, exprimer V_A et V_B .
- 5.29** En déduire ΔV_{mes} en fonction de ΔR_c , R_{c0} et V_g puis A , B , Δm et V_g .
- 5.30** Donner l'approximation linéaire $\Delta V_{mes,lin}$ de ΔV_{mes} .
- 5.31** En déduire l'expression de la sensibilité réduite S_r de la mesure.
- 5.32** Calculer l'erreur de linéarité ε_5 , l'évaluer à l'ordre 2 et calculer sa valeur maximale.

VII. Avantages et inconvénients des différents conditionneurs

Commenter les différentes solutions mises en œuvre. Quels en sont les avantages et les inconvénients ?

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville

- Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

6

PROBLÈME : Capteur à réluctance variable

Ce problème présente la mise en œuvre d'un capteur à réluctance variable dans l'asservissement en tension d'un ruban défilant magnétique. L'accent est mis sur le calcul de la valeur de l'inductance, la non-linéarité de la mesure et sa correction et leurs effets sur le spectre du signal de mesure.

Énoncé

I. Étude du capteur

Soit un capteur inductif, représenté figure 6.1, réalisé à partir d'un circuit magnétique en U, de section carrée a^2 , en matériau doux feuilleté et sur lequel sont bobinés N enroulements d'un conducteur parcouru par un courant I . La fibre moyenne Γ de ce circuit magnétique en U est de longueur l_1 dans le feuilletage et la perméabilité magnétique du matériau doux est $\mu_1 = 500\mu_0$ où μ_0 est la perméabilité du vide. Ce capteur est placé en regard d'un ruban métallique et ferromagnétique, de largeur supérieure à a et en défilement devant le capteur. Ce ruban est d'épaisseur e et la perméabilité magnétique du matériau le constituant est $\mu_2 = 700\mu_0$. Le rôle du capteur est de mesurer la distance x du ruban au capteur afin d'asservir le système réglant la tension du ruban.

On suppose que les lignes de champ sont parfaitement guidées par le circuit magnétique, qu'aucune ligne de champ ne se reboucle dans l'air et que l'entrefer x est suffisamment petit pour pouvoir négliger les fuites de flux.

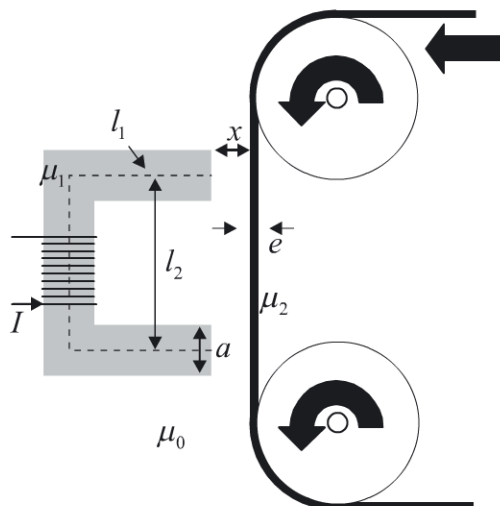


Figure 6.1 - Principe du capteur

6.1 Donner l'expression de la circulation du champ d'excitation magnétique \vec{H} le long de la fibre moyenne Γ du circuit. Décomposer cette circulation en faisant intervenir les champs H_1 dans le capteur, H_0 dans l'air, H_2 dans le ruban et les longueurs de la fibre moyenne Γ , l_1 dans le capteur, $2x$ dans l'air et l_2 dans le ruban.

6.2 En utilisant le fait que l'induction magnétique est à flux conservatif, que ce champ d'induction peut être considéré comme uniforme dans chaque section du circuit magnétique et que l'entrefer est petit, donner les relations liant le champ d'induction magnétique B_1 dans le matériau du capteur à celui B_0 dans l'air et à celui B_2 dans le ruban.

6.3 La perméabilité magnétique liant par définition l'excitation magnétique à l'induction magnétique, déduire des expressions précédentes, la relation liant N , I , B_1 , l_1 , l_2 , x , e , a , μ_1 , μ_2 et μ_0 .

6.4 Donner l'expression du flux ϕ_b dans la bobine et en déduire l'expression de l'inductance L de la bobine.

6.5 En utilisant les résultats précédents, déterminer l'expression de l'inductance $L(x)$ de la bobine pour une distance capteur-ruban x .

6.6 La distance x varie autour de sa valeur de consigne x_0 et on pose $x = x_0 + \Delta x$. Établir l'expression de $L(x)$ en fonction de $L_0 = L(x_0)$, Δx et d'une constante A à déterminer. On donne $N = 100$, $l_1 = 10$ cm, $l_2 = 4$ cm, $x_0 = 3$ mm, $e = 0,1$ mm, $a = 2$ cm, et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Hm⁻¹.

II. Conditionnement du capteur

6.7 Le capteur est monté en quart de pont avec un condensateur variable de capacité C et deux résistances fixes $R = 1$ k Ω (voir figure 6.3). Le pont est alimenté par un générateur d'impédance interne négligeable et délivrant la force électromotrice $V_g \cos \omega_g t$.

Déterminer à quelle valeur doit être ajustée la capacité C pour que la tension différentielle du pont soit nulle pour $x = x_0$. On considère que $L(x)$ et C sont respectivement une inductance et une capacité pures.

6.8 Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} .

6.9 Donner l'approximation linéaire $V_{mes,lin}$ de V_{mes} . À partir de cette expression linéaire et sur une étendue de mesure $E.M. = [-2$ mm ; $+2$ mm], peut-on extraire le déplacement Δx du ruban avec une erreur relative inférieure à 1 % ? On donne $\omega_g = 2\pi \cdot 10^3$ rad.s⁻¹.

6 • Capteur à réductance variable

6.10 En fait la variation de distance Δx dépend du temps en raison de l'asservissement effectué sur la tension du ruban et on désire analyser correctement cette dépendance temporelle. En considérant le cas simplifié où $\Delta x(t) = x_1 \cos \omega t$, effectuer le développement limité de la valeur instantanée $V_{mes}(t)$ en $\Delta x(t)$ jusqu'à l'ordre 3, puis en posant $B = ARx_1/(R + Z_0)$ décomposer l'expression de $V_{mes}(t)$ obtenue précédemment de façon à faire apparaître les différentes pulsations de son spectre.

6.11 Sous quel type de modulation l'information sur le déplacement est-elle codée ?

III. Conditionnement du signal

6.12 On utilise le montage suivant pour linéariser la tension de mesure.

Comme la tension $V_{mes}(t)$ est une tension différentielle (tension de déséquilibre du pont du paragraphe II), elle n'est pas référencée à la masse. Il est donc nécessaire de la référencer à la masse pour l'utiliser comme entrée du montage 6.2. Pour ce faire, $V_{mes}(t)$ est utilisée comme entrée différentielle d'un amplificateur d'instrumentation de gain unité.

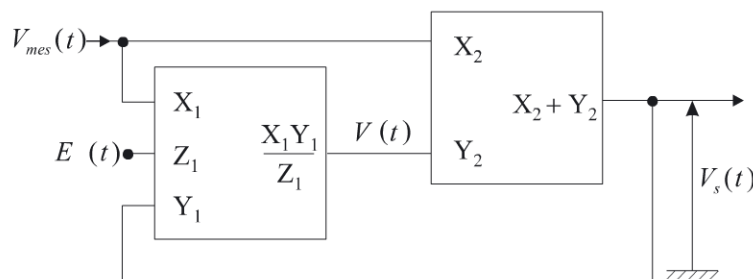


Figure 6.2 - Conditionnement du signal

Établir l'expression de la tension de sortie $V_s(t)$. Pour quelle valeur de $E(t)$, l'expression de $V_s(t)$ varie-t-elle linéairement avec le déplacement Δx ?

Comment obtenir pratiquement $E(t)$ en utilisant un condensateur identique à celui utilisé dans le montage en pont ? Quelle est alors l'expression de $V_s(t)$?

6.13 Décomposer l'expression de $V_s(t)$ de façon à faire apparaître les différentes pulsations constituant son spectre. Sous quel type de modulation l'information sur le déplacement est-elle maintenant codée ?

I. Étude du capteur

6.1 Les lignes de champ étant parfaitement guidées donc toujours colinéaires à la fibre moyenne, d'après le théorème d'Ampère, la circulation de l'excitation magnétique le long du contour fermé Γ , s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 2x$$

6.2 L'induction magnétique étant à flux conservatif, au travers de la section S d'un tube de champ on a :

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = cte$$

En prenant a^2 comme section S du circuit magnétique et compte tenu du fait que l'entrefer est petit, la section du tube de champ dans l'air reste pratiquement égale à a^2 , on en déduit :

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_1 a^2 = B_0 a^2$$

où B_1 et B_0 sont respectivement les champs d'induction magnétique dans le circuit magnétique et dans l'entrefer.

Dans le ruban, les lignes de champ étant toujours parfaitement guidées, on a $\phi = B_2 ea$.

6.3 La perméabilité magnétique liant inductance et excitation magnétique, on a $B_1 = \mu_1 H_1$, $B_2 = \mu_2 H_2$ et $B_0 = \mu_0 H_0$. Compte tenu des résultats des deux questions précédentes, il vient :

$$NI = \frac{B_1}{\mu_1} l_1 + \frac{aB_1}{e\mu_2} l_2 + \frac{B_1}{\mu_0} 2x \quad (6.1)$$

6.4 La bobine étant supposée de spires jointives serrées sur le circuit magnétique, le flux ϕ_b dans la bobine qui est le flux au travers de ses N spires est donné par :

$$\phi_b = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \simeq N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

L'induction magnétique étant par hypothèse uniforme dans la bobine, on obtient :

$$\phi_b = B_1 N a^2 = LI$$

L représente l'inductance propre de la bobine soit $L = B_1 N a^2 / I$.

6 • Capteur à réluctance variable

6.5 En éliminant le courant entre cette dernière expression et le résultat (6.1), on déduit immédiatement :

$$L(x) = \frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{al_2}{e\mu_2} + \frac{2x}{\mu_0}}$$

6.6 Avec $x_0 + \Delta x$, il vient :

$$\begin{aligned} L(x) = L(x_0 + \Delta x) &= \frac{N^2 a^2}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{al_2}{e\mu_2} + \frac{2(x_0 + \Delta x)}{\mu_0}} & (6.2) \\ &= L_0 \frac{1}{1 + \frac{2e\mu_1\mu_2}{el_1\mu_0\mu_2 + al_2\mu_0\mu_1 + 2x_0e\mu_1\mu_2} \Delta x} = L_0 \frac{1}{1 + A\Delta x} \end{aligned}$$

On a posé $A = 2e\mu_1\mu_2/(e\mu_0\mu_2l_1 + a\mu_0\mu_1l_2 + 2e\mu_1\mu_2x_0)$. Numériquement, on obtient $L_0 = 285 \mu\text{H}$ et $A = 113,5 \text{ m}^{-1}$.

II. Conditionnement du capteur

6.7 Le montage est classique (voir figure 6.3).

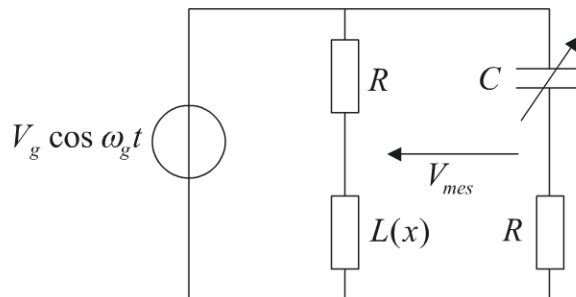


Figure 6.3 - Circuit de conditionnement du capteur

On note $Z_0 = jL_0\omega_g$ et $Z_C = 1/jC\omega_g$. Pour que la tension différentielle du pont soit nulle pour $x = x_0$, on doit avoir :

$$\frac{Z_0}{R + Z_0} - \frac{R}{R + Z_C} = 0 \quad \text{soit} \quad Z_0 Z_C = R^2 \quad (6.3)$$

(6.3) entraîne $1/jC\omega_g = R^2/jL_0\omega_g$, la valeur de la capacité du condensateur doit donc être fixée à $C = L_0/R^2 = 285 \text{ pF}$.

6.8 En notation complexe, compte tenu de (6.2) et en posant $Z_L(x) = jL(x)\omega_g$, on a :

$$\Delta Z = Z_L(x) - Z_0 = Z_0 \left(\frac{1}{1 + A\Delta x} - 1 \right) = -Z_0 \frac{A\Delta x}{1 + A\Delta x} = -jL_0\omega_g \frac{A\Delta x}{1 + A\Delta x}$$

Avec $Z_0 Z_C = R^2$ la tension différentielle s'écrit :

$$V_{mes} = \left(\frac{Z_L(x)}{R + Z_L(x)} - \frac{R}{R + R^2/Z_0} \right) V_g = \frac{R(Z_L(x) - Z_0)}{(R + Z_L(x))(R + Z_0)} V_g \quad (6.4)$$

$$= \frac{R\Delta Z}{(R + Z_0)^2 \left(1 + \frac{\Delta Z}{R + Z_0} \right)} V_g = \frac{-jRL_0\omega_g \frac{A\Delta x}{1 + A\Delta x}}{(R + jL_0\omega_g)^2 \left(1 - \frac{jL_0\omega_g}{R + jL_0\omega_g} \frac{A\Delta x}{1 + A\Delta x} \right)} V_g$$

6.9 L'approximation linéaire $V_{mes,lin}$ de (6.4) donne :

$$V_{mes,lin} = -\frac{RZ_0A\Delta x}{(R + Z_0)^2} = -j\frac{RL_0\omega_gA\Delta x}{(R + jL_0\omega_g)^2} V_g$$

L'erreur relative engendrée en utilisant $V_{mes,lin}$ au lieu de V_{mes} pour extraire Δx est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{V_{mes,lin} - V_{mes}}{V_{mes}} = \frac{Z_0A\Delta x - \frac{\Delta Z}{1 + \frac{\Delta Z}{R + Z_0}}}{\frac{\Delta Z}{1 + \frac{\Delta Z}{R + Z_0}}} = \frac{RA\Delta x}{R + Z_0}$$

Par exemple, pour $\Delta x = \pm 2$ mm on a déjà $|\varepsilon| \approx 22,7$ %. Dans l'état, l'utilisation de la mesure et son assimilation à une expression théorique du type de $V_{mes,lin}$ ne permettent pas la détermination de Δx avec une erreur inférieure à 1 %.

6.10 En se limitant à l'ordre 3 en $\Delta x(t)$, la valeur instantanée $V_{mes}(t)$ est :

$$V_{mes}(t) = \frac{R\Delta Z(t)}{(R + Z_0)(R + Z_0 + \Delta Z(t))} V_g(t)$$

$$= -\frac{RZ_0A\Delta x(t)}{(1 + A\Delta x(t))(R + Z_0) \left(R + Z_0 - \frac{Z_0A\Delta x(t)}{1 + A\Delta x(t)} \right)} V_g \cos \omega_g t$$

$$= -\frac{RZ_0A\Delta x(t)}{(R + Z_0)^2 \left(1 + \frac{RA\Delta x(t)}{R + Z_0} \right)} V_g \cos \omega_g t$$

$$\approx -\frac{Z_0}{R + Z_0} V_g \cos \omega_g t \left[\left(\frac{AR}{R + Z_0} \right) \Delta x(t) - \left(\frac{AR}{R + Z_0} \right)^2 (\Delta x(t))^2 + \left(\frac{AR}{R + Z_0} \right)^3 (\Delta x(t))^3 \right]$$

6 • Capteur à réductance variable

En posant $B = ARx_1/(R + Z_0)$ et en utilisant les deux identités $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ et $\cos^3 x = (3 \cos x + \cos 3x)/4$, il vient pour la tension de mesure instantanée :

$$\begin{aligned} V_{mes}(t) &\simeq \frac{Z_0}{R + Z_0} V_g \cos \omega_g t \left[-B \cos \omega t + B^2 \cos^2 \omega t - B^3 \cos^3 \omega t \right] \\ &= \frac{Z_0}{R + Z_0} V_g \cos \omega_g t \left[\frac{B^2}{2} - \left(B + \frac{3}{4} B^3 \right) \cos \omega t + \frac{B^2}{2} \cos 2\omega t - \frac{B^3}{4} \cos 3\omega t \right] \\ &= \frac{Z_0}{R + Z_0} \frac{V_g}{2} \left[\frac{B^2}{2} \cos \omega_g t \right. \\ &\quad \left. - \left(B + \frac{3}{4} B^3 \right) \left(\cos(\omega_g - \omega)t + \cos(\omega_g + \omega)t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^2}{2} \left(\cos(\omega_g - 2\omega)t + \cos(\omega_g + 2\omega)t \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{B^3}{4} \left(\cos(\omega_g - 3\omega)t + \cos(\omega_g + 3\omega)t \right) \right] \end{aligned}$$

Le spectre de la tension de mesure (voir figure 6.4) est donc constitué en première approximation des pulsations $[\omega_g ; \omega_g \pm \omega ; \omega_g \pm 2\omega ; \omega_g \pm 3\omega]$.

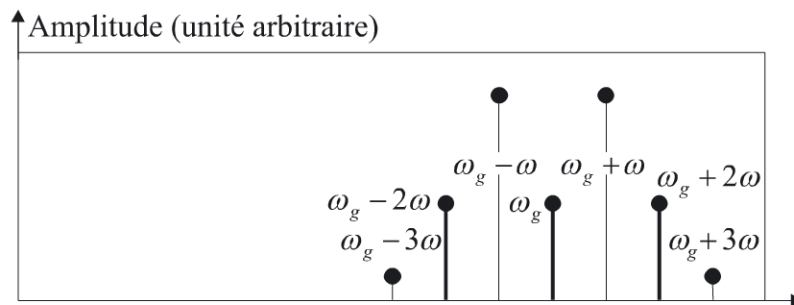


Figure 6.4- Allure du spectre de la tension de mesure

6.11 L'information est codée sous forme d'une modulation d'amplitude avec présence de la porteuse (due à la non-linéarité) puisque, dans le spectre de $V_{mes}(t)$, figure un terme de pulsation ω_g .

III. Conditionnement du signal

6.12 On pose $K_1 = R/(R + Z_0)$ et $K_2 = Z_0/(R + Z_0)$. Le circuit de la figure 6.2 donne $V(t) = V_{mes}(t)V_s(t)/E(t)$ et $V_s(t) = V_{mes}(t) + V(t)$. On en tire :

$$V_s = \frac{V_{mes}(t)}{1 - \frac{V_{mes}(t)}{E(t)}} = \frac{-E(t)K_2 A \Delta x V_g \cos \omega_g t}{E(t) \left(\frac{1}{K_1} + A \Delta x \right) + K_2 A \Delta x V_g \cos \omega_g t}$$

Pour que $V_s(t)$ varie linéairement avec le déplacement Δx , il suffit d'imposer :

$$E(t) = -K_2 V_g \cos \omega_g t$$

Le condensateur du montage en pont avait comme impédance $Z_C = R^2/Z_0$. Pour réaliser $E(t) = -Z_0/(R + Z_0) V_g \cos \omega_g t$, il suffit d'utiliser le circuit de la figure 6.5. Le pont diviseur de tension alimenté par $V_g \cos \omega_g t$ en associant en série R et Z_C réalise, aux bornes de la résistance, la tension $Z_0/(R + Z_0) V_g \cos \omega_g t$ si $R' \gg R$. Cette tension est inversée pour réaliser $E(t)$ par le montage à amplificateur opérationnel.

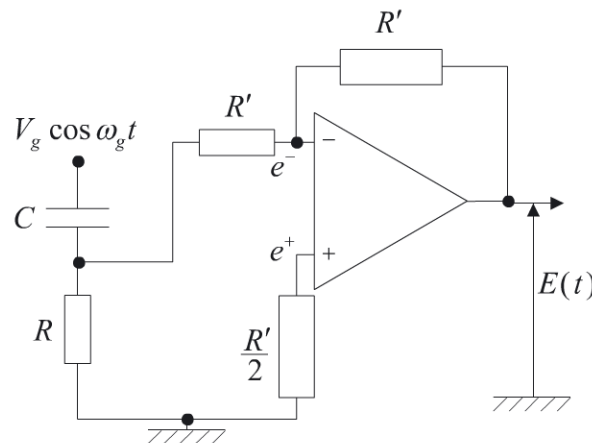


Figure 6.5 - Circuit de réalisation de la tension $E(t)$

On a alors un comportement linéaire du signal par rapport à Δx puisque :

$$V_s(t) = -K_2 A \Delta x V_g \cos \omega_g t = -\frac{Z_0}{R + Z_0} A \Delta x V_g \cos \omega_g t$$

6.13 De façon similaire à la question II.4, il vient maintenant :

$$\begin{aligned} V_s(t) &= -B(\cos \omega t V_g)(\cos \omega_g t) \\ &= -B \frac{V_g}{2} [\cos(\omega_g - \omega)t + \cos(\omega_g + \omega)t] \end{aligned}$$

Le spectre n'est plus dès lors composé que des pulsations $\omega_g \pm \omega$. On est en présence d'une modulation d'amplitude sans porteuse (absence de la pulsation ω_g dans le spectre).

6 • Capteur à réductance variable



En toute rigueur, dans ce type de problème, il faudrait tenir compte de la dépendance de type passe-bas de la perméabilité magnétique des matériaux qui jouent sur la valeur de A ce qui réintroduit une distorsion supplémentaire.

Généralement, ces capteurs utilisés comme capteurs de proximité sont moins précis que leurs homologues de type capacitif qui présentent, de plus, l'avantage de pouvoir détecter la distance de tout type de cible (diélectrique, métallique ferromagnétique ou non, etc.). Les capteurs inductifs restent en revanche plus faciles à mettre en œuvre.

Le principe physique du capteur inductif peut être utilisé pour réaliser des capteurs tachymétriques actifs. On place, par exemple, le capteur devant les dents d'un engrenage de matériau magnétique. À chaque passage d'une dent du pignon devant le capteur, il y a variation de la réductance du capteur et création d'une fem induite impulsionnelle. Il suffit de compter ces impulsions pendant un intervalle de temps donné pour en déduire, connaissant le nombre de dents du pignon, la vitesse angulaire de ce dernier.

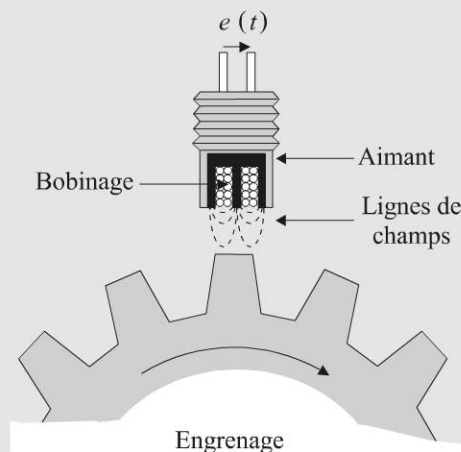


Figure 6.6 - Principe de fonctionnement d'un tachymètre inductif

PROBLÈME : Linéarisation aval

7

Ce problème présente la mise en œuvre de deux méthodes de correction aval de la non-linéarité présentée par un montage de conditionnement en quart de pont. Une de ces méthodes permet de plus, de rendre la tension de mesure indépendante des variations possibles de la force électromotrice de la source d'alimentation.

Énoncé

On considère le montage en quart de pont de la figure 7.1 où R_c représente la résistance d'un capteur résistif du mesurande m . Le pont est alimenté par une source de tension de force électromotrice $V_g = 10\text{ V}$ et de résistance interne $R_g = 50\ \Omega$ non négligeable.

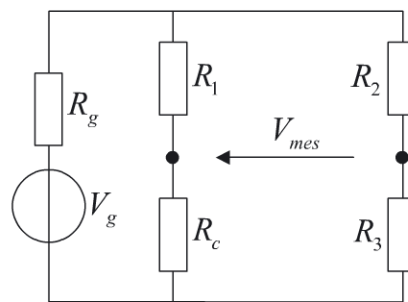


Figure 7.1 - Le circuit de conditionnement

I. Calculs préliminaires

7.1 Établir l'expression de la tension de mesure V_{mes} .

7.2 Le pont est équilibré pour une valeur m_0 du mesurande pour laquelle on note $R_c(m_0) = R_{c0} = 100\ \Omega$. En déduire a priori les valeurs de R_1 , R_2 et R_3 à choisir.

7.3 En déduire l'expression de ΔV_{mes} , variation de la tension de mesure par rapport à l'équilibre, en fonction de R_{c0} , V_g , R_g et $\Delta R_c = R_c - R_{c0}$ puis $k_1 = 1/4(R_{c0} + R_g)$, $k_2 = (2R_{c0} + R_g)/4R_{c0}(R_{c0} + R_g)$, V_g , et ΔR_c .

7 • Linéarisation aval

7.4 Déterminer l'expression de la sensibilité S_{cond} du conditionneur dans le cas d'une approximation linéaire (fonctionnement en faibles signaux).

7.5 On considère une variation de la source (dérive ou parasite) qui passe de V_g à $V_g + \Delta V_g$. Montrer que ΔV_{mes} présente alors en plus de son expression précédente, un terme croisé gênant couplant variation du mesurande et variation de la force électromotrice de la source.

II. Linéarisation par multiplication et sommation

La variation de la tension de mesure du I.3. est le signal d'entrée du montage de linéarisation aval de la figure 7.2. Comme ΔV_{mes} n'est pas référencé à la masse, ce signal sert tout d'abord d'entrée différentielle à un amplificateur d'instrumentation de gain unité. En sortie de ce dernier, on dispose alors du signal ΔV_{mes} référencé à la masse et c'est ce dernier qui sert d'entrée au montage 7.2.

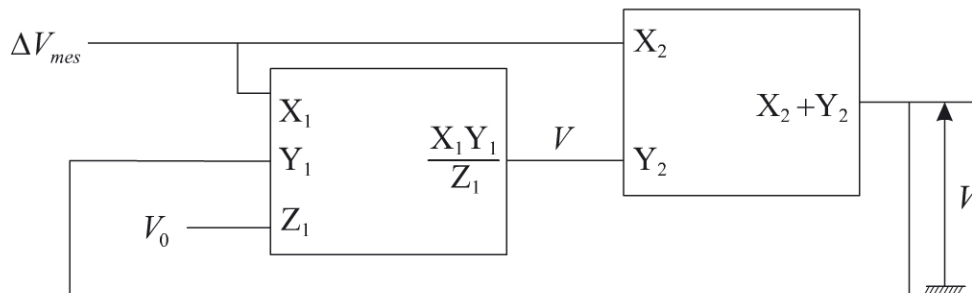


Figure 7.2 - Le circuit de linéarisation par multiplication-sommation

7.6 Donner l'expression de V_s en fonction de V_0 et ΔV_{mes} puis en fonction de k_1 , k_2 , V_g , V_0 et ΔR_c .

7.7 En déduire la valeur à donner à V_0 pour que le conditionnement devienne linéaire.

7.8 Donner dans ce cas l'expression de la tension de sortie V_s . En déduire la sensibilité S_{cond} du conditionneur.

7.9 Si on considère de nouveau une variation de la source qui passe de V_g à $V_g + \Delta V_g$, que se passe-t-il ?

III. Linéarisation par diviseur

On considère maintenant le circuit de linéarisation de la figure 7.3, constitué d'un amplificateur opérationnel supposé idéal et d'un diviseur analogique pondéré.

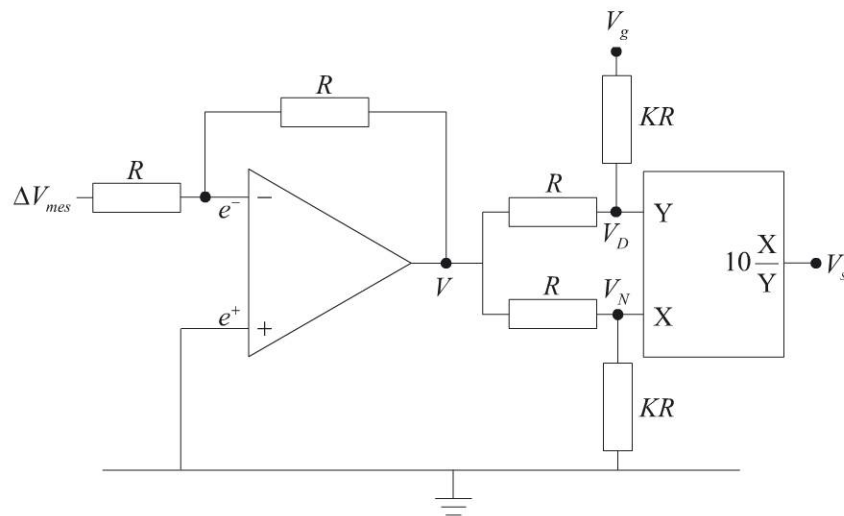


Figure 7.3 - Linéarisation par division

- 7.10** Déterminer l'expression de V en fonction de ΔV_{mes} puis en fonction de k_1 , k_2 , V_g et ΔR_c .
- 7.11** Déterminer V_N et V_D en fonction de K , V et V_g .
- 7.12** En déduire l'expression de V_s en fonction de V_N et V_D puis de K , k_1 , k_2 , V_g et ΔR_c .
- 7.13** Établir la relation que doivent vérifier K , k_1 et k_2 pour que le conditionnement soit linéaire.
- 7.14** Donner alors l'expression de V_s et en déduire la sensibilité S_{cond} du conditionneur.
- 7.15** Si on considère de nouveau une variation de la source qui passe de V_g à $V_g + \Delta V_g$, que se passe-t-il ?

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- ▶ La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonvalle

- ▶ Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

8

PROBLÈME : Principe du thermocouple et lois élémentaires[@]

Un circuit conducteur composé de deux matériaux différents et soumis à un gradient de température est le siège d'une fem, fonction de la nature des matériaux utilisés et de leurs températures : c'est l'effet Seebeck. On nomme thermocouple un tel circuit thermoélectrique. Au travers de la mesure de la fem du thermocouple, on peut déterminer la température d'une des jonctions des deux matériaux si on connaît la température de l'autre jonction.

Les différents types de thermocouples existants permettent de couvrir une étendue de mesure allant de $-250\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $2500\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Ce problème présente quelques lois élémentaires relatives à la thermométrie par thermocouples.

Énoncé

Lorsque la jonction de deux conducteurs A et B de natures différentes est à la température T , il s'établit, de part et d'autre de cette jonction, une différence de potentiel $e_{A/B}^T$ qui ne dépend que de la nature des deux conducteurs et de la température T (voir figure 8.1). C'est l'effet Peltier.

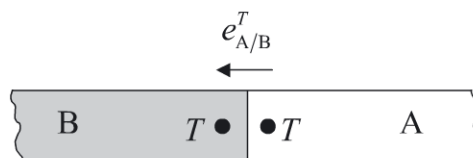


Figure 8.1 - fem de Peltier

Entre deux points d'un même conducteur A aux températures T et T' , il existe une force électromotrice $e_A^{T;T'}$ qui ne dépend que de la nature du conducteur et des deux températures T et T' . C'est l'effet Thomson (voir figure 8.2). La force électromotrice de Thomson est donnée par (8.1) où h_A est le coefficient de Thomson du matériau A,

[@] Les données de ce problème sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage).

coefficient qui en réalité est une fonction de la température :

$$e_A^{T;T'} = \int_{T'}^T h_A dT \tag{8.1}$$

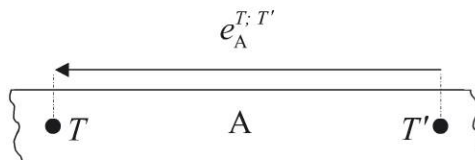


Figure 8.2 - fem de Thomson

8.1 On considère un circuit fermé constitué de trois conducteurs A, B et C de natures différentes, en série, l'ensemble étant à la température T (voir figure 8.3). En utilisant le second principe de la thermodynamique, montrer que la différence de potentiel entre les conducteurs A et B est la même en présence ou en l'absence du conducteur C.

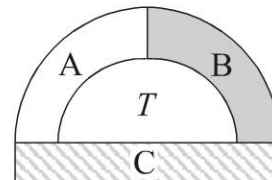


Figure 8.3 - Circuit isotherme constitué de conducteurs différents en série

8.2 On considère un circuit fermé (voir figure 8.4) constitué de deux conducteurs A et B de natures différentes et dont les deux jonctions sont respectivement aux températures T et T' . Ce circuit constitue un thermocouple. Établir l'expression de la force électromotrice $E_{A/B}^{T;T'}$ dite de Seebeck résultant des effets Peltier et Thomson dans le circuit.

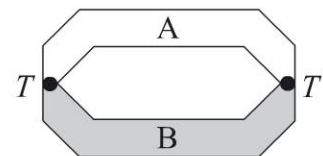


Figure 8.4 - Thermocouple

8.3 On considère deux thermocouples constitués par les couples A-B et C-B dont les jonctions sont aux températures T et T' et dont les fem de Seebeck sont respectivement $E_{A/B}^{T;T'}$ et $E_{C/B}^{T;T'}$. En déduire la fem de Seebeck $E_{A/C}^{T;T'}$ du thermocouple A-C dont les jonctions seraient aux températures T et T' et la loi dite des métaux successifs.

8.4 Déterminer la fem de Seebeck $E_{A/B}^{T;T'}$ du couple A-B aux températures T et T' connaissant les fem de Seebeck $E_{A/B}^{T;T''}$ du couple aux températures T et T'' , et $E_{A/B}^{T'';T'}$ du couple aux températures T'' et T' , ce qui constitue la loi des températures successives.

8.5 Soit le thermocouple constitué par le couple A-B de fem de Seebeck $E_{A/B}^{T;T'}$. On désire déterminer l'effet de l'introduction d'un nouveau conducteur C dans l'hypothèse où les deux extrémités du conducteur C sont à la même température.

8 • Principe du thermocouple et lois élémentaires

Deux cas sont à envisager selon l'endroit où on introduit ce conducteur C. Soit on coupe le conducteur B et on insère un nouveau conducteur C réalisant ainsi deux nouvelles jonctions à la température T'' du conducteur B avec le conducteur C ; soit on introduit le conducteur C entre le conducteur A et le conducteur B auquel cas les deux jonctions du conducteur C seront considérées à la température T .

Quel est l'effet de l'introduction du conducteur C ?

Les valeurs des fem $E_{A/B}^{T;T'}$ de Seebeck sont tabulées en fonction de la température T pour chaque type de couple A-B communément utilisé en prenant comme température dite de référence $T' = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (température de soudure froide).

On considère un thermocouple de type K, soit Chromel-Alumel (alliage Ni et Cr – alliage Ni et Al) dont la fem de Seebeck $E_{\text{NiCr/NiAl}}^{T;0}$ est donnée dans le tableau 8.1 en fonction de la température T en $^{\circ}\text{C}$.

Tableau 8.1 - $E_{\text{NiCr/NiAl}}^{T;0}$ en μV (CEI 584.1-1995)

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	4096	4138	4179	4220	4262	4303	4344	4385	4427	4468
110	4509	4550	4591	4633	4674	4715	4756	4797	4838	4879
120	4920	4961	5002	5043	5084	5124	5165	5206	5247	5288
130	5328	5369	5410	5450	5491	5532	5572	5613	5653	5694
140	5735	5775	5815	5856	5896	5937	5977	6017	6058	6098

8.6 Le thermocouple est connecté à un microvoltmètre de grande impédance d'entrée (voir figure 8.5). Les bornes de ce dernier sont à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Il indique une tension $V_{\text{mes},0} = 5104\text{ }\mu\text{V}$. Quelle est la température T de la soudure de mesure dite température de soudure chaude ?

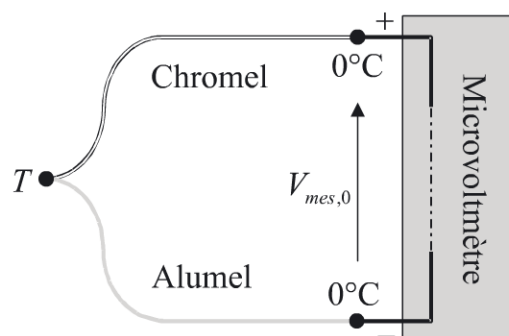


Figure 8.5 - Principe de la mesure

8.7 Les fils des thermocouples sont d'un coût élevé. Ceci s'explique par la pureté des matériaux utilisés et les technologies de fabrication mises en œuvre de façon à assurer l'interchangeabilité des thermocouples.

Lorsque le microvoltmètre doit se trouver à distance de la soudure de mesure (c'est le cas lorsque la température est très élevée), on remplace les câbles du thermocouple par des câbles d'extension pour ramener le signal à l'entrée du voltmètre. Ces câbles de moindre coût, sont notés ici XA pour celui connecté au chromel et XB pour celui connecté à l'alumel (voir figure 8.6).

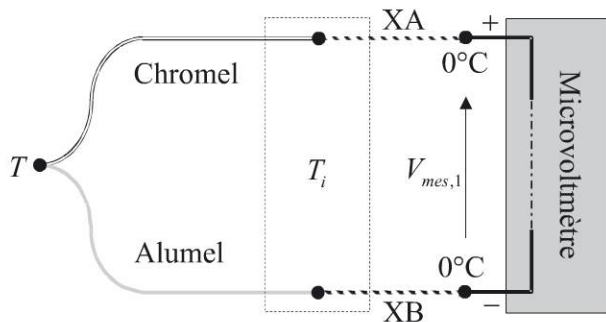


Figure 8.6 - Principe de la mesure avec câbles d'extension

Soit T_i , la température à laquelle se trouvent les jonctions entre les câbles d'extension et le thermocouple de mesure.

Quelle condition doit vérifier le couple XA-XB pour que la présence des câbles d'extension ne modifie pas la mesure à savoir pour que l'on ait $V_{mes,1} = V_{mes,0}$?

Quel problème se pose alors ? Comment peut-on y remédier ?

8.8 On se place dans le cas de la solution adoptée à la question précédente, c'est-à-dire avec des câbles d'extension adaptés. Réaliser une tension de référence à 0°C à l'entrée du voltmètre est peu aisé et peut s'avérer coûteux. Il est plus simple de laisser les jonctions au voltmètre à la température ambiante T_a et d'effectuer la correction nécessaire par rapport à la référence de 0°C en mesurant la température ambiante au moyen d'une autre technique (voir figure 8.7).

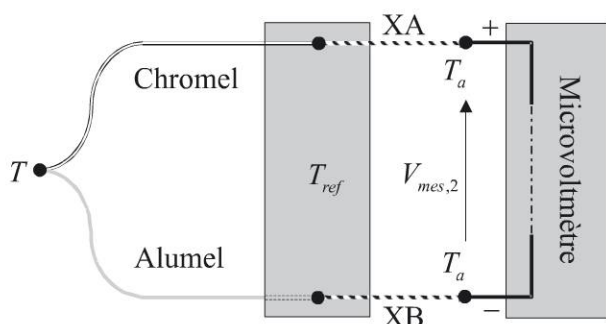


Figure 8.7 - Principe de la mesure avec câbles d'extension et sans référence au 0°C

Les fils d'extension utilisés sont un fil de cuivre pour le fil relié au fil de chromel et un fil de constantan (alliage de cuivre et de nickel) pour celui relié à l'alumel.

Pour une même valeur de la température de la soudure chaude, calculer la tension $V_{mes,2}$ affichée par le microvoltmètre. On donne $T_a = 25^\circ\text{C}$ et $E_{\text{Cu/CuNi}}^{25;0} = 992 \mu\text{V}$.

8 • Principe du thermocouple et lois élémentaires

8.9 Calculer l'erreur engendrée si on ne tient pas compte de la correction à apporter sur la mesure.

8.10 On se propose d'éviter ce problème en réalisant le montage de la figure 8.8 où le circuit de compensation de soudure froide se trouve à la température ambiante. Ce circuit est composé d'un pont formé de résistances fixes R_1 et d'une résistance thermométrique Pt1000 de résistance :

$$R_c(T) = R_0(1 + \alpha T)$$

$R_0 = 1\,000\ \Omega$ représente la résistance à $0\ ^\circ\text{C}$ et $\alpha = 3,85 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1}$ le coefficient de température.

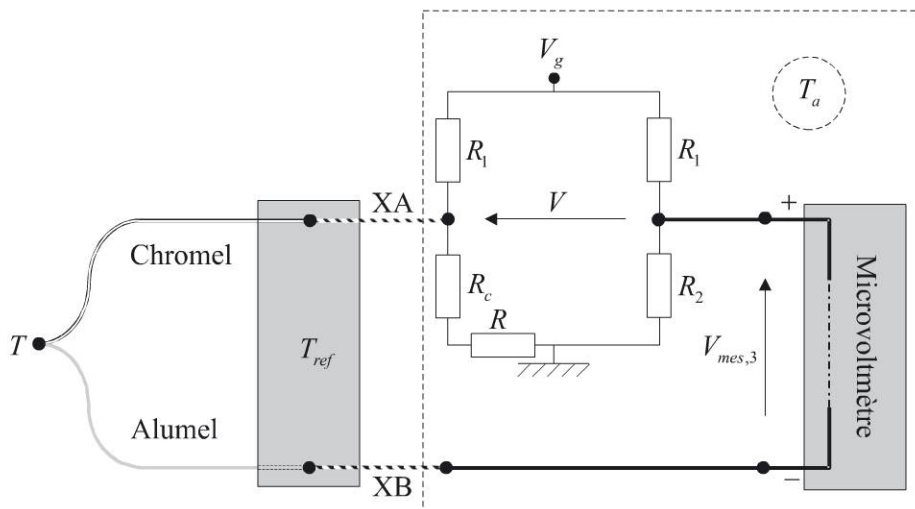


Figure 8.8 - Principe de la compensation de soudure froide

En première approximation, la fem $E_{\text{Cu/CuNi}}^{T;0}$ peut être considérée comme proportionnelle à la température c'est-à-dire que l'on a $E_{\text{Cu/CuNi}}^{T;0} = AT$. Le tableau 8.2 donne la fem du couple cuivre-constantan pour des valeurs de température comprises entre $20\ ^\circ\text{C}$ et $30\ ^\circ\text{C}$.

Tableau 8.2 - fem du couple cuivre-constantan

T	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$E_{\text{Cu/CuNi}}^{T;0}$	790	830	870	911	951	992	1033	1074	1114	1155	1196

Calculer la valeur de la constante A et déterminer l'expression de la tension différentielle V du pont. On fixe $R = R_0$. Calculer les valeurs de R_1 et R_2 permettant la compensation de soudure froide.

8.11 Cette compensation étant effectuée, évaluer l'erreur commise sur la mesure de la température de la soudure chaude si la température ambiante varie entre $20\ ^\circ\text{C}$ et $30\ ^\circ\text{C}$.

8.1 Soit e la force électromotrice totale. Si elle différait de 0, il y aurait création d'un courant et donc mise en mouvement des électrons. Or d'après le second principe de la thermodynamique, un système isotherme ne peut fournir d'énergie mécanique. La force électromotrice totale e est donc nulle. Cette force étant la somme des fem de Peltier, on a $e = e_{A/C}^T + e_{C/B}^T + e_{B/A}^T = 0$ soit $e_{A/C}^T + e_{C/B}^T = -e_{B/A}^T$. Par convention d'écriture $e_{B/A}^T$ étant mesurée en allant de B vers A, on a de toute évidence $e_{B/A}^T = -e_{A/B}^T$. On en déduit $e_{A/B}^T = e_{A/C}^T + e_{C/B}^T$. Lorsque deux conducteurs sont en contact par l'intermédiaire d'un troisième conducteur et que le tout est isotherme, tout se passe comme si les deux conducteurs étaient directement en contact.

8.2 La force électromotrice totale s'écrit simplement :

$$E_{A/B}^{T;T'} = \int_{T'}^T h_A dT + e_{A/B}^T + \int_T^{T'} h_B dT + e_{B/A}^{T'} = \int_{T'}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T'} \quad (8.2)$$

8.3 D'après (8.2), on a :

$$\begin{aligned} E_{A/B}^{T;T'} &= \int_{T'}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T'} \\ E_{C/B}^{T;T'} &= \int_{T'}^T (h_C - h_B) dT + e_{C/B}^T - e_{C/B}^{T'} \end{aligned} \quad (8.3)$$

En effectuant la différence des deux termes de (8.3) et en utilisant les résultats de la question 1, il vient :

$$\begin{aligned} E_{A/B}^{T;T'} - E_{C/B}^{T;T'} &= \int_{T'}^T (h_A - h_B) dT - \int_{T'}^T (h_C - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T'} - e_{C/B}^T + e_{C/B}^{T'} \\ &= \int_{T'}^T (h_A - h_C) dT + e_{A/B}^T + e_{B/C}^T - e_{A/B}^{T'} - e_{B/C}^{T'} \\ &= \int_{T'}^T (h_A - h_C) dT + e_{A/C}^T - e_{A/C}^{T'} = E_{A/C}^{T;T'} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Cette relation permet de déduire la fem de Seebeck du couple A-C lorsque l'on connaît les fem de Seebeck des couples A-B et B-C. (8.4) s'écrit encore :

$$E_{A/B}^{T;T'} = E_{A/C}^{T;T'} + E_{C/B}^{T;T'} \quad (8.5)$$

8 • Principe du thermocouple et lois élémentaires

8.4 Il suffit de décomposer $E_{A/B}^{T;T'}$ selon :

$$\begin{aligned}
 E_{A/B}^{T;T'} &= \int_{T'}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T'} \\
 &= \int_{T''}^T (h_A - h_B) dT + \int_{T'}^{T''} (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T''} + e_{A/B}^{T''} - e_{A/B}^{T'} \\
 &= \int_{T''}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T''} + \int_{T'}^{T''} (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^{T''} - e_{A/B}^{T'} \\
 &= E_{A/B}^{T;T''} + E_{A/B}^{T'';T'}
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

8.5 Dans le premier cas (voir figure 8.9), la nouvelle expression de la fem totale est donnée par (8.7).

$$\begin{aligned}
 e &= \int_{T'}^T h_A dT + e_{A/B}^T + \int_T^{T''} h_B dT + e_{B/C}^{T''} + e_{C/B}^{T''} + \int_{T''}^{T'} h_B dT + e_{B/A}^{T'} \\
 &= \int_{T'}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T'} = E_{A/B}^{T;T'}
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

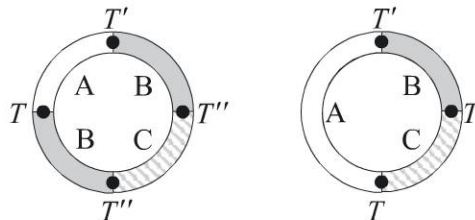


Figure 8.9 - Loi des métaux intermédiaires

Dans le deuxième cas (voir figure 8.9), la nouvelle expression de la fem totale est donnée par (8.8).

$$\begin{aligned}
 e &= \int_{T'}^T h_A dT + e_{A/C}^T + e_{C/B}^T + \int_T^{T'} h_B dT + e_{B/A}^{T'} \\
 &= \int_{T'}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T'} = E_{A/B}^{T;T'}
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

Dans les deux cas, la fem totale n'est pas modifiée par l'introduction d'un conducteur supplémentaire pour peu que ses jonctions soient à la même température. Ce résultat est important puisqu'il montre que la jonction entre les deux conducteurs A et B d'un thermocouple peut être réalisée selon n'importe quel type de soudure. L'apport d'un matériau supplémentaire qui pourrait être nécessaire à cette soudure ne modifiera pas la mesure.

8.6 L'entrée sur le microvoltmètre s'effectue par un conducteur C (généralement du cuivre) à la température de 0 °C . La force électromotrice totale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 e &= \int_0^T h_A dT + e_{A/B}^T + \int_T^0 h_B dT + e_{B/C}^0 + e_{C/A}^0 \\
 &= \int_0^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^0 = E_{A/B}^{T;0}
 \end{aligned}$$

L'indication donnée par le microvoltmètre correspond donc à la fem de Seebeck du couple Chromel-Alumel.

D'après le tableau 8.1, on a :

$$E_{NiCr/NiAl}^{124;0} (5\,084 \mu V) < V_{mes,0} (5\,104 \mu V) < E_{NiCr/NiAl}^{125;0} (5\,124 \mu V)$$

La détermination de la température peut se faire en première approximation par interpolation linéaire selon :

$$T = 124 + \frac{V_{mes,0} - E_{NiCr/NiAl}^{124;0}}{E_{NiCr/NiAl}^{125;0} - E_{NiCr/NiAl}^{124;0}} = 124 + \frac{5104 - 5084}{5124 - 5084} = 124,5 \text{ °C}$$

8.7 Dans la configuration de la figure 8.6, la tension mesurée s'écrit :

$$\begin{aligned}
 V_{mes,1} &= e_{C/XA}^0 + \int_0^{T_i} h_{XA} dT + e_{XA/A}^{T_i} + \int_{T_i}^T h_A dT + e_{A/B}^T \\
 &\quad + \int_T^{T_i} h_B dT + e_{B/XB}^{T_i} + \int_{T_i}^0 h_{XB} dT + e_{XB/C}^0 \\
 &= \int_{T_i}^T (h_A - h_B) dT + e_{A/B}^T - e_{A/B}^{T_i} + \int_0^{T_i} (h_{XA} - h_{XB}) dT + e_{XA/XB}^{T_i} - e_{XA/XB}^0 \\
 &= E_{A/B}^{T;T_i} + E_{XA/XB}^{T_i;0} = E_{A/B}^{T;0} + E_{A/B}^{0;T_i} + E_{XA/XB}^{T_i;0} = E_{A/B}^{T;0} + E_{XA/XB}^{T_i;0} - E_{A/B}^{T_i;0} \\
 &= V_{mes,0} + E_{XA/XB}^{T_i;0} - E_{A/B}^{T_i;0}
 \end{aligned}$$

Pour que $V_{mes,1} = V_{mes,0}$ il suffit que $E_{XA/XB}^{T_i;0} = E_{A/B}^{T_i;0}$.

La température T_i peut varier pour diverses raisons, en particulier suite à une variation de la température ambiante. Il est impossible de réaliser strictement la condition $E_{XA/XB}^{T_i;0} = E_{A/B}^{T_i;0}$ pour des matériaux différents et des températures différentes. Pour pallier le problème, il suffit de fixer T_i à une température T_{ref} au-dessus de la température ambiante au moyen d'un thermostat. Le couple d'extension XA-XB est alors

8 • Principe du thermocouple et lois élémentaires

totallement déterminé par la donnée du couple de mesure A-B et la température de référence T_{ref} et on a $E_{XA/XB}^{T_{ref};0} = E_{A/B}^{T_{ref};0}$.

Pratiquement, pour un fonctionnement correct des câbles d'extension, on peut se contenter que la température T_i reste dans une plage limitée, généralement $[0\text{ °C}; 100\text{ °C}]$.

8.8 La nouvelle tension de mesure s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{mes,2} &= \int_{T_{ref}}^T h_A dT + e_{A/B}^T + \int_T^{T_{ref}} h_B dT + e_{B/XB}^{T_{ref}} \\ &+ \int_{T_{ref}}^{T_a} h_{XB} dT + e_{XB/C}^{T_a} + e_{C/XA}^{T_a} + \int_{T_a}^{T_{ref}} h_{XA} dT + e_{XA/A}^{T_{ref}} \\ &= E_{A/B}^{T;T_{ref}} + E_{XA/XB}^{T_{ref};T_a} = E_{A/B}^{T;0} - E_{A/B}^{T_{ref};0} + E_{XA/XB}^{T_{ref};0} - E_{XA/XB}^{T_a;0} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Comme les câbles d'extension sont adaptés, on a $E_{XA/XB}^{T_{ref};0} = E_{A/B}^{T_{ref};0}$. (8.9) devient :

$$V_{mes,2} = E_{A/B}^{T;0} - E_{XA/XB}^{T_a;0} = V_{mes,0} - E_{XA/XB}^{T_a;0} = 5\,124 - 992 = 4\,132\ \mu\text{V}$$

8.9 Si on ne tient pas compte de la correction à apporter sur la mesure, la température qui sera déduite de la valeur $V_{mes,2}$ est donnée par le tableau 8.1 en procédant de la même façon qu'à la question 6 avec :

$$\begin{aligned} E_{NiCr/NiAl}^{100;0} (4\,096\ \mu\text{V}) < V_{mes,2} (4\,132\ \mu\text{V}) < E_{NiCr/NiAl}^{101;0} (4\,138\ \mu\text{V}) \\ T = 100 + \frac{V_{mes,2} - E_{NiCr/NiAl}^{100;0}}{E_{NiCr/NiAl}^{101;0} - E_{NiCr/NiAl}^{100;0}} = 100 + \frac{4\,132 - 4\,096}{4\,138 - 4\,096} = 100,9\text{ °C} \end{aligned}$$

Ceci correspond à une erreur importante de 23,6 °C.

8.10 La meilleure approximation de la constante A est donnée simplement par :

$$A = \frac{\sum_{T_a=20\text{ °C}}^{T_a=30\text{ °C}} E_{Cu/CuNi}^{T;0}}{\sum_{T_a=20\text{ °C}}^{T_a=30\text{ °C}} T} = 39,694\ \mu\text{V/°C}$$

La tension différentielle du pont se calcule aisément et on a :

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{R + R_c}{R + R_c + R_1} - \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) V_g = \frac{R_1(R + R_c - R_2)}{(R + R_c + R_1)(R_2 + R_1)} V_g \\ &= \frac{R_1(R + R_c - R_2)}{(R + R_c + R_1)(R_2 + R_1)} V_g = \frac{R_1(R + R_0 + \alpha R_0 T - R_2)}{(R + R_0 + \alpha R_0 T + R_1)(R_2 + R_1)} V_g \end{aligned} \quad (8.10)$$

Pour effectuer la compensation de soudure froide, on doit avoir $V = E_{\text{Cu/CuNi}}^{T_a;0} \simeq AT$. Ceci impose que l'on choisisse $R_2 = R + R_0$. Au premier ordre en T , il vient alors :

$$V = \frac{R_1 \alpha R_0 T}{(\alpha R_0 T + R_1 + R_2)(R_2 + R_1)} V_g \simeq \frac{R_1 \alpha R_0 T}{(R_2 + R_1)^2} V_g \simeq AT \quad (8.11)$$

Avec $R = R_0 = 1000 \Omega$, on a $R_2 = 2000 \Omega$. R_1 est déterminée en résolvant :

$$R_1 \alpha R_0 V_g = A(R_2 + R_1)^2$$

La seule solution physiquement acceptable est $R_1 = 480,9 \text{ k}\Omega$.

8.11 Les résultats précédents permettent de calculer la tension V donnée par (8.10) et de comparer ces valeurs aux fem $E_{\text{Cu/CuNi}}^{T_a;0}$ données dans le tableau 8.2. L'erreur de compensation $\delta V = E_{\text{Cu/CuNi}}^{T_a;0} - V$ est reportée sur la courbe de la figure 8.10 :

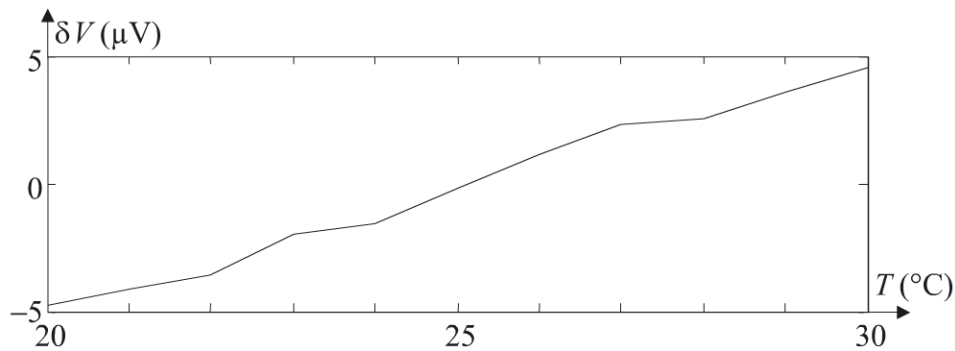


Figure 8.10 - Erreur de compensation en fonction de la température

Cette erreur est au maximum $\delta V_{\text{max}} = \pm 5 \mu\text{V}$.

La tension mesurée sera donc $V_{\text{mes},3} = E_{\text{A/B}}^{T;0} \pm 5 \mu\text{V}$. En utilisant la même méthode que précédemment l'erreur commise sur la mesure de la température $T = 124,5 \text{ }^\circ\text{C}$ est :

$$\delta T = \frac{\delta V_{\text{max}}}{E_{\text{NiCr/NiAl}}^{125;0} - E_{\text{NiCr/NiAl}}^{124;0}} = \frac{\pm 5}{5124 - 5084} = \pm 0,13 \text{ }^\circ\text{C}$$

Ce résultat est satisfaisant compte tenu des autres sources d'erreurs possibles.

8 • Principe du thermocouple et lois élémentaires

ENCART 8.1

Bien que fortement concurrencée par la thermométrie par sonde à résistance métallique dans une gamme de températures plus restreinte (-150 °C à 800 °C), la thermométrie par thermocouple reste l'apanage des basses et hautes températures.

La thermométrie par thermocouple, même si elle n'a pas connu de bouleversement récent, progresse encore grâce à l'électronique associée qui gagne en stabilité et en précision. De nombreuses variantes de présentation des thermocouples et de leur électronique de conditionnement en facilitent l'utilisation.

Les progrès réalisés en technologie micro-capteurs font que l'on maîtrise aujourd'hui la réalisation de micro-thermocouples que l'on associe en série pour plus de sensibilité. Les jonctions de mesure peuvent être liées thermiquement à un absorbeur du rayonnement infrarouge et les jonctions froides généralement au boîtier du capteur. On convertit alors un rayonnement infrarouge en tension électrique, réalisant ainsi une photopile.

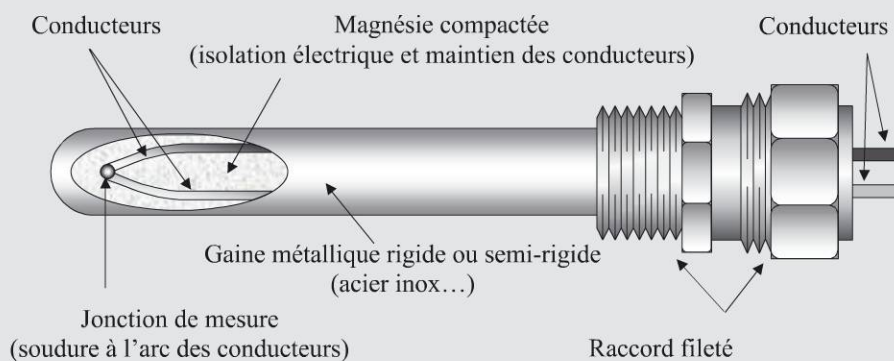


Figure 8.11 - Thermocouple chemisé à isolation minérale

PROBLÈME : Thermométrie par résistance – Linéarisation

Le rôle d'un capteur est de fournir un signal électrique (signal de mesure) à l'image de la grandeur physique à mesurer (mesurande). Une des grandes problématiques de cette conversion est la linéarité. Les non-linéarités peuvent provenir du capteur lui-même ou de son électronique de conditionnement. Quand la linéarisation (tentative de corriger les non-linéarités) est une des dernières étapes du processus d'élaboration du signal de mesure, on parle de « linéarisation aval ». Il est évident que l'on a tout intérêt à agir avant que le mal ne soit fait et à concevoir autour du capteur, un montage qui donne directement un signal de mesure le plus linéaire possible. On parle alors de « linéarisation amont ».

Ce problème présente une méthode classique de linéarisation des mesures de température par capteurs résistifs : la linéarisation parallèle. Par nature, les résistances métalliques et plus encore les thermistances sont assez fortement non linéaires. La méthode consiste à placer, en parallèle sur le capteur dont on veut améliorer la linéarité (résistance métalliques ou thermistance), une résistance fixe R_p . La valeur de cette dernière est déterminée par calcul en fonction de la température autour de laquelle on désire que la linéarité soit améliorée. Dans ce problème, les deux cas, résistance métallique et thermistance, sont traités, une méthode simplifiée du calcul de la résistance R_p est abordée, et enfin, la possibilité d'une linéarisation par une résistance R_s en série est envisagée.

Énoncé

I. Cas général

On considère un capteur de température résistif de résistance $R(T)$ à la température T (en Kelvin). Ce capteur est alimenté par un courant I et on recueille la tension V à ses bornes. La caractéristique de ce capteur est fortement non linéaire. Pour linéariser, on place une résistance fixe R_p en parallèle sur $R(T)$. La linéarisation au voisinage d'une température T_0 correspond mathématiquement à l'existence d'un point d'inflexion de la caractéristique de la résistance $R_d(T)$ du dipôle réalisé pour la température T_0 .

9 • Thermométrie par résistance – Linéarisation

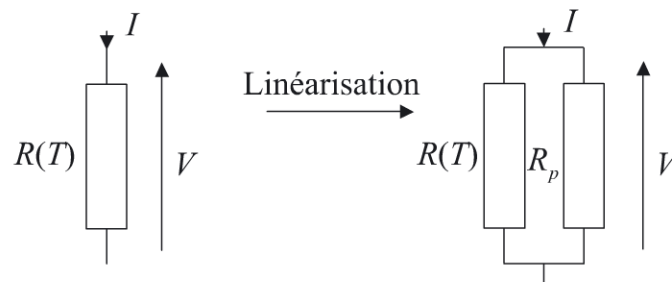


Figure 9.1 - Principe de la linéarisation parallèle

9.1 Donner l'expression de $R_d(T)$ et la condition de linéarisation pour la température T_0 . En déduire l'expression de la résistance R_p permettant cette linéarisation.

9.2 Soit $\alpha(T)$ le coefficient thermique du capteur :

$$\alpha(T) = \frac{1}{R(T)} \left. \frac{dR(T)}{dT} \right|_T$$

Calculer le coefficient thermique $\alpha_d(T)$ du dipôle linéarisé en fonction de $\alpha(T)$, $R(T)$ et R_p .

II. Résistance métallique

Dans le cas des résistances métalliques, on a avec une bonne approximation $R(t) = R_0(1 + At + Bt^2)$ où t est la température en $^{\circ}\text{C}$ et R_0 la résistance à 0°C .

On considère une résistance de nickel de $100\ \Omega$ à 0°C pour laquelle $A = 5,5 \cdot 10^{-3}/^{\circ}\text{C}$ et $B = 6,7 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}^2$.

On se limite à une étendue de mesure $E.M. = [0 ; 200]$ en degré Celsius.

9.3 Déterminer les valeurs de $R(t)$ sur l'étendue de mesure. On prendra un pas de 20°C . Effectuer une régression linéaire sur les valeurs de $R(t)$ et en déduire l'approximation linéaire de $R(t)$ donnée par $R_{lin}(t) = at + b$. Calculer les valeurs correspondantes $R_{lin}(t)$.

9.4 En déduire l'écart de linéarité ε , écart maximum sur l'étendue de mesure $E.M.$ entre $R_{lin}(t)$ et $R(t)$, puis l'erreur de linéarité err , écart de linéarité normalisé à l'excursion de $R(t)$.

9.5 On linéarise selon la méthode développée au I. Calculer la valeur de R_p pour qu'il y ait linéarisation autour de $t_0 = 100^{\circ}\text{C}$.

9.6 Déterminer, sur l'étendue de mesure, les valeurs de $R_d(t)$. Effectuer une régression linéaire pour obtenir l'approximation linéaire $R_{dlin}(t) = a't + b'$ de $R_d(t)$. Déterminer les valeurs de $R_{dlin}(t)$.

9.7 En déduire l'erreur de linéarité err' sur $R_d(t)$ et comparer ce résultat à l'erreur obtenue sans la linéarisation.

9.8 On considère maintenant une résistance de platine pour laquelle on a $A' = 3,9 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$ et $B' = -5,8 \cdot 10^{-7} / ^\circ\text{C}^2$. Conclure quant à la linéarisation par résistance parallèle dans ce cas.

III. Thermistance céramique

On considère maintenant une thermistance céramique pour laquelle on a le comportement caractéristique suivant :

$$R(T) = R_{réf} \exp B \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{réf}} \right]$$

où B est une constante positive, T la température absolue et $T_{réf}$ une température de référence. On rappelle qu'à la température de $t = 0 ^\circ\text{C}$ correspond la température absolue $T = 273,15 \text{ K}$.

9.9 À partir du résultat du I.1, déterminer en fonction de B , T_0 et $R(T_0)$ l'expression de la résistance R_p nécessaire pour linéariser autour d'une température T_0 .

9.10 B étant compris entre 3 000 et 5 000 K pour les thermistances céramiques, conclure quant à la linéarisation par résistance shunt des thermistances céramiques.

IV. Simplification du calcul de la résistance parallèle

Le calcul de la résistance R_p nécessite de connaître l'expression mathématique de l'évolution avec la température de la résistance présentée par le capteur de température et surtout les valeurs numériques des coefficients apparaissant dans cette expression.

L'utilisateur ne dispose pas toujours de ces données ou tout du moins, pas toujours de façon précise.

Il est possible de simplifier la méthode de calcul de la résistance parallèle tout en n'effectuant qu'un nombre limité de mesures de la caractéristique du capteur.

Une méthode consiste à n'effectuer que trois mesures. Celles-ci sont la température T_0 , température autour de laquelle on veut linéariser la caractéristique du capteur et les températures T_1 et T_2 , températures extrêmes de la plage de mesure sur laquelle on linéarise, c'est-à-dire l'étendue de mesure (T_0 étant évidemment le milieu de la plage de température définie par T_1 et T_2). À ces températures, le dipôle constitué par la résistance R_p placée en parallèle sur le capteur présente respectivement les résistances $R_d(T_0)$, $R_d(T_1)$ et $R_d(T_2)$.

9 • Thermométrie par résistance – Linéarisation

Pour effectuer de façon simplifiée le calcul de R_p , on considère que l'impédance du dipôle varie parfaitement linéairement avec la température. Ceci n'est pas une condition nécessaire, il suffit somme toute de considérer qu'après linéarisation, à la température T_0 , le dipôle présente une résistance égale à la moyenne des résistances qu'il présente aux températures extrêmes T_1 et T_2 .

9.11 Quelle relation entre $R_d(T_0)$, $R_d(T_1)$ et $R_d(T_2)$ s'impose en affirmant que la linéarisation est parfaite sur la plage $[T_1 ; T_2]$ centrée sur T_0 ?

9.12 En déduire l'expression de la résistance R_p . Pour application, on comparera la valeur numérique trouver selon cette méthode à celle trouvée au II.3.

V. Linéarisation série

9.13 On revient à la résistance de platine du II.6. Expliquer pourquoi il est possible de linéariser cette résistance en lui associant une résistance de nickel en série.

9.14 Calculer la résistance R'_0 à 0 °C de la résistance de platine que l'on peut parfaitement linéariser, par association série, avec la résistance de nickel donnée au 9.3.

Corrigé détaillé

I. Cas général

9.1 Les deux résistances étant en parallèle, on a $R_d(T) = R_p R(T) / (R_p + R(T))$. Pour linéariser autour de T_0 , il faut que la courbe $R_d(T)$ présente un point d'inflexion en T_0 , soit $d^2 R_d(T) / dT^2 \Big|_{T_0} = 0$.

Le calcul donne immédiatement :

$$R_p = \frac{2 \left(\frac{dR(T)}{dT} \right)^2 \Big|_{T_0}}{\frac{d^2 R(T)}{dT^2} \Big|_{T_0}} - R(T_0) \quad (9.1)$$

9.2 Le calcul du coefficient thermique du dipôle réalisé par l'association des deux résistances donne :

$$\alpha_d(T) = \frac{1}{R_d(T)} \frac{dR_d(T)}{dT} \Big|_T = \alpha(T) \frac{R_p}{R_p + R(T)} \quad (9.2)$$

La linéarisation a malheureusement comme autre effet de diminuer la sensibilité.

II. Résistance métallique

9.3 Sur l'étendue de mesure $E.M. = [0 ; 200]$, le calcul des valeurs de $R(t)$ est immédiat (voir tableau 9.1). Sur ces valeurs une régression linéaire au sens des moindres carrés donne une approximation $R_{lin}(t) = at + b$ avec $a = 0,68 \Omega/^\circ\text{C}$ et $b = 95,98 \Omega$. À partir de ces résultats, les valeurs de l'approximation linéaire $R_{lin}(t)$ de $R(t)$ peuvent être calculées (voir tableau 9.1)

Tableau 9.1 - Valeurs de $R(t)$ et de $R_{lin}(t)$ sur l'étendue de mesure $E.M.$

$t(^\circ\text{C})$	0	20	40	60	80	100
$R(t) (\Omega)$	100,00	111,27	123,07	135,41	148,29	161,70
$R_{lin}(t) (\Omega)$	95,98	109,66	123,34	137,02	150,70	164,38
$t(^\circ\text{C})$	120	140	160	180	200	
$R(t) (\Omega)$	175,65	190,13	205,15	220,71	236,80	
$R_{lin}(t) (\Omega)$	178,06	191,74	205,42	219,10	232,78	

9.4 Les résultats précédents permettent de calculer l'écart à la linéarité, par définition le plus grand écart, sur l'étendue de mesure, entre la caractéristique réelle du capteur et l'approximation linéaire. Ici, le maximum de l'écart se situe pour $t = 0^\circ\text{C}$ et $t = 200^\circ\text{C}$ et cet écart de linéarité vaut $\varepsilon = 4,02 \Omega$.

L'erreur de linéarité d'un capteur étant par définition l'écart de linéarité normalisé à l'excursion des valeurs prises par la grandeur de sortie du capteur sur l'étendue de mesure, on obtient immédiatement $err = \varepsilon / (R_{\max} - R_{\min}) = 2,94 \%$.

9.5 Selon (9.1), le calcul de la résistance R_p pour linéariser autour de $t_0 = 100^\circ\text{C}$ donne :

$$R_p = \frac{R_0(A + 2Bt_0)^2}{B} - R(t_0) = 536,59 \Omega \simeq 537 \Omega \quad (9.3)$$

9.6 On peut alors calculer les valeurs de résistance prises par le dipôle R_d en fonction de la température t (voir tableau 9.2). Une régression linéaire sur cet ensemble de valeurs permet d'obtenir l'approximation linéaire $R_{dlin}(t) = a't + b'$ de $R_d(t)$. Le calcul donne $a' = 0,40 \Omega/^\circ\text{C}$ et $b' = 84,15 \Omega$ ce qui permet de déterminer les valeurs de $R_{dlin}(t)$ (voir tableau 9.2).

Tableau 9.2- Valeurs de $R_d(t)$ et de $R_{dlin}(t)$ sur l'étendue de mesure $E.M.$

$t(^\circ\text{C})$	0	20	40	60	80	100
$R_d(t) (\Omega)$	84,29	92,16	100,11	108,13	116,18	124,26
$R_{dlin}(t) (\Omega)$	84,15	92,18	100,20	108,22	116,24	124,27
$t(^\circ\text{C})$	120	140	160	180	200	
$R_d(t) (\Omega)$	132,33	140,39	148,41	156,38	164,30	
$R_{dlin}(t) (\Omega)$	132,29	140,31	148,33	156,36	164,38	

9 • Thermométrie par résistance - Linéarisation

9.7 Ces résultats permettent de déterminer, comme à la question II.2, l'écart à la linéarité $\varepsilon' = 0,14 \Omega$ (pour $t = 0^\circ\text{C}$) ce qui entraîne une erreur de linéarité $err' = 0,17 \%$.

La linéarisation a permis de fortement diminuer la non-linéarité (d'un facteur 17). En revanche, cette même linéarisation a dégradé la sensibilité de la mesure puisque celle-ci passe de $S_c = a = 0,68 \Omega/^\circ\text{C}$ pour la résistance thermométrique seule à $S_{cd} = a' = 0,40 \Omega/^\circ\text{C}$ pour le dipôle. Les courbes des figures 9.2 et 9.3 illustrent la situation.

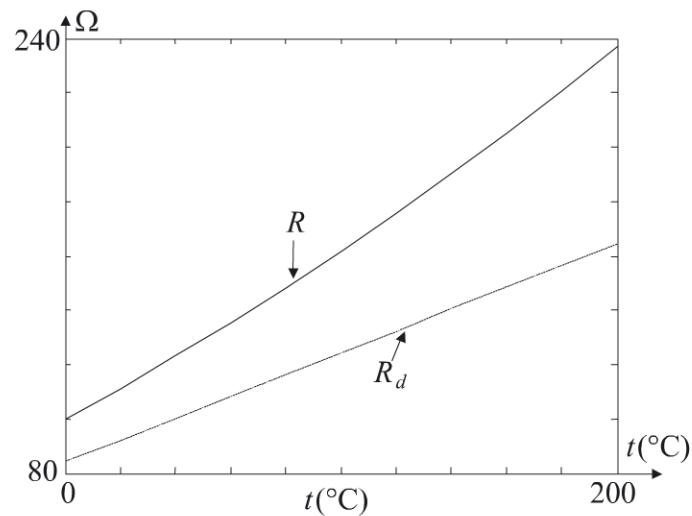


Figure 9.2 - Évolution de R et R_d avec la température

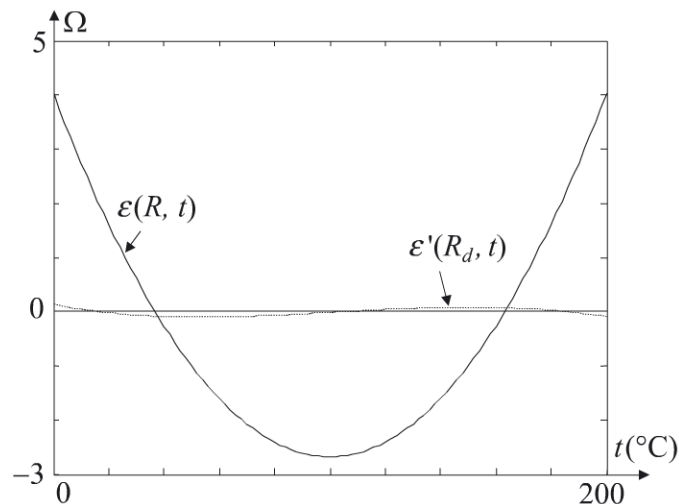


Figure 9.3 - Évolution de l'écart de linéarité de R et R_d avec la température

9.8 Pour une résistance de platine $B' < 0$ entraîne d'après (9.3) que la résistance R_p est négative. La linéarisation est donc impossible.

III. Thermistance céamique

9.9 Le calcul selon (9.1) donne pour l'expression de la résistance parallèle :

$$R_p = R(T_0) \frac{B - 2T_0}{B + 2T_0}$$

9.10 B étant compris entre 3 000 et 5 000 K, R_p reste positif pour $T < 1\,500$ K. La linéarisation parallèle des thermistances céamiques est donc possible pour ces températures.

IV. Simplification du calcul de la résistance parallèle

9.11 Comme la relation entre la température et la résistance présentée par le dipôle résultant de l'association parallèle de $R(T)$ et de la résistance R_p peut être considérée comme parfaitement linéaire, on a alors $R_d(T_0) = (R_d(T_1) + R_d(T_2))/2$.

9.12 Le développement du résultat précédent conduit assez simplement à l'expression de la résistance R_p en fonction des valeurs prises par $R(T)$.

$$R_p = \frac{R(T_0)R(T_1) + R(T_0)R(T_2) - 2R(T_1)R(T_2)}{R(T_1) + R(T_2) - 2R(T_0)} \quad (9.4)$$

Avec $t_1 = 0$ °C, $t_0 = 100$ °C et $t_2 = 200$ °C, (9.4) appliquée à la résistance de nickel du II donne :

$$R_p = R(t_0) \frac{R(t_1) + R(t_2) - 2R(t_1)R(t_2)}{R(t_1) + R(t_2) - 2R(t_0)} = 529,89 \, \Omega \simeq 530 \, \Omega$$

Le calcul exact donnait 537 Ω . La différence est très acceptable car tous calculs faits, la linéarisation avec cette valeur de résistance parallèle n'entraîne pas de variation significative de l'erreur de linéarité ou de la sensibilité par rapport à ce que l'on obtient par le calcul exact.

V. Linéarisation série

9.13 La question II.6 a montré que l'on ne pouvait pas linéariser une résistance de platine par la méthode de la résistance parallèle. On peut cependant améliorer la linéarité en associant à la résistance de platine, une résistance thermométrique dont la non-linéarité est opposée comme une résistance de nickel.

9.14 On a pour la résistance de nickel $R(t) = R_0(1 + At + Bt^2)$ avec $R_0 = 100 \, \Omega$, $A = 5,5 \cdot 10^{-3} / \text{°C}$ et $B = 6,7 \cdot 10^{-6} / \text{°C}^2$. De même, pour la résistance de platine on a $R'(t) = R'_0(1 + A't + B't^2)$ avec $A' = 3,9 \cdot 10^{-3} / \text{°C}$ et $B' = -5,8 \cdot 10^{-7} / \text{°C}^2$.

9 • Thermométrie par résistance - Linéarisation

L'association série des deux résistances constitue une résistance thermométrique métallique dont la résistance varie selon :

$$R(t) + R'(t) = (R_0 + R'_0) \left(1 + \frac{AR_0 + A'R'_0}{R_0 + R'_0} t + \frac{BR_0 + B'R'_0}{R_0 + R'_0} t^2 \right)$$

Pour que l'association série soit linéaire, il suffit que le coefficient en t^2 soit nul, soit $R'_0 = -R_0 B/B' \approx 1\,155\,\Omega$. La résistance ainsi constituée aura une caractéristique décrite par $R''(t) = R''_0(1 + A''t)$ avec $R''_0 = 1\,255,17\,\Omega$ et $A'' = 4,0 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$.

La valeur trouvée, $R'_0 = 1\,155\,\Omega$, n'est pas une valeur normalisée pour une résistance métallique. La valeur normalisée qui s'en approche le plus est $R'_0 = 1\,000\,\Omega$.

Si on considère une Pt1000, on a donc $R'(t) = R'_0(1 + A't + B't^2)$ avec $R'_0 = 1\,000\,\Omega$, $A' = 3,9 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ et $B' = -5,8 \cdot 10^{-7}/^\circ\text{C}^2$. Sur l'étendue de mesure $E.M. = [0; 200]$ l'approximation linéaire de cette résistance est $R'_{lin}(t) = a't + b'$ avec $a' = 3,78\,\Omega/^\circ\text{C}$ et $b' = 1\,003,48\,\Omega$. Ceci entraîne une erreur de linéarité de 0,3 %.

Associée en série avec une Ni100 pour laquelle on a $R(t) = R_0(1 + At + Bt^2)$ avec $R_0 = 100\,\Omega$, $A = 5,5 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ et $B = 6,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}^2$, on obtient une résistance thermométrique de caractéristique $R''(t) = R''_0(1 + A''t + B''t^2)$ avec $R''_0 = 1\,100\,\Omega$, $A'' = 4,1 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ et $B'' = 8,2 \cdot 10^{-8}/^\circ\text{C}^2$. L'approximation linéaire sur l'étendue de mesure de cette caractéristique donne $R''_{lin}(t) = a''t + b''$ avec $a'' = 4,47\,\Omega/^\circ\text{C}$ et $b'' = 1\,099,46\,\Omega$. Ceci entraîne une erreur de linéarité de 0,06 %. On a donc bien, comme le montre la courbe de la figure 9.4, une amélioration de la linéarité et une légère augmentation de la sensibilité qui passe de $3,78\,\Omega/^\circ\text{C}$ à $4,47\,\Omega/^\circ\text{C}$.

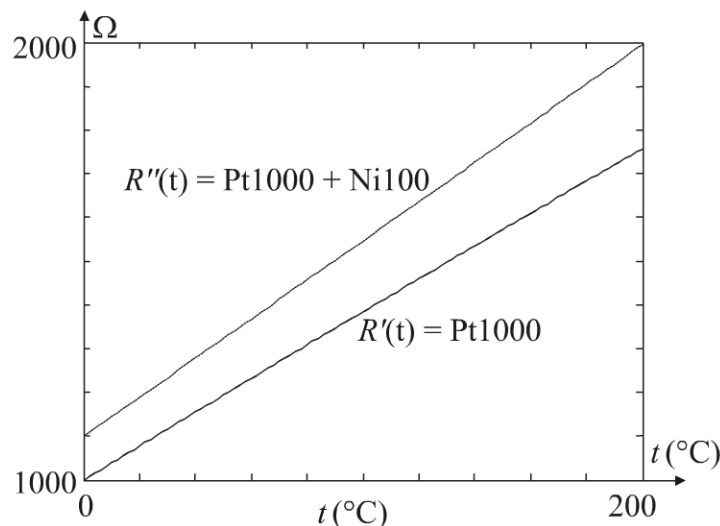


Figure 9.4 - Évolution de $R'(t) = \text{Pt}\,1\,000$ et $R''(t) = \text{Pt}\,1\,000 + \text{Ni}\,100$ avec la température

Cependant, cette amélioration se fait au détriment de l'intérêt majeur de l'utilisation du platine, à savoir fidélité et stabilité.

 ENCART 9.1

Les résistances thermométriques sont les capteurs de température les plus répandus tant dans le domaine industriel que dans l'électronique grand public. Leurs domaines d'applications couvrent une gamme de température s'étendant de -200 à $+800$ °C. En dehors de cette gamme, il devient nécessaire d'utiliser d'autres techniques comme la thermométrie par thermocouple.

Les résistances métalliques peuvent se présenter sous forme de composants simples (constitués de l'enroulement d'un fil métallique dans une enveloppe en verre ou en céramique), de composants à dépôt en couche (le métal est déposé en couche mince sur un substrat de céramique) ou sous forme de sondes de température constituées d'un composant simple inséré dans une gaine de protection en laiton, inox ou autre alliage et d'une connectique standardisée.

C'est le type de mesure à effectuer et les conditions d'utilisation qui fixent le type de sonde à utiliser. Selon que l'on désire mesurer la température de l'air dans une pièce à des fins domotiques ou que l'on cherche à mesurer la température d'un liquide corrosif chaud, il est bien évident que le choix se portera sur des types de sondes différents.



Figure 9.5 - Sondes Pt100 - a) Sonde avec tête de raccordement
 - b) Sonde de température ambiante - c) Sonde de contact à fixation par aimant
 - d) Sonde de contact souple à coller - e) Sonde de contact à fixation par œillet
 - f) Sonde de pénétration à visser (documentation Prosensor)

10

PROBLÈME : Système de pesée à jauges d'extensométrie

Les jauges d'extensométrie piézorésistives sont les transducteurs les plus utilisés dans les systèmes électroniques de pesée. Dans ces derniers, quelle que soit la géométrie utilisée, le principe de la mesure est le même. Sous l'action du poids de la masse à déterminer, un corps d'épreuve se déforme. Cette déformation est transmise à des jauges d'extensométrie piézorésistives, mécaniquement solidaire du corps d'épreuve car collées sur celui-ci, et dont les résistances varient en fonction de la déformation. Les jauges font partie d'un circuit électronique de conditionnement qui délivre un signal électrique fonction de la résistance de la jauge. En première approximation, les étapes suivantes de la conversion sont linéaires : poids → déformation du corps d'épreuve, déformation du corps d'épreuve → déformation de la jauge, déformation de la jauge → variation de sa résistance, variation de la résistance → signal électrique. Au total, on obtient donc un signal électrique proportionnel à la valeur de la masse.

À partir de ce principe de base, des variantes permettent d'améliorer la linéarité de la mesure ou de corriger la sensibilité de la mesure à la température, point faible des mesures utilisant des jauges d'extensométrie piézorésistives.

Énoncé

On réalise un système de pesée rapide, où en production, un opérateur vient accrocher son produit au système de pesée constitué d'une poutre encastrée en acier, équipée de jauges d'extensométrie et schématisée figure 10.1.

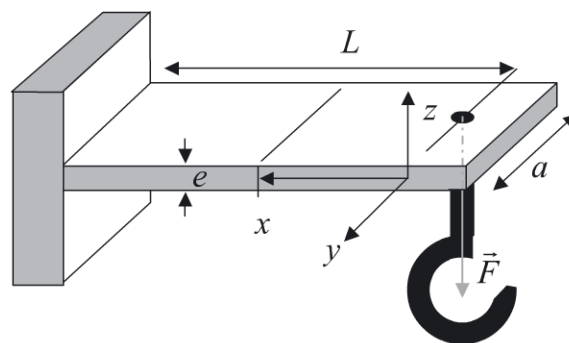


Figure 10.1 - Système de pesée

Le crochet, fixé sur la poutre et destiné à recevoir les produits dont on désire effectuer la pesée, est situé à la distance L de l'encastrement.

Les caractéristiques de la poutre et de l'acier sont données dans le tableau 10.1.

Tableau 10.1 - Caractéristiques de la poutre

Longueur utile	$L = 25 \text{ cm}$
Largeur	$a = 3 \text{ cm}$
Module d'Young	$E_0 = 2.10^{11} \text{ N.m}^{-2}$
Contrainte limite d'élasticité	$\sigma_l = 1,2.10^9 \text{ N.m}^{-2}$

On négligera l'effet du propre poids de la poutre et de celui du crochet.

En résistance des matériaux, on montre que sous l'action du poids \vec{P} de la masse m suspendue au crochet, la contrainte longitudinale à la surface de la poutre (dans la direction de sa longueur L) est donnée à la distance x du point d'attache du crochet par $\sigma = \pm eM_f/2I$ selon que l'on se trouve sur la face supérieure ou inférieure de la poutre. M_f représente le moment de flexion en x et I le moment quadratique de la section droite en x (perpendiculaire à la direction x) par rapport à son axe médian parallèle à la direction de la largeur a (direction y).

I. Principe de la mesure

10.1 Montrer que la contrainte en x à la surface de la poutre s'écrit :

$$\sigma(x) = \pm 6xP/ae^2$$

10.2 On souhaite peser des masses allant jusqu'à une valeur maximale $m_{\max} = 100 \text{ kg}$. Déterminer l'épaisseur e minimale à donner à la poutre en se réservant un coefficient de sécurité de 2. On donne $g = 9,81 \text{ N/kg}$.

10.3 Pour la valeur de e trouvée précédemment, donner l'expression des déformations longitudinales $\varepsilon_{//,+}(x)$ et $\varepsilon_{//,-}(x)$ sur les faces supérieure et inférieure de la poutre en fonction de σ_l , E_0 , m , m_{\max} , x et L .

En calculer la valeur pour $x = L/2$ et m_{\max} .

10.4 On colle quatre jauges piézorésistives identiques selon la direction longitudinale à la cote $x = L/2$, deux sur la face supérieure (elles constituent les résistances R_1 et R_3), deux sur la face inférieure (elles constituent les résistances R_2 et R_4).

Ces quatre jauges sont montées en mode push-pull dans un pont de Wheatstone alimenté par une source de tension continue $V_g = 5 \text{ V}$ et d'impédance interne nulle.

10 • Système de pesée à jauges d'extensométrie

Placer ces résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 sur le schéma du pont et donner leur expression en fonction de la déformation sachant qu'au repos elles sont de résistance R_0 et que leur coefficient de jauge est K_0 . On posera $\varepsilon_{//,+}(L/2,m) = \varepsilon_0$ et on supposera que le collage des jauges est parfait et que l'on peut totalement négliger l'effet d'épaisseur des jauges.

10.5 Donner l'expression de la tension de mesure différentielle V_{mes} en fonction de K_0, ε_0 et V_g . Calculer V_{mes} pour $m = m_{max}$. On donne $K_0 = 2$.

10.6 Calculer la sensibilité S_0 de la mesure.

II. Dérive thermique

10.7 On s'intéresse maintenant à l'effet de la température en tant que grandeur d'influence. On considère une variation ΔT par rapport à la température T_0 , dite température de référence, pour laquelle ont été effectués les calculs précédents.

L'effet de la température sur une jauge se traduit par une évolution de son facteur de jauge selon $K = K_0(1 + \alpha_K \Delta T)$. De même, la température modifie le module d'Young du matériau de la poutre selon $E = E_0(1 + \alpha_E \Delta T)$ et on note λ le coefficient de dilatation linéique de ce matériau.

Donner la nouvelle expression de la sensibilité S .

10.8 En donner l'approximation au premier ordre en ΔT et la mettre sous la forme $S = S_0(1 + \alpha_S \Delta T)$. Calculer la valeur de α_S sachant que $\alpha_K = 10^{-4} / ^\circ\text{C}$, $\alpha_E = -2,6 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$ et $\lambda = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

10.9 La température évolue autour de la valeur de référence de $\Delta T = \pm 25 ^\circ\text{C}$. Quelle est l'erreur sur la valeur de la force mesurée résultant de la variation de la température ?

10.10 On compense la dérive thermique de la sensibilité au moyen d'une résistance métallique $R_n(T)$ placée en série avec l'alimentation du pont.

Donner l'expression de la tension de mesure en fonction de $K, R, R_n(T)$ et ε où R est la nouvelle valeur de la résistance des jauges au repos et ε la nouvelle déformation.

10.11 En considérant l'expression de ε_0 , donner l'expression de ε au premier ordre en ΔT et la mettre sous la forme $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \alpha_\varepsilon \Delta T)$.

10.12 La résistance au repos des jauges varie au premier ordre en :

$$R = R_0(1 + \alpha_R \Delta T)$$

avec $R_0 = 1\,000\ \Omega$ et $\alpha_R = 10^{-4}\ /^\circ\text{C}$. La résistance de compensation $R_n(T)$ est une résistance de nickel telle que $R_n(T) = R_{n0}(1 + \alpha_n\Delta T)$ avec $\alpha_n = 6 \cdot 10^{-3}\ /^\circ\text{C}$.

Calculer l'expression de V_{mes} au premier ordre en ΔT .

10.13 En déduire la valeur à donner à R_{n0} pour supprimer la dérive thermique de V_{mes} .

10.14 Donner la nouvelle expression de la sensibilité S' . L'écrire en fonction de la sensibilité S_0 .

III. Défaut de réalisation

10.15 Lors du collage des jauges, une erreur de δL est faite sur la position de la jauge de résistance R_1 , celle-ci se trouvant collée 1 mm trop près du crochet. Évaluer, à la température de référence, l'erreur relative entraînée sur la mesure.

10.16 Montrer que l'on peut résoudre le problème précédent en adoptant une poutre de forme triangulaire, la déformation est alors identique sur toute la longueur.

Corrigé détaillé

I. Principe de la mesure

10.1 À la surface de la poutre, on a $z = \pm e/2$ selon que l'on se trouve sur la face supérieure ou sur la face inférieure. Le moment quadratique I est par définition :

$$I = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-e/2}^{-e/2} z^2 dy dz = \frac{ae^3}{12}$$

Le moment de flexion en x est simplement donné par la somme du moment d'encastrement PL et du moment de la force de réaction sur le bâti calculé à la côte x , soit $P(x - L)$. Il vient donc $M_f(x) = Px$ pour $x \leq L$.

On en déduit la contrainte σ à la surface de la poutre :

$$\sigma(x) = \pm e M_f / 2I = \pm 6xP / ae^2$$

10.2 La contrainte calculée précédemment ne doit pas dépasser, compte tenu du facteur de sécurité de 2, $\sigma_{\max} = \sigma_l / 2$. Cette contrainte est maximale à l'encastrement soit en $x = L$. Il vient donc :

$$e_{\min} = \sqrt{\frac{12Lm_{\max}g}{a\sigma_l}} = 9\text{ mm} \tag{10.1}$$

10 • Système de pesée à jauges d'extensométrie

10.3 Les déformations longitudinales sont données à la cote x par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{//,+}(x) = \frac{\sigma_+}{E_0} = \frac{6xmg}{ae^2E_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{xm\sigma_l}{Lm_{\max}E_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{//,-}(x) = \frac{\sigma_-}{E_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{xm\sigma_l}{Lm_{\max}E_0} \quad (10.2)$$

Pour $x = L/2$ et $m = m_{\max}$, il vient :

$$\varepsilon_{//,+}(L/2, m_{\max}) = \frac{\sigma_l}{4E_0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{//,-}(L/2, m_{\max}) = -\frac{\sigma_l}{4E_0} = -1,5 \cdot 10^{-3}$$

10.4 Pour avoir un signal évoluant avec la contrainte appliquée, les jauges doivent être montées en pont (voir figure 10.2).

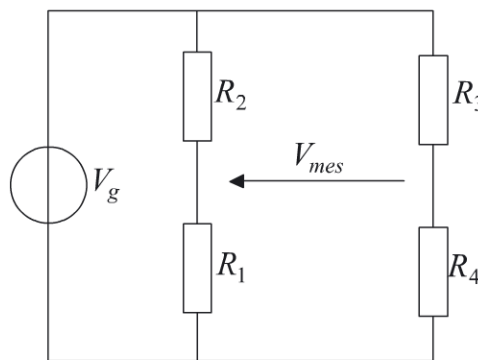


Figure 10.2 - Montage de conditionnement

Le collage parfait d'une jauge lui permet de suivre les déformations de la poutre. La variation relative de la longueur l de la jauge est donc donnée selon le cas par :

$$\Delta l/l = \varepsilon_{//,\pm}(L/2, m) = \pm \varepsilon_0$$

Comme les quatre jauges sont de coefficient de jauge K_0 et de résistance au repos R_0 , sous contrainte on a :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0(1 + K_0\varepsilon_0) & R_3 &= R_0(1 + K_0\varepsilon_0) \\ R_2 &= R_0(1 - K_0\varepsilon_0) & R_4 &= R_0(1 - K_0\varepsilon_0) \end{aligned} \quad (10.3)$$

10.5 La tension de mesure différentielle V_{mes} est donnée d'après (10.2) et (10.3) par :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_3} \right) V_g = \frac{R_1 - R_4}{R_1 + R_4} V_g = K_0\varepsilon_0 V_g = K_0 \frac{\sigma_l}{4E_0} \frac{m}{m_{\max}} V_g \quad (10.4)$$

La mesure varie linéairement avec la déformation, donc avec la force appliquée. Pour $m = m_{\max}$, on obtient $V_{mes} = 15$ mV.

10.6 D'après (10.4), la sensibilité de la mesure est donnée par :

$$S_0 = \frac{V_{mes}}{m} = K_0 \frac{\sigma_l}{4E_0 m_{\max}} V_g = 150 \mu\text{V/kg} \quad (10.5)$$

II. Dérive thermique

10.7 La variation de température ΔT entraîne des variations du facteur de jauge K_0 , de la longueur L de la poutre, de son épaisseur e , de sa largeur a et de son module d'Young E_0 .

En réintroduisant l'épaisseur e tirée de (10.1) dans l'expression de la sensibilité, il vient :

$$S_0 = K_0 \frac{3Lg}{ae^2 E_0} V_g$$

En tenant compte de l'effet de la variation de température, la sensibilité s'écrit alors :

$$S = S_0 \frac{(1 + \alpha_K \Delta T)(1 + \lambda \Delta T)}{(1 + \lambda \Delta T)(1 + \lambda \Delta T)^2(1 + \alpha_E \Delta T)} = S_0 \frac{(1 + \alpha_K \Delta T)}{(1 + \lambda \Delta T)^2(1 + \alpha_E \Delta T)}$$

10.8 Au premier ordre en ΔT , il vient :

$$S \approx S_0 (1 + (\alpha_K - 2\lambda - \alpha_E)\Delta T) = S_0 (1 + \alpha_S \Delta T)$$

Des données numériques, on tire $\alpha_S = 3,4 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$.

10.9 Pour une évolution de température de $\Delta T = \pm 25 ^\circ\text{C}$, l'erreur engendrée sur la mesure de la masse est :

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \alpha_S \Delta T = \pm 0,85 \%$$

10.10 On a alors pour la tension de mesure :

$$V_{mes} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_4 + R_3) + R_n(T)(R_1 + R_2 + R_4 + R_3)} V_g = \frac{KR\varepsilon}{R + R_n(T)} V_g \quad (10.6)$$

10.11 De (10.2), on tire maintenant :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{3mgL(1 + \lambda \Delta T)}{a(1 + \lambda \Delta T)e^2(1 + \lambda \Delta T)^2 E_0(1 + \alpha_E \Delta T)} = \varepsilon_0 \frac{1}{(1 + \lambda \Delta T)^2(1 + \alpha_E \Delta T)} \\ &\approx \varepsilon_0 (1 - (2\lambda + \alpha_E)\Delta T) = \varepsilon_0 (1 + \alpha_\varepsilon \Delta T) \end{aligned}$$

L'application numérique donne $\alpha_\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-4} ^\circ\text{C}^{-1}$.

10.12 La tension de mesure s'écrit alors :

$$V_{mes} = \frac{KR\varepsilon}{R + R_n(T)} V_g = \frac{K_0(1 + \alpha_K \Delta T)R_0(1 + \alpha_R \Delta T)\varepsilon_0(1 + \alpha_\varepsilon \Delta T)}{R_0(1 + \alpha_R \Delta T) + R_{n0}(1 + \alpha_n \Delta T)} V_g$$

10 • Système de pesée à jauges d'extensométrie

Soit en ne conservant que le premier ordre en ΔT puisque ε est donné au premier ordre :

$$V_{mes} \simeq \frac{K_0 R_0 \varepsilon_0}{R_0 + R_{n0}} V_g \left[1 + \left(\alpha_K + \alpha_\varepsilon + \frac{R_{n0}}{R_0 + R_{n0}} (\alpha_R - \alpha_n) \right) \Delta T \right]$$

10.13 Pour supprimer, au premier ordre en ΔT , la dérive thermique de la tension de mesure, il suffit que $\alpha_K + \alpha_\varepsilon + (R_{n0}/(R_0 + R_{n0})) (\alpha_R - \alpha_n) = 0$, soit :

$$R_{n0} = \frac{\alpha_K + \alpha_\varepsilon}{\alpha_n - (\alpha_K + \alpha_\varepsilon + \alpha_R)} R_0 = 61,15 \Omega \quad (10.7)$$

Pour que la compensation de la dérive thermique soit possible, il est nécessaire que α_n soit suffisamment grand ($\alpha_n > \alpha_K + \alpha_\varepsilon + \alpha_R$) de façon à trouver une valeur R_{n0} positive.

10.14 Compte tenu de (10.7), il vient alors :

$$S' \simeq S'_0 = S_0 \frac{R_0}{R_0 + R_{n0}} = 0,94 S_0 = 141 \mu\text{V/kg}$$

La sensibilité est peu affectée par la correction de température apportée (voir (10.5)).

Pour une évolution de température de $\Delta T = \pm 25^\circ\text{C}$, l'erreur résiduelle $(S' - S'_0)/S'_0$ engendrée par l'évolution de la température est donnée par la courbe de la figure 10.3. Cette erreur ne dépasse pas 0,1 %.

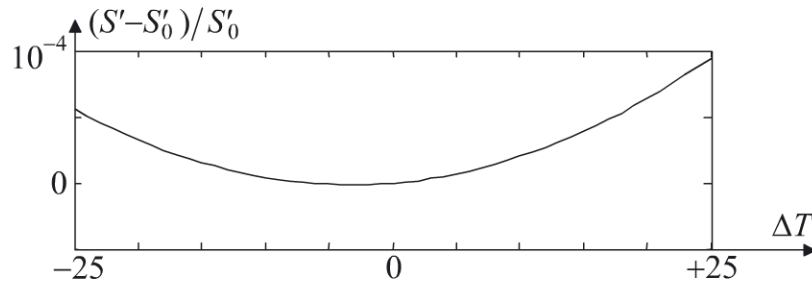


Figure 10.3 - Erreur résiduelle due à la dérive thermique après correction

III. Défaut de réalisation

10.15 À la température de référence la tension de mesure est donnée par (10.6) soit :

$$V_{mes} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_4 + R_3) + R_{n0}(R_1 + R_2 + R_4 + R_3)} V_g \quad (10.8)$$

Les résistances des jauges correctement collées sont données par (10.3), soit :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0(1 + K_0 \varepsilon'_0) & R_3 &= R_0(1 + K_0 \varepsilon_0) \\ R_2 &= R_0(1 - K_0 \varepsilon_0) & R_4 &= R_0(1 - K_0 \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (10.9)$$

Il faut recalculer la déformation ε'_0 subie par la jauge de résistance R_1 . À partir de (10.2), on tire en $x = L/2 - \delta L$:

$$\varepsilon'_0 = \frac{6mg}{ae^2E_0} \left(\frac{L}{2} - \delta L \right) = \varepsilon_0 \left(1 - 2\frac{\delta L}{L} \right) = \varepsilon_0 (1 + \beta)$$

En reportant dans (10.9) et (10.8), on obtient au premier ordre en β :

$$\begin{aligned} V_{mes} &\simeq \frac{K_0R_0\varepsilon_0}{(R_0 + Rn_0)} V_g \left(1 + \frac{\beta(R_0 + Rn_0) - \beta K_0R_0\varepsilon_0}{4(R_0 + Rn_0)} \right) \\ &\simeq \frac{K_0R_0\varepsilon_0}{(R_0 + Rn_0)} V_g \left(1 + \frac{\beta}{4} \right) = \frac{K_0R_0\varepsilon_0}{(R_0 + Rn_0)} V_g \left(1 - \frac{\delta L}{2L} \right) \end{aligned}$$

Calcul fait, l'erreur relative est de $-\delta L/2L = -0,2 \%$.

10.16 Considérons une poutre triangulaire dont on élargit l'extrémité de façon à ce que la poutre puisse résister à l'effort tranchant et que l'on puisse fixer le crochet (voir figure 10.4).

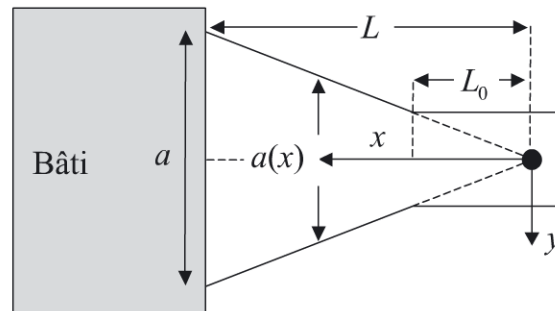


Figure 10.4 - Poutre triangulaire (vue de dessus)

On a toujours $M_f(x) = Px$. En revanche, l'expression du moment d'inertie I change car la largeur $a(x)$ est variable et s'écrit tant que $x > L_0$: $a(x) = ax/L$.

Il vient alors pour l'expression de la contrainte à la surface de la poutre :

$$\sigma(x) = \pm eM_f/2I = \pm \frac{e}{2} \frac{Px}{a(x)e^3/12} = \frac{6PL}{2ae^2}$$

Tant que $x > L_0$, la contrainte et par conséquent la mesure de la masse m accrochée sont indépendantes de la côte x où ont été collées les jauges.

ENCART 10.1

Pour un problème donné, les deux principaux critères du choix des jauges d'extensométrie sont le matériau constitutif des jauges et la géométrie du problème. Pour cette dernière, le choix est directement lié au mesurande (voir figure 10.5). Le choix du métal est lui, lié à divers critères tels que le domaine de température d'utilisation, la dilatation du corps d'épreuve, la variation du facteur de jauge avec la température ou encore la limite élastique du métal utilisé.

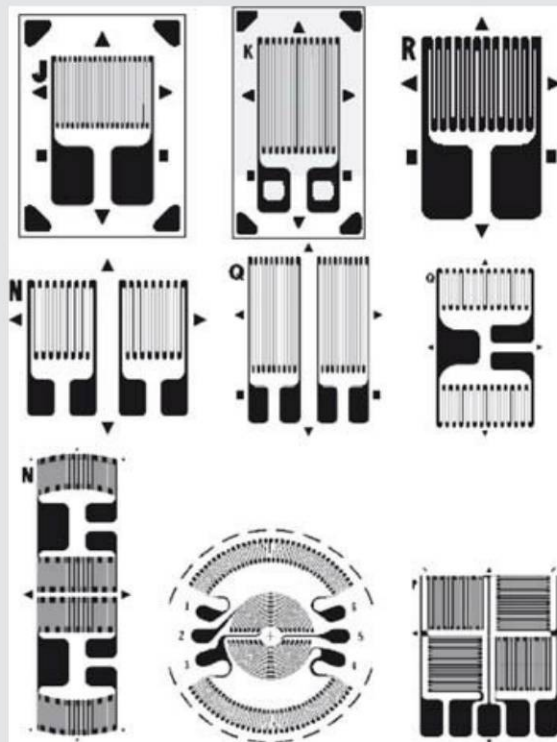


Figure 10.5 - Différentes formes de jauge d'extensométrie (documentation Vishay)

PROBLÈME :

Photorésistance – LDR : fonctionnement et utilisation pour le centrage d'un ruban défilant

Les photorésistances ou LDR (*Light Dependant Resistor*) sont des capteurs optiques de faible coût dont la résistance diminue lorsqu'elles sont éclairées. La résistance peut passer de quelque $10\text{ M}\Omega$ dans l'obscurité à quelque $100\ \Omega$ en pleine lumière. Ces capteurs présentent une très bonne sensibilité mais une mauvaise bande passante. Ce type de capteur supporte un courant important et contrairement aux photodiodes et phototransistors, les photorésistances sont non-polarisées. Les LDR sont très utilisées dans les systèmes où on désire, à partir d'un seuil, déclencher une action, par exemple la commande d'un relais, directement par le courant traversant le capteur. Ce procédé simplifie grandement l'électronique. C'est le cas par exemple des systèmes d'éclairage à détection crépusculaire où l'arrivée de l'obscurité, augmentant la résistance de la LDR en diminue le courant, refermant un relais jusqu'ici ouvert et permettant l'allumage du système d'éclairage.

Ces composants sont réalisés essentiellement à partir de sulfure, tellure ou sélénium de cadmium ou de plomb. Leurs réponses spectrales peuvent être relativement étroites et permettent de couvrir le domaine du proche ultraviolet à l'extrémité rouge du spectre visible (de 30 à 750 nm).

L'intensité lumineuse mesurée peut être le mesurande primaire ou un mesurande secondaire comme dans ce problème où le mesurande primaire est le déplacement d'un objet opaque devant la LDR éclairée.

Énoncé

I. Étude de la LDR

On considère une plaquette de matériau semiconducteur extrinsèque de type N dont le niveau énergétique du dopant se trouve dans la bande interdite (voir figure 11.2).

11 • Photorésistance – LDR : fonctionnement et utilisation ...

Deux faces en regard sont métallisées et on applique entre elles une différence de potentiel V comme le présente la figure 11.1. La plaquette semiconductrice est maintenue dans l'obscurité.

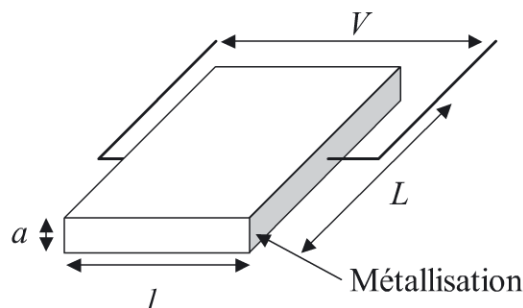


Figure 11.1- Schéma de principe de la plaquette semiconductrice dans l'obscurité

La bande interdite du semiconducteur intrinsèque est supposée suffisamment importante pour que l'on puisse négliger totalement tout phénomène de création de paires électron-trou propres au matériau intrinsèque. Le matériau est extrinsèque de type N, dopé par des atomes donneurs en concentration N . En moyenne, chaque atome donneur est susceptible de libérer un électron.

Le niveau énergétique du dopant se trouve dans la bande interdite à un niveau en dessous du bas de la bande de conduction du matériau intrinsèque comme schématisé figure 11.2.

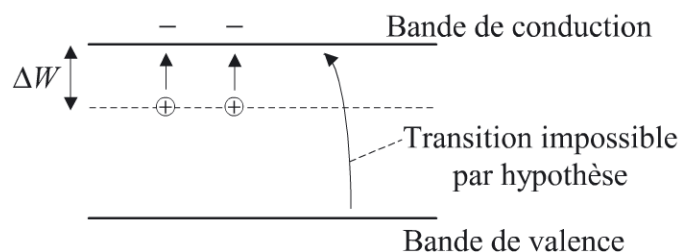


Figure 11.2- Structure de bande du semiconducteur dans l'obscurité

Soient $n(t)$ la densité d'atomes donneurs ionisés, c et r les coefficients de proportionnalité liés respectivement à la création et à la recombinaison d'électrons.

11.1 Montrer, en explicitant le raisonnement, que l'évolution de la densité d'électrons libres ici égale à la densité $n(t)$ d'atomes donneurs ionisés est régie par l'équation :

$$\frac{dn(t)}{dt} = c(N - n(t)) - rn^2(t) \quad (11.1)$$

11.2 En déduire l'expression de cette densité en régime permanent.

11.3 En déduire la conductivité γ du matériau. On notera μ la mobilité des électrons et e la charge de l'électron.

11.4 Établir l'expression du courant d'obscurité I_{obs} en fonction de la différence de potentiel V , de n , e , μ et des dimensions de la plaquette.

11.5 En déduire l'expression de la résistance R_{obs} de la plaquette dans l'obscurité. On suppose maintenant que la plaquette semiconductrice est éclairée par des photons d'énergie $h\nu > \Delta W$. Ces derniers ionisent les atomes donneurs, libérant une densité d'électrons par unité de temps n_{phot} qui s'ajoute à celle créée par activation thermique.

Ce mécanisme peut être résumé par le schéma de la figure 11.3.

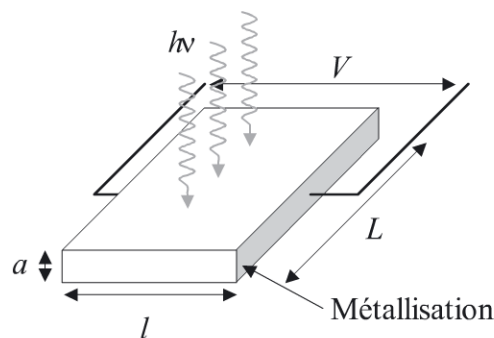


Figure 11.3 - La plaquette semiconductrice éclairée

11.6 Établir l'équation régissant l'évolution temporelle de la densité totale d'électrons libres $n_{tot}(t)$ par création et recombinaison (voir figure 11.4).

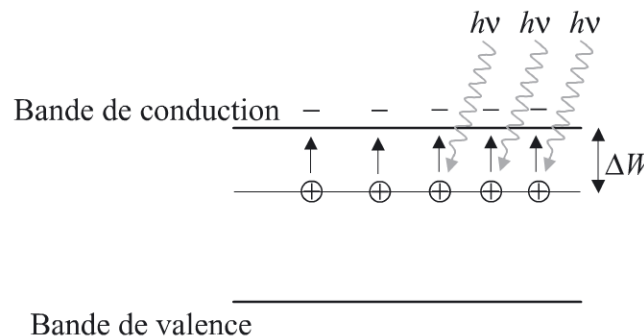


Figure 11.4 - Structure de bande du semiconducteur éclairé

11.7 On suppose la bande interdite du matériau intrinsèque suffisamment grande et l'éclairage suffisant pour que la densité de photoélectrons soit nettement supérieure à la densité d'électrons créés par activation thermique. Montrer qu'en régime permanent on a :

$$n_{tot} \simeq (n_{phot}/r)^{1/2} \quad (11.2)$$

11.8 On suppose que le rayonnement incident qui couvre complètement la plaquette est monochromatique de fréquence ν et de puissance $\phi = lLE$, E étant

11 • Photorésistance – LDR : fonctionnement et utilisation ...

l'éclairement correspondant. On note R le coefficient de réflexion en énergie de la plaquette, η le rendement quantique, c'est-à-dire le nombre d'électrons libérés par photon incident absorbé et h la constante de Planck.

Donner la densité n_{phot} de photoélectrons créés par unité de temps.

11.9 En déduire la densité totale n_{tot} d'électrons libres.

11.10 En déduire l'expression du photocourant I_{phot} en fonction de V , e , μ , r , η , ν , E , R et des dimensions géométriques de la plaquette. Conclure quant à la relation courant-tension de ce composant.

11.11 Calculer la résistance R_{phot} de la plaquette sous éclairement. Conclure quant à son évolution avec le flux lumineux incident.

11.12 Commenter la dépendance du photocourant en fonction des caractéristiques géométriques de la plaquette.

11.13 Donner le schéma équivalent global de la résistance R de la plaquette.

11.14 Dans la pratique le courant d'obscurité est souvent négligeable par rapport au photocourant. Dans ce cas, à quoi se réduit le schéma équivalent global de la résistance R de la plaquette.

II. Montage push-pull

Soit la LDR de la figure 11.5 (décrite physiquement précédemment) dont les électrodes sont supposées être constituées d'un métal parfait. On admet que l'on peut totalement négliger le courant d'obscurité dans ce qui suit. Les données du constructeur permettent d'obtenir R (@ 10 lux) = 100 k Ω , R (@ 1000 lux) = 1 k Ω et $L = 5$ cm.

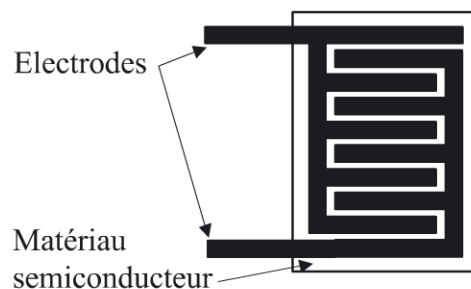


Figure 11.5 - Schéma de la LDR

Deux LDR identiques sont utilisées pour contrôler le déplacement latéral d'un ruban en défilement afin de l'asservir. Le tout est éclairé en lumière parallèle, perpendiculairement aux LDR par un rayonnement monochromatique d'éclairement $E = 1000$ lux. Le schéma de la figure 11.6 résume la situation.

On suppose que lorsque le positionnement latéral du ruban est correct, ce dernier couvre exactement la moitié des surfaces actives des LDR.

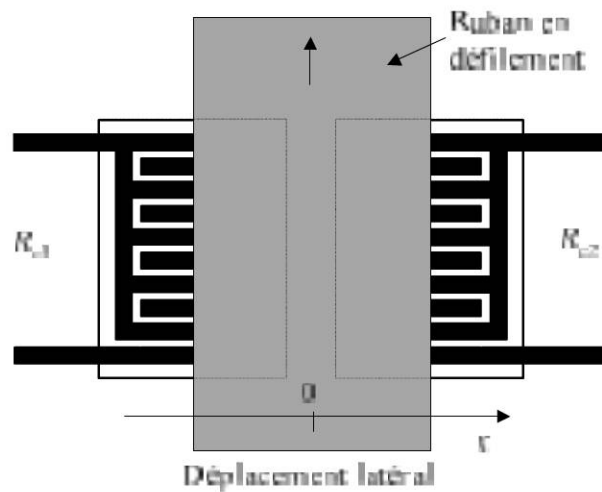


Figure 11.6 - Principe de la mesure

11.15 Quelle est alors, compte tenu des approximations faites, la valeur R_{c0} des résistances des deux LDR ?

11.16 On considère que les LDR sont constituées de $N = 9$ brins longitudinaux (parallèles à l'axe x) et que la contribution des brins transversaux est négligeable. Les N brins longitudinaux constituent donc la longueur totale L . Compte tenu de cette simplification, si le ruban se déplace latéralement de x , quelles sont les expressions des deux résistances $R_{c1}(x)$ et $R_{c2}(x)$ présentées par les LDR ? Les exprimer en fonction de R_{c0} , x et L .

11.17 Les deux LDR sont montées dans un pont de Wheatstone avec deux résistances fixes selon le schéma de la figure 11.7. Quelle est l'expression de la tension de mesure V_{mes} ?

11.18 En déduire la sensibilité S_{mes} de la mesure. On donne $V_g = 2$ V.

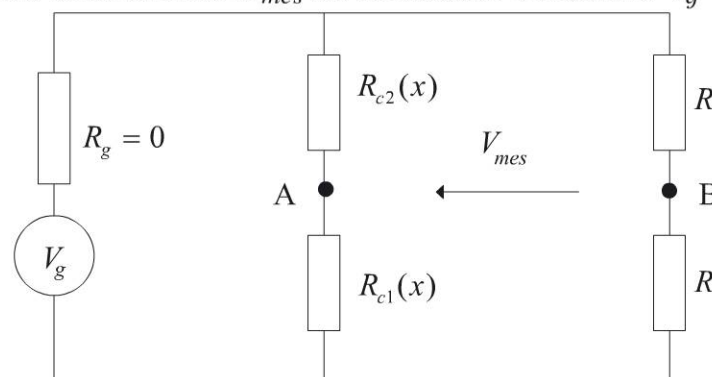


Figure 11.7 - Circuit de conditionnement

Corrigé détaillé

I. Étude de la LDR

11.1 Le matériau intrinsèque n'intervenant pas, la densité d'électrons libres créés par unité de temps est proportionnelle à la densité d'atomes donneurs non encore ionisés et s'écrit $c(N - n(t))$. La densité d'électrons libres se recombinant par unité de temps est proportionnelle à la densité $n(t)$ d'électrons libres et proportionnelle à la densité de sites accepteurs. Comme le matériau intrinsèque n'intervient pas, la densité de sites accepteurs est égale à la densité d'électrons libres, soit $n(t)$. La densité d'électrons libres se recombinant par unité de temps est donc donnée par $rn^2(t)$.

La cinétique de la densité d'électrons libres est donc régie par l'équation :

$$\frac{dn(t)}{dt} = c(N - n(t)) - rn(t)^2 \quad (11.3)$$

11.2 En régime permanent, on obtient $rn^2 + cn - cN = 0$ dont la seule solution physique acceptable est :

$$n = \frac{c}{2r} \left(\sqrt{1 + \frac{4rN}{c}} - 1 \right) \quad (11.4)$$

11.3 Les seuls porteurs de charges mobiles étant les électrons libres, la conductivité du matériau est donnée par :

$$\gamma = \mu ne = \mu e \frac{c}{2r} \left(\sqrt{1 + \frac{4rN}{c}} - 1 \right) \quad (11.5)$$

11.4 Le courant d'obscurité I_{obs} est donné par le flux de la densité de courant elle-même reliée au champ électrique par la loi d'Ohm locale $j_{obs} = \gamma E$.

$$I_{obs} = \int \vec{j}_{obs} \cdot d\vec{S} = j_{obs} aL = \gamma EaL$$

Soit encore en exprimant la relation entre le champ électrique et son potentiel :

$$I_{obs} = \gamma EaL = \gamma \frac{V}{l} aL = \mu ne \frac{aL}{l} V \quad (11.6)$$

11.5 D'après (11.6), la plaquette présente donc dans l'obscurité une résistance donnée par :

$$R_{obs} = \frac{l}{\mu ne aL} \quad (11.7)$$

11.6 Le raisonnement est identique à celui de la question I.1. Il faut simplement ajouter la densité n_{phot} de photoélectrons créés par unité de temps.

$$\frac{dn_{tot}(t)}{dt} = n_{phot} + c(N - n_{tot}(t)) - rn_{tot}^2(t) \quad (11.8)$$

11.7 Si on peut considérer que $n_{phot} \gg c(N - n_{tot}(t))$, en régime permanent (11.8) donne :

$$n_{tot} \simeq \left(\frac{n_{phot}}{r}\right)^{1/2} \quad (11.9)$$

11.8 Le nombre de photons incidents sur la plaquette par unité de temps est $\phi/h\nu = EIL/h\nu$. Le nombre de photons pénétrant dans la plaquette par unité de temps est $(1 - R)EIL/h\nu$. Le nombre de photoélectrons libérés par unité de temps est donc $\eta(1 - R)EIL/h\nu$. Ceci conduit à la densité n_{phot} de photoélectrons libérés par unité de temps :

$$n_{phot} = \frac{1}{aL} \frac{\eta(1 - R)}{h\nu} EIL = \frac{1}{a} \frac{\eta(1 - R)}{h\nu} E \quad (11.10)$$

11.9 La densité totale d'électrons libres s'en déduit et on a d'après (11.9) et (11.10) :

$$n_{tot} \simeq \left(\frac{1}{a} \frac{\eta(1 - R)}{rh\nu} E\right)^{1/2} \quad (11.11)$$

11.10 Le photocourant créé par l'éclairement est alors donné par :

$$I_{phot} = jaL = \gamma \frac{V}{l} aL = \mu n_{tot} e \frac{aL}{l} V = \mu e \left(\frac{aL^2}{l^2} \frac{\eta(1 - R)}{rh\nu} E\right)^{1/2} V \quad (11.12)$$

Le photocourant est proportionnel à la différence de potentiel. On a un comportement purement ohmique.

11.11 La résistance correspondante de la plaquette est :

$$R_{phot} = \frac{1}{\mu e} \left(\frac{l^2}{aL^2} \frac{rh\nu}{\eta(1 - R)} \frac{1}{E}\right)^{1/2} \quad (11.13)$$

R_{phot} est proportionnel à $E^{-1/2}$. La résistance décroît avec l'augmentation de l'éclairement. La relation entre ces deux grandeurs n'est pas linéaire.

11.12 Pour avoir un photocourant important, il est nécessaire que a et L soient grands et l petit. On limite ainsi les possibilités de recombinaison des photoélectrons avant qu'ils n'atteignent les électrodes collectrices. Ceci explique la forme en peignes interdigués donnée aux LDR.

11 • Photorésistance – LDR : fonctionnement et utilisation ...

11.13 Le courant total circulant dans la LDR sous éclairage est $I = I_{phot} + I_{obs}$, somme du courant d'obscurité et du photocourant. Electriquement, la LDR est donc équivalente à l'association en parallèle des résistances R_{phot} et R_{obs} , soit $R = R_{phot} // R_{obs}$.

11.14 Le courant d'obscurité étant négligeable par rapport au photocourant, on a $R_{obs} \gg R_{phot}$, d'où $R \simeq R_{phot}$.

II. Montage push-pull

11.15 La résistance de la LDR varie de façon inversement proportionnelle à la longueur du matériau éclairé. L'éclairage E est de 1000 lux. Comme seule la moitié de la longueur active L est éclairée on a :

$$R_{c0} = 2R (@1000 \text{ lux}) = 2 \text{ k}\Omega \quad (11.14)$$

11.16 Lors d'un déplacement latéral x , le fonctionnement étant push-pull la longueur active diminue de Nx pour l'un des capteurs et augmente de Nx pour l'autre. On a donc d'après (11.4) :

$$R_{c1}(x) = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2} - Nx} R_{c0} \quad \text{et} \quad R_{c2}(x) = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2} + Nx} R_{c0} \quad (11.15)$$

11.17 La tension de mesure est donnée par :

$$V_{mes}(x) = \left(\frac{R_{c1}(x)}{R_{c1}(x) + R_{c2}(x)} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{R_{c1}(x) - R_{c2}(x)}{R_{c1}(x) + R_{c2}(x)} \frac{V_g}{2} = \frac{Nx}{L} V_g \quad (11.16)$$

La tension de mesure varie linéairement avec le déplacement latéral x .

11.18 La sensibilité de la mesure est simplement donnée par :

$$S_{mes} = NV_g/L = 3,6 \text{ V/cm}$$

ENCART 11.1

La résistance de la LDR n'est pas une fonction linéaire de la surface éclairée de celle-ci. Par un montage de type push-pull on arrive, comme dans le problème traité ici, à effectuer une mesure linéaire (compte tenu des approximations effectuées), d'un mesurande secondaire comme ici le déplacement d'un objet opaque devant les LDR.

De même, comme démontré dans la première partie de ce problème, la résistance de LDR n'est pas une fonction linéaire de l'éclairement. Dans le cas où le mesurande est le flux lumineux, la mise en place d'un fonctionnement de type push-pull est impossible. En jouant sur les matériaux utilisés et sur des phénomènes négligés dans ce problème, les constructeurs travaillent à obtenir une résistance inversement proportionnelle à l'éclairement. L'admittance de la LDR varie alors linéairement avec l'éclairement.

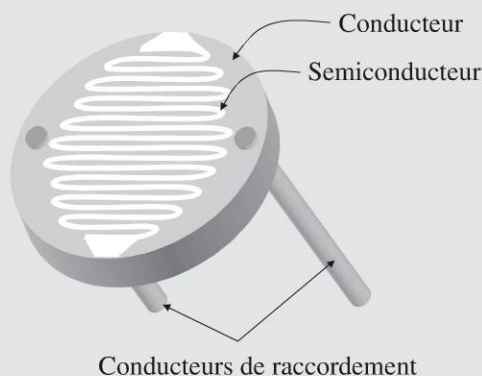


Figure 11.8- Structure en peignes interdigités d'une LDR

12

PROBLÈME : Thermométrie à diode

La dépendance à la température de la relation courant-tension d'une jonction PN est donnée par la loi de Shockley. En utilisant les techniques de fabrication de circuits intégrés, la thermométrie par diode permet de réaliser des composants de faible coût comprenant le capteur lui-même, son conditionnement et la mise en forme du signal. Les principaux fabricants de composants semiconducteurs proposent des produits très utilisés dans l'électronique grand public lorsque la précision demandée est de l'ordre de quelques dixièmes de degré.

Énoncé

I. La diode en capteur de température

12.1 On considère la jonction PN d'une diode polarisée en direct. En notant V_j la tension aux bornes de la jonction, le courant traversant la jonction est donné par la loi de Shockley :

$$I = I_s \left[\exp\left(\frac{eV_j}{kT}\right) - 1 \right] \quad (12.1)$$

Dans l'approximation $kT \ll E_g$ que l'on supposera vérifiée ici, le courant de saturation I_s , est donné par $I_s = AT^3 \exp(-E_g/kT)$ où E_g est la largeur de bande interdite du semiconducteur, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et T la température en Kelvin.

On suppose que la température de la jonction reste inférieure à 80°C . Montrer que dès que $V_j > 150 \text{ mV}$, l'expression (12.1) peut se simplifier et permet d'exprimer simplement V_j en fonction de I . On donne $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

12.2 La diode est alimentée par un courant constant I_0 . La température T de la jonction varie autour d'une température T_0 prise comme référence et on pose $T = T_0 + \Delta T$. Par un développement limité au premier ordre en $\Delta T/T_0$ établir la relation entre $V_j(T_0 + \Delta T)$, $V_j(T_0)$ et ΔT .

12.3 Soit $R_s(T)$ la résistance série de la diode (la résistance des régions N et P de la diode à la température T). En toute rigueur, cette résistance dépend de la tension

de polarisation puisque celle-ci conditionne la largeur de la zone de déplétion. On néglige cet effet et on considère que pour une température de la diode évoluant de ΔT autour de T_0 , en première approximation, on peut écrire :

$$R_s(T_0 + \Delta T) = R_s(T_0) (1 + \Delta T/T_0)^{3/2} \quad (12.2)$$

Établir, au premier ordre en $\Delta T/T_0$, la relation entre $R_s(T_0 + \Delta T)$, $R_s(T_0)$ et ΔT .

12.4 En déduire l'expression approchée de la tension $V_d(T_0 + \Delta T)$ aux bornes de la diode et l'expression de la sensibilité S_d du capteur de température ainsi réalisé.

12.5 La diode utilisée est une diode 1N914 dont la caractéristique statique est donnée figure 12.1. Calculer la sensibilité à 25 °C si $I_0 = 2,5$ mA. On donne $E_g = 1,14$ eV et $R_s(25 \text{ °C}) = 10 \Omega$.

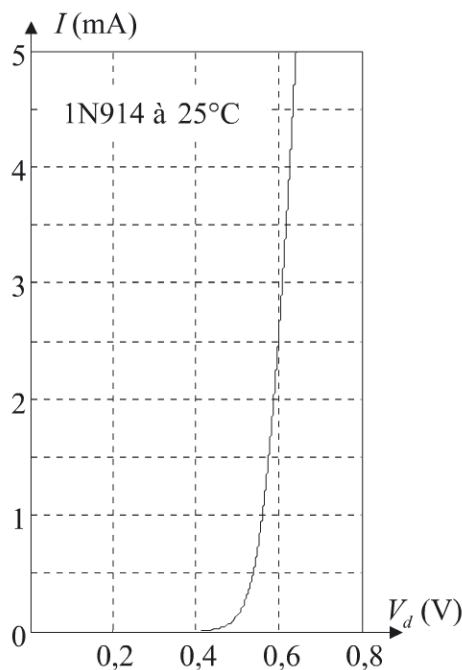


Figure 12.1- Caractéristique de la diode 1N914

12.6 On se limite à une étendue de mesure $E.M. = [0; 50]$. Toujours pour $I_0 = 2,5$ mA et en considérant un point tous les 10 °C, calculer $V_d(T)$ et, à partir d'une régression linéaire, son approximation linéaire $V_{d,lin}(T)$. Évaluer l'écart de linéarité, plus grand écart entre la caractéristique réelle et la droite donnée par les moindres carrées, puis l'erreur de linéarité, écart de linéarité normalisé à l'excursion de la tension aux bornes de la diode. À quelle erreur en C ceci correspond-il ?

12.7 On considère maintenant la dérive du courant d'alimentation I_0 de la diode. On suppose que cette dérive ne peut excéder $\Delta I_0 = 0,05$ mA. En déduire l'erreur engendrée en °C.

II. Électronique de conditionnement

Le montage conditionneur est réalisé selon la figure 12.2 où les amplificateurs opérationnels utilisés peuvent être considérés comme idéaux.

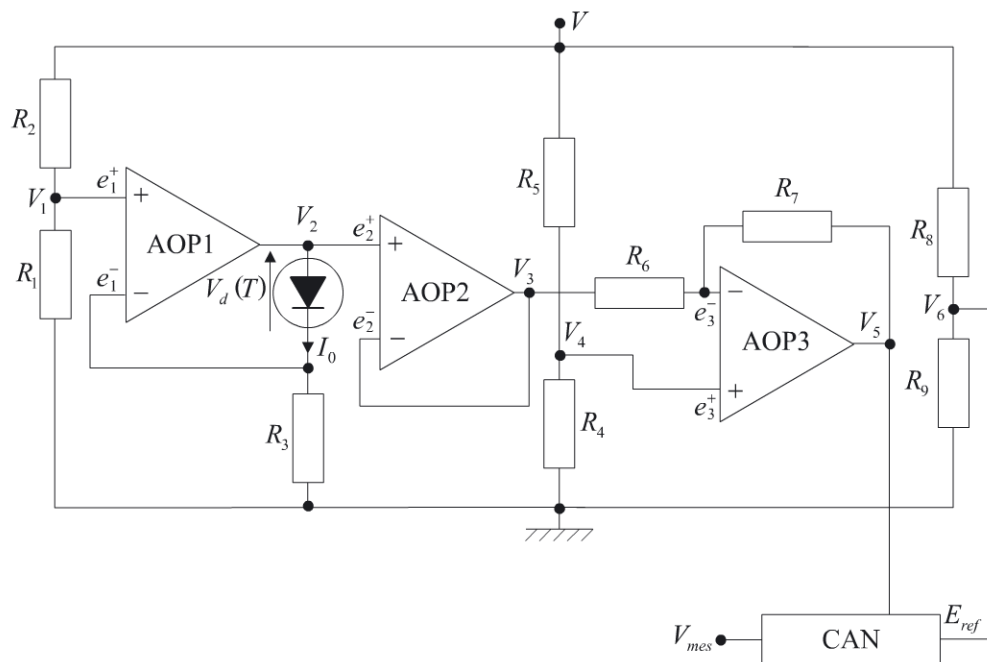


Figure 12.2 - Conditionnement du capteur

12.8 Établir la relation entre R_1 et R_2 afin que le courant dans la diode soit $I_0 = 2,5 \text{ mA}$. On donne $V = 12 \text{ V}$ et $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$.

12.9 Déterminer les relations respectivement entre R_4 et R_5 d'une part et R_6 et R_7 d'autre part afin que la tension V_5 soit de la forme $V_5 = 0,1 \cdot t$ où t représente la température en $^\circ\text{C}$.

12.10 Le convertisseur analogique-numérique étant un convertisseur 8 bits, déterminer la relation entre R_8 et R_9 afin que la variation minimale de température détectable, associée à un quantum q , soit égale à $0,2 \text{ }^\circ\text{C}$.

I. La diode en capteur de température

12.1 Pour $V_j > 150$ mV et $T < (80 + 273,15)$ K, on a $\exp(eV_j/kT) > 100$. On peut donc récrire le courant traversant la diode selon :

$$I \simeq AT^3 \exp\left(\frac{eV_j - E_g}{kT}\right)$$

En inversant cette dernière relation, on obtient :

$$V_j \simeq \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{I}{AT^3}\right) + \frac{E_g}{e} \quad (12.3)$$

12.2 Le développement limité de (12.3) au premier ordre en $\Delta T/T_0$ donne :

$$\begin{aligned} V_j(T_0 + \Delta T) &\simeq \frac{kT_0}{e} \ln\left(\frac{I_0}{AT_0^3}\right) + \frac{E_g}{e} + \frac{kT_0}{e} \left(\ln\left(\frac{I_0}{AT_0^3}\right) - 3\right) \frac{\Delta T}{T_0} \\ &= V_j(T_0) + \frac{k}{e} \left(\ln\left(\frac{I_0}{AT_0^3}\right) - 3\right) \Delta T \end{aligned} \quad (12.4)$$

12.3 Au premier ordre, il vient immédiatement :

$$R_s(T_0 + \Delta T) = R_s(T_0) (1 + 3\Delta T/2T_0) \quad (12.5)$$

12.4 La tension aux bornes de la diode est donnée par $V_d(T) = V_j(T) + R_s(T)I_0$, soit ici en utilisant (12.4) et (12.5) :

$$\begin{aligned} V_d(T_0 + \Delta T) &= V_j(T_0) + R_s(T_0)I_0 + \left(\frac{kT_0}{e} \ln\left(\frac{I_0}{AT_0^3}\right) - 3\frac{kT_0}{e} + \frac{3}{2}R_s(T_0)I_0\right) \frac{\Delta T}{T_0} \\ &= V_d(T_0) + \left(V_j(T_0) - \frac{E_g}{e} - 3\frac{kT_0}{e} + \frac{3}{2}R_s(T_0)I_0\right) \frac{\Delta T}{T_0} \\ &= V_d(T_0) + \left(V_d(T_0) - \frac{E_g}{e} - 3\frac{kT_0}{e} + \frac{1}{2}R_s(T_0)I_0\right) \frac{\Delta T}{T_0} \end{aligned}$$

On en déduit la sensibilité S_d à la température T_0 :

$$S_d(T_0) = \frac{\Delta V_d}{\Delta T}(T_0) = \left(V_d(T_0) - \frac{E_g}{e} - 3\frac{kT_0}{e} + \frac{1}{2}R_s(T_0)I_0\right) \frac{1}{T_0} \quad (12.6)$$

12 • Thermométrie à diode

12.5 Pour un courant $I_0 = 2,5 \text{ mA}$ à 25 °C , la caractéristique de la diode figure 12.1 donne $V_d(t_0 = 25 \text{ C}) = 0,6 \text{ V}$. Le résultat (12.6) donne alors :

$$S_d(t_0 = 25 \text{ C}) = -2 \text{ mV/°C}$$

12.6 Pour calculer la sensibilité à différente température à partir de (12.2) et (12.3), il faut tout d'abord déterminer la valeur de la constante A apparaissant dans (12.3). On utilise pour cela la valeur $V_d(T_0 = 298,15 \text{ K}) = 0,6 \text{ V}$ déduite de la caractéristique statique de la diode. Il vient alors $A = 0,3286 \text{ A.K}^{-3}$.

Les différentes valeurs de $V_d(T)$ sont reportées dans le tableau 12.1.

La régression linéaire sur ces valeurs donne l'approximation linéaire $V_{d,lin}(T)$ de $V_d(T)$ soit :

$$V_{d,lin}(T)(\text{mV}) = 1204,5 - 2,028 \cdot T \quad (12.7)$$

Les valeurs de $V_{d,lin}(T)$ sont également reportées dans le tableau 12.1.

Tableau 12.1 - Tension aux bornes de la diode en fonction de la température

$t \text{ (°C)}$	0	10	20	25	30	40	50
$V_d(T)(\text{mV})$	650,5	630,3	610,1	600,0	589,9	569,5	549,1
$V_{d,lin}(T)(\text{mV})$	650,6	630,3	610,1	599,9	589,8	569,5	549,2

Ces données conduisent à un écart de linéarité de l'ordre de $0,14 \text{ mV}$ soit une erreur de linéarité de $0,14/(650,5 - 549,1) \approx 0,14 \text{ ‰}$.

Exprimé en degré, l'écart engendrée est de l'ordre de :

$$0,14 \text{ mV}/2,0 \text{ mV.°C}^{-1} = 0,075 \text{ °C}$$

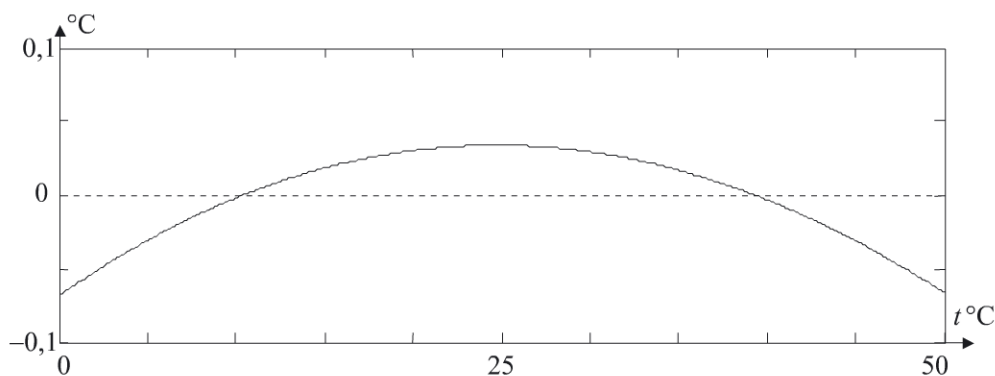


Figure 12.3 - Écart de linéarité de la mesure exprimé en °C

12.7 Pour évaluer, l'erreur engendrée par la dérive du courant d'alimentation, il suffit de dériver l'expression de la tension $V_d(T)$, soit :

$$\frac{dV_d(T)}{dI_0} = \frac{d}{dI_0} \left[\frac{kT}{e} \ln \left(\frac{I_0}{AT^3} \right) + \frac{E_g}{e} + R_s(T)I_0 \right] \approx \frac{kT}{eI_0} + R_s(T)$$

Le calcul n'est qu'approximatif puisqu'en toute rigueur la modification du courant entraîne une modification de la puissance dissipée par effet Joule dans la diode et donc de sa température par effet d'auto échauffement.

Avec cette approximation, la variation maximale de la tension aux bornes de la diode engendrée par la variation maximale $\Delta I_0 = 0,05$ mA du courant d'alimentation est donnée au premier ordre par :

$$\Delta V_d(T) \simeq \left[\frac{kT}{eI_0} + R_s(T) \right] \Delta I_0$$

Au milieu de l'étendue de mesure, c'est-à-dire pour une température de 25 °C, on a $kT/eI_0 \simeq 10 \Omega$ et $R_s = 10 \Omega$. Il vient donc $\Delta V_d(T) \simeq 1$ mV, soit compte-tenu de la sensibilité une erreur de 0,5 °C sur la mesure.

II. Électronique de conditionnement

12.8 Pour l'amplificateur opérationnel AOP1, on a $e_1^+ = V_1$ et $e_1^- = V_2 - V_d(T)$. L'amplificateur étant idéal, la présence de la contre réaction amène $e_1^+ = e_1^-$. De plus, le courant I_0 traversant le capteur est le même que le courant traversant la résistance R_3 et donc $e_1^- = R_3 I_0$. Au total, il vient alors $I_0 = V_1/R_3$.

On désire avoir $I_0 = 2,5$ mA. Comme $V_1 = VR_1/(R_1 + R_2)$, on en déduit que l'on doit avoir :

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{V - R_3 I_0}{R_3 I_0} = 3,8$$

12.9 L'amplificateur AOP2 étant monté en suiveur, on a $V_3 = V_2$. Comme d'après la question précédente $V_2 - V_d(T) = V_1 = R_3 I_0$, il vient $V_3 = R_3 I_0 + V_d(T)$ ou encore, en utilisant (12.7), $V_3 = a - b \cdot T$ avec $a = 3704,5 \cdot 10^{-3}$ V et $b = 2,028 \cdot 10^{-3}$ V.K⁻¹.

À la borne e_3^- de l'amplificateur AOP3, la tension est :

$$e_3^- = V_3 - R_6 \frac{V_3 - V_5}{R_7 + R_6} = \frac{R_7 V_3 + R_6 V_5}{R_7 + R_6}$$

L'amplificateur étant idéal et possédant une contre-réaction, il vient $e_3^- = e_3^+ = V_4$ soit :

$$\begin{aligned} V_5 &= \frac{(R_7 + R_6)V_4 - R_7 V_3}{R_6} \\ &= \frac{(R_7 + R_6)}{R_6} V_4 - \frac{R_7}{R_6} (a - b \cdot T) \\ &= \left[\frac{(R_7 + R_6)}{R_6} V_4 - \frac{R_7}{R_6} (a - b \cdot 273,15) \right] - \frac{R_7}{R_6} b \cdot t \end{aligned} \tag{12.8}$$

Comme V_5 doit être égal à $0,1 \cdot t$, on doit donc avoir $R_7/R_6 = 0,1/b = 49,32$.

12 • Thermométrie à diode

D'après la figure 12.2, on a $V_4 = VR_4/(R_4 + R_5)$ et puisque le premier terme de (12.8) doit être nul, il vient :

$$\frac{R_4}{R_4 + R_5} = \frac{1}{1 + \frac{R_7}{R_6}} \frac{R_7 (a - b \cdot 273,15)}{V}$$

Ce qui conduit à $R_4/R_5 = 1,76$.

En choisissant par exemple $R_1 = R_5 = R_6 = 10 \text{ k}\Omega$, on doit avoir $R_2 = 38,0 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 17,6 \text{ k}\Omega$ et $R_7 = 493,2 \text{ k}\Omega$ pour assurer une tension V_5 de la forme $V_5 = 0,1 \cdot t$.

12.10 Pour un convertisseur 8 bits, le quantum est $E_{ref}/256$. On désire avoir :

$$\Delta t = \frac{\Delta V_5}{0,1} = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$$

Comme $\Delta V_5 = q = E_{ref}/256$, on obtient $E_{ref} = 5,12 \text{ V}$. Le choix de cette valeur de E_{ref} permet bien de couvrir l'excursion de la tension V_5 soit $[0 \text{ V} ; 5 \text{ V}]$.

Puisque $V_6 = E_{ref}$, on doit avoir :

$$\frac{R_9}{R_9 + R_8} = \frac{V_6}{V}$$

Ce qui conduit à $R_9/R_8 = 0,74$.



Dans ce problème, un bon nombre de sources d'erreurs comme le bruit électronique des différents éléments ou le phénomène d'auto échauffement ont été négligés. De plus, tel qu'il est présenté, le système de mesure possède une forte dépendance au courant de saturation qui peut fortement différer d'une diode à l'autre. Les composants commercialisés mettent en œuvre des montages plus complexes permettant une bien meilleure interchangeabilité. Leur erreur de précision est de l'ordre de $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ pour une étendue de mesure allant jusqu'à $[-50 \text{ }^\circ\text{C} ; +150 \text{ }^\circ\text{C}]$. Certains composants se comportent comme des sources de tension dépendantes de la température avec des tensions de sortie du type $0 \text{ V} + 10,0 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ ou $2,98 \text{ V} + 10,0 \text{ mV}/\text{K}$, d'autres se comportent comme des sources de courant avec des courants de sortie du type $298,2 \text{ }\mu\text{A} + 1 \text{ }\mu\text{A}/\text{K}$.

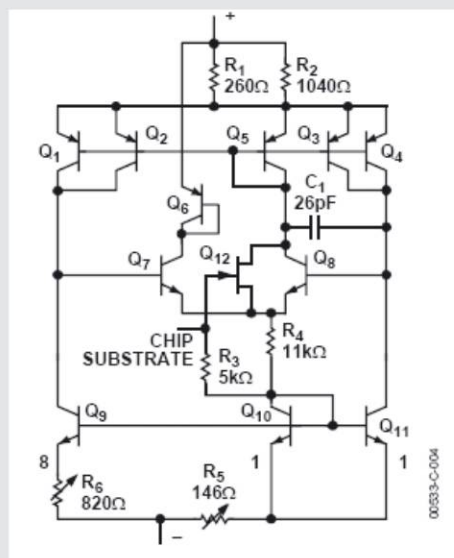
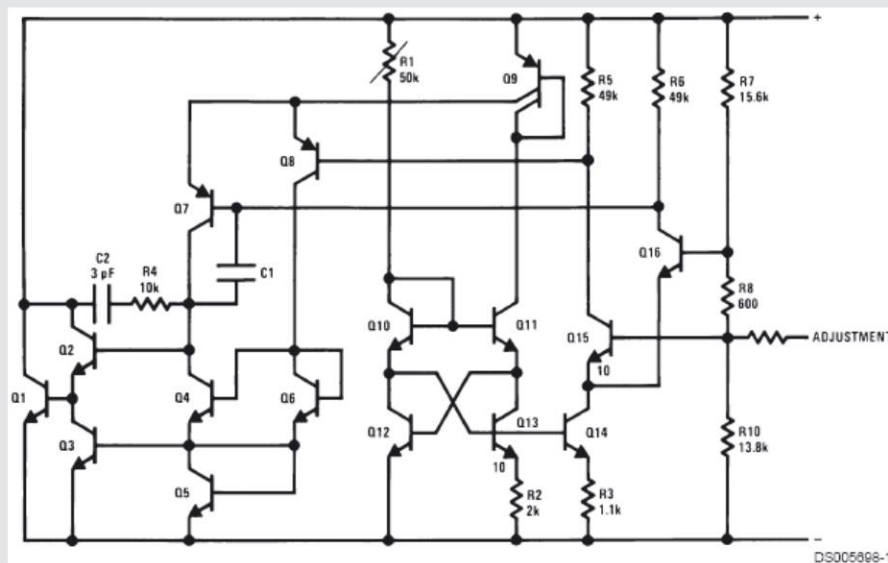


Figure 12.4- LM135 : $2,98\text{ V} + 10,0\text{ mV/K}$ (documentation National Semiconductor)
 et AD590 : $298,2\text{ }\mu\text{A} + 1\text{ }\mu\text{A/K}$ (documentation Analog Devices)

13

PROBLÈME : Capteur capacitif de pression à déformation de membrane

Tout comme la température et le débit, la pression fait partie des grandeurs physiques les plus mesurées dans le domaine industriel. Les procédés de conversion qui permettent de transformer la pression en un mesurande secondaire exploitable sont multiples. Parmi ceux-ci, la mesure par méthode capacitive de la déformation d'une membrane sous l'effet de la pression appliquée, est relativement simple et robuste.

Énoncé

On considère un capteur capacitif de pression dont l'élément de base est une membrane déformable, conductrice, circulaire et fixée sur sa périphérie par une bride. La membrane est de rayon a et d'épaisseur e . D'un côté de la membrane se trouve une cavité fermée ou chambre close, à une pression p_0 correspondant à un vide primaire. De l'autre côté se trouve une cavité ouverte sur l'extérieur et donc à la pression extérieure p (voir figure 13.1).

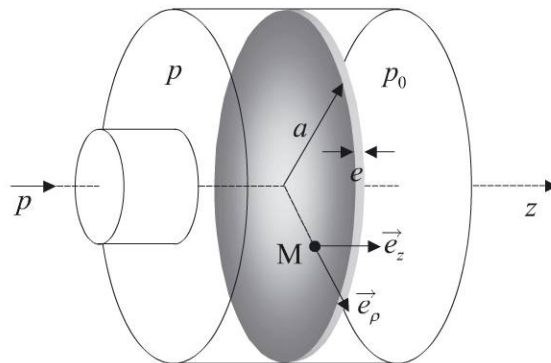


Figure 13.1- Position de la membrane déformable

Un point M de la membrane est repéré par ses coordonnées (ρ, φ, z) . L'origine O du repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ est prise sur la membrane au repos, c'est-à-dire lorsque $p = p_0$.

Sous l'action de la différence de pression $p - p_0$, la membrane se déforme. Soient E et ν respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant la membrane. Pour une déformation faible, la membrane étant encastree

en $\rho = a$, on montre qu'une bonne approximation de la déformée de la membrane est (voir figure 13.2) :

$$z(\rho) = \frac{3}{16} \frac{p - p_0}{Ee^3} (1 - \nu^2) (a^2 - \rho^2)^2 \quad (13.1)$$

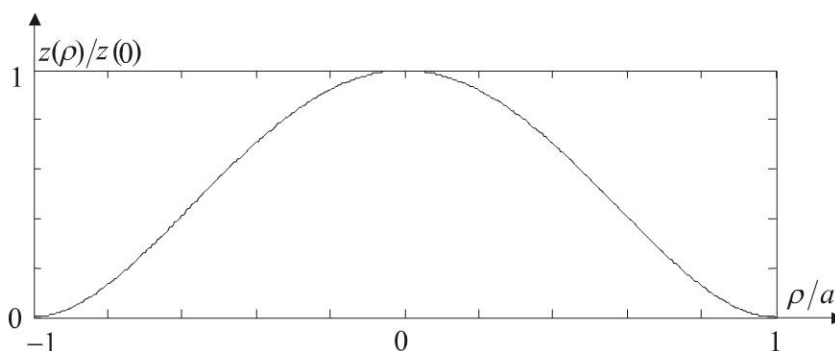


Figure 13.2 - Déformée de la membrane

Pour mesurer le déplacement de la membrane sous l'effet de la différence de pression, on place en face de celle-ci et dans la chambre à la pression p_0 , une contre-électrode circulaire et plane de rayon a_0 . On réalise ainsi un condensateur (voir figure 13.3).

13.1 Le système est prévu pour supporter au maximum une pression p_{\max} . À la pression p_{\max} la membrane et la contre-électrode entrent en contact et le condensateur se trouve alors en court-circuit. Calculer la distance d_0 à prévoir entre la contre-électrode et la position de repos de la membrane. La membrane de diamètre $2a = 5$ cm et d'épaisseur $e = 1$ mm est réalisée en acier inoxydable de module d'Young $E = 203$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0,33$. On donne $p_0 = 10^3$ Pa et $p_{\max} = 10^6$ Pa.

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$k = \frac{3}{16} \frac{1 - \nu^2}{Ee^3} \quad (13.2)$$

13.2 Déterminer l'expression de la capacité C_1 du condensateur réalisé (voir figure 13.3). On négligera les effets de bord et on notera ε la perméabilité du milieu, c'est-à-dire du gaz résiduel de la chambre à la pression p_0 .

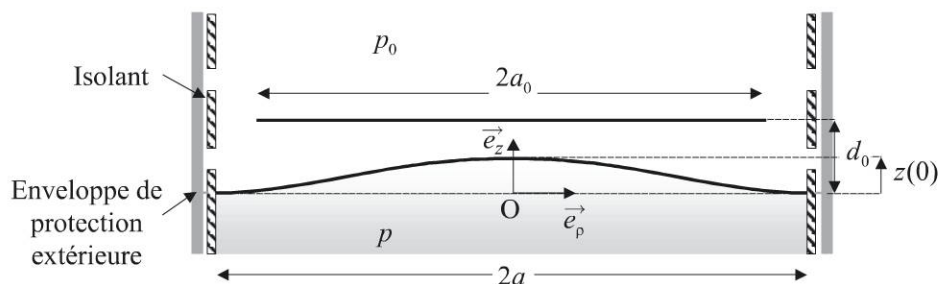


Figure 13.3 - Condensateur constitué par la membrane déformée et une armature fixe

13 • Capteur capacitif de pression à déformation de membrane

On donne :

$$\int \frac{dx}{u^2 - x^2} = \frac{1}{2u} \ln \left(\frac{u+x}{u-x} \right)$$

On pourra poser $\Delta p_{\max} = p_{\max} - p_0$ et $\Delta p = p - p_0$.

Que devient cette expression si on impose $a_0 = a$? On posera :

$$C_0 = \varepsilon \pi / k a^2 p_{\max}$$

13.3 On se limite à une étendue de mesure $E.M. = [10p_0 ; p_{\max}/2]$.

En effectuant un développement limité, donner l'expression approchée C'_1 de C_1 à l'ordre 2 en p/p_{\max} si on tient compte de $p_0 \ll p$.

13.4 Montrer que l'on peut calculer plus facilement une expression approchée de la capacité du condensateur en calculant la valeur moyenne de la déformée sur la surface πa_0^2 .

En donner une expression C''_1 à l'ordre 2 en p/p_{\max} avec $a_0 = a$ et sous l'approximation $p_0 \ll p$.

13.5 Une seconde électrode, identique à la première, est montée de l'autre côté de la membrane à la même distance d_0 du plan de repos de la membrane de façon à réaliser un deuxième condensateur de capacité C_2 . On obtient ainsi deux condensateurs plans fonctionnant en push-pull.

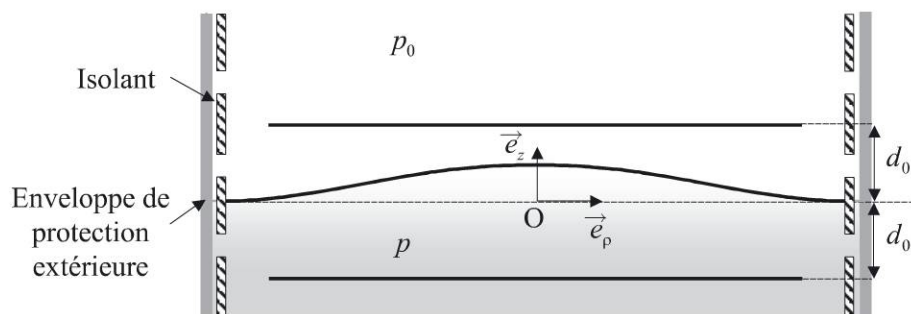


Figure 13.4- Condensateurs constitués par la membrane et les deux armatures fixes

Calculer l'expression de la capacité C_2 et de son expression approchée C'_2 à l'ordre 2 en p/p_{\max} si $a_0 = a$ et sous l'approximation $p_0 \ll p$. On fait l'hypothèse que la permittivité électrique du milieu à la pression p est égale à celle de la chambre à la pression p_0 soit ε et on donne :

$$\int \frac{dx}{u^2 + x^2} = \frac{1}{u} \arctan \frac{x}{u} \quad (13.4)$$

13.6 Les deux condensateurs sont montés avec deux résistances fixes R dans un demi-pont push-pull alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude V_g et de pulsation ω (voir figure 13.5).

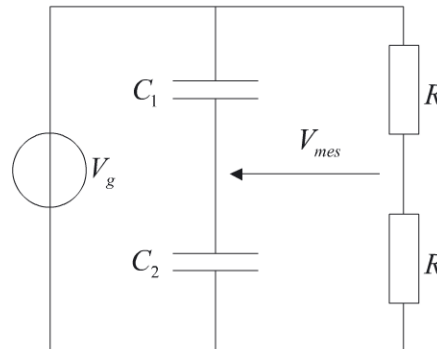


Figure 13.5 - Principe du montage

Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} . En utilisant les valeurs approchées C'_1 et C'_2 des capacités, évaluer la sensibilité S_{mes} de la mesure et l'erreur maximale δp sur la pression mesurée.

13.7 Afin de caractériser la mesure de façon plus précise, on effectue une régression linéaire de la caractéristique de la mesure à partir de trois points de l'étendue de mesure :

$$p = 10^5 \text{ Pa} \quad p = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad p = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Déterminer les valeurs exactes des capacités puis des tensions de mesure correspondantes.

Effectuer une régression linéaire à partir de ces trois points et donner l'approximation linéaire $V_{mes,lin}$ de la tension de mesure. On rappelle que les coefficients de la meilleure droite au sens des moindres carrés, d'équation $y = Ax + B$, passant par N couples de points de mesure (x_i, y_i) sont donnés par :

$$A = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \tag{13.5}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

13 • Capteur capacitif de pression à déformation de membrane

En déduire une nouvelle estimation de la sensibilité et évaluer l'erreur de linéarité en % de l'étendue de mesure.

13.8 On modifie maintenant le capteur de façon à mesurer des pressions évoluant à partir de 10^5 Pa. Pour ceci, la pression p_0 est maintenant fixée à 10^5 Pa.

Quel problème peut venir fausser la mesure si la profondeur b de la chambre à la pression p_0 n'est pas suffisante ? On considère en première approximation que le gaz est parfait.

13.9 Les propriétés électrochimiques du gaz à la pression p peuvent varier entraînant une variation de sa permittivité électrique. Comment éviter un effet sur la qualité de la mesure ?

Corrigé détaillé

13.1 La valeur maximale de la déformée est, d'après (13.1), donnée pour $\rho = 0$, soit :

$$z(0) = \frac{3}{16} \frac{p - p_0}{Ee^3} a^4 (1 - \nu^2)$$

Le maximum maximum de cette valeur, obtenu pour $p = p_{\max}$, doit être égal à l'épaisseur à donner au condensateur. On a donc :

$$d_0 = k(p_{\max} - p_0)a^4 = 321,2 \mu\text{m} \quad \text{où} \quad k = \frac{3}{16} \frac{1 - \nu^2}{Ee^3} = 8,231 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

13.2 Le condensateur peut être considéré comme l'association en parallèle de condensateurs élémentaires plans (voir figure 13.3) de capacité donnée par :

$$dC = \frac{\varepsilon \rho d\rho d\varphi}{d_0 - z(\rho)} \quad (13.6)$$

La capacité totale C_1 s'obtient par intégration de (13.6) :

$$C_1 = \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \rho d\rho d\varphi}{k [\Delta p_{\max} a^4 - \Delta p (a^2 - \rho^2)^2]} \quad (13.7)$$

On pose $x = \sqrt{\Delta p} (a^2 - \rho^2)$ et $u = \sqrt{\Delta p_{\max}} a^2$, compte tenu de (13.3), (13.7) devient :

$$C_1 = -\frac{\pi \varepsilon}{k \sqrt{\Delta p}} \int_{\sqrt{\Delta p} a^2}^{\sqrt{\Delta p} (a^2 - a_0^2)} \frac{dx}{u^2 - x^2} \quad (13.8)$$

$$= \frac{\pi \varepsilon}{2ka^2 \sqrt{\Delta p} \sqrt{\Delta p_{\max}}} \ln \left[\frac{\sqrt{\Delta p_{\max}} + \sqrt{\Delta p}}{\sqrt{\Delta p_{\max}} - \sqrt{\Delta p}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta p_{\max}} - \sqrt{\Delta p} \left(1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right)}{\sqrt{\Delta p_{\max}} + \sqrt{\Delta p} \left(1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right)} \right]$$

Dans le cas particulier où $a_0 = a$, (13.8) s'écrit :

$$C_1 = \frac{\pi \varepsilon}{2ka^2 \Delta p_{\max} \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}}{1 - \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}} \right] \quad (13.9)$$

$$= \frac{C_0}{2 \left(1 - \frac{p_0}{p_{\max}}\right) \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}}{1 - \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}} \right]$$

13.3 Avec $\Delta p \simeq p$ et $\Delta p_{\max} \simeq p_{\max}$, en effectuant un développement en p/p_{\max} , il vient :

$$C_1 \simeq C_0 \left[1 + \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}}\right)^2 \right] = C'_1 \quad (13.10)$$

13.4 La valeur moyenne de la déformée sur la surface de la membrane est simplement donnée par :

$$z_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi a_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} k \Delta p (a^2 - \rho^2)^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \frac{k \Delta p}{3} [a_0^4 - 3a^2 a_0^2 + 3a^4] \quad (13.11)$$

La capacité du condensateur réalisé est donc approximativement :

$$C_1 \simeq \frac{\varepsilon \pi a_0^2}{d_0 - z_{\text{moy}}} = \frac{\varepsilon \pi a_0^2}{k \left[\Delta p_{\max} a^4 - \frac{\Delta p}{3} (a_0^4 - 3a^2 a_0^2 + 3a^4) \right]} \quad (13.12)$$

Avec $a_0 = a$, $\Delta p \simeq p$ et $\Delta p_{\max} \simeq p_{\max}$, (13.2) s'écrit :

$$C_1 \simeq \frac{\varepsilon \pi}{ka^2 p_{\max}} \frac{1}{1 - \frac{p}{3p_{\max}}} \simeq C_0 \left[1 + \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{9} \left(\frac{p}{p_{\max}}\right)^2 \right] = C''_1$$

13 • Capteur capacitif de pression à déformation de membrane

Les courbes de la figure 13.6 représentent les trois expressions obtenues pour la valeur du condensateur si $a_0 = a$.

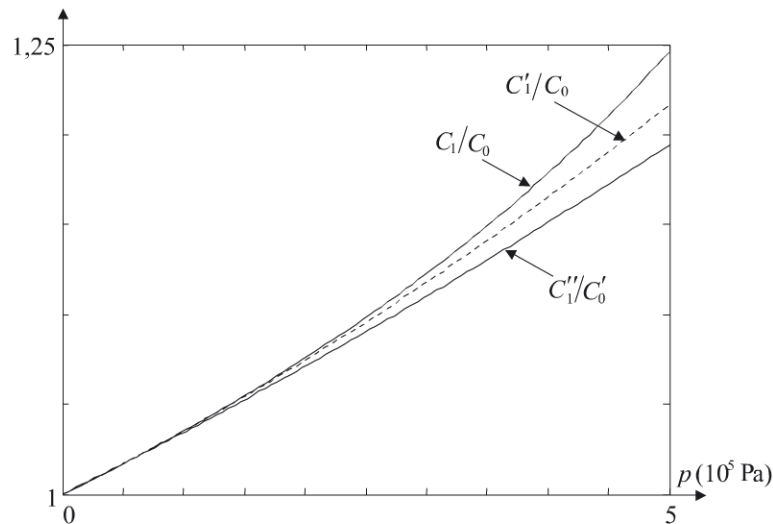


Figure 13.6 - Evolution de la capacité C_1 avec la pression p

13.5 Le calcul est similaire à celui de la question 2. La capacité totale C_2 s'obtient par intégration de (13.6) dans laquelle le dénominateur $d_0 - z(\rho)$ doit être remplacé par $d_0 + z(\rho)$:

$$C_2 = \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \rho d\rho d\varphi}{k [\Delta p_{\max} a^4 + \Delta p (a^2 - \rho^2)^2]} \quad (13.13)$$

On pose $x = \sqrt{\Delta p}(a^2 - \rho^2)$ et $u = \sqrt{\Delta p_{\max}} a^2$, compte tenu de (13.4), (13.3) devient :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\pi \varepsilon}{k \sqrt{\Delta p}} \int_{\sqrt{\Delta p} a^2}^{\sqrt{\Delta p}(a^2 - a_0^2)} \frac{dx}{u^2 + x^2} \quad (13.14) \\ &= \frac{\pi \varepsilon}{k a^2 \sqrt{\Delta p} \sqrt{\Delta p_{\max}}} \left[\arctan \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}} - \arctan \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}} \left(1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{C_0}{\left(1 - \frac{p_0}{p_{\max}} \right) \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}} \left[\arctan \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}} - \arctan \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}} \left(1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Avec $a_0 = a$, (13.14) peut être réécrit :

$$C_2 = \frac{C_0}{\left(1 - \frac{p_0}{p_{\max}} \right) \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}}} \arctan \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_{\max}}} \quad (13.15)$$

Pour $\Delta p \approx p$ et $\Delta p_{\max} \approx p_{\max}$, en effectuant un développement en p/p_{\max} , on obtient :

$$C_2 \approx C_0 \left[1 - \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2 \right] = C'_2 \quad (13.16)$$

La figure 13.7 présente l'évolution des capacités C_1 et C_2 en fonction de la pression p . On remarque le comportement non-linéaire et non symétrique de ces capacités avec la pression p .

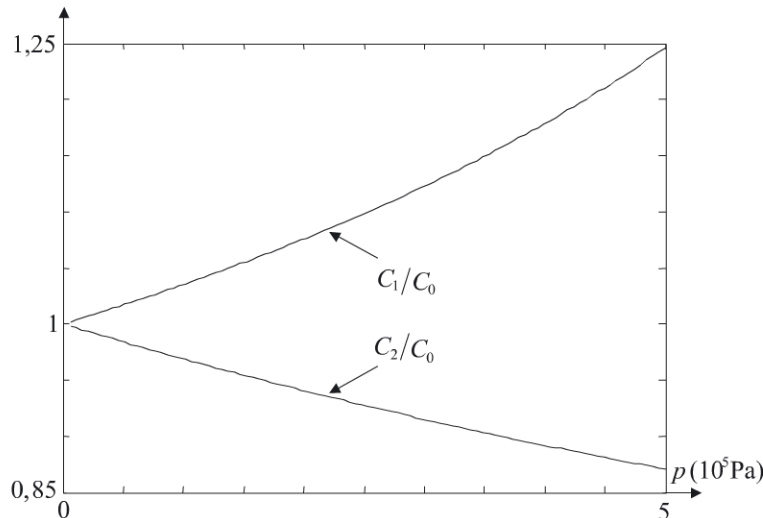


Figure 13.7- Evolution des capacités C_1 et C_2 avec la pression p

13.6 Avec (13.10) et (13.16), la tension de mesure s'écrit :

$$V_{mes} = \left(\frac{\frac{1}{C_2 \omega}}{\frac{1}{C_1 \omega} + \frac{1}{C_2 \omega}} - \frac{1}{2} \right) V_g = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \frac{V_g}{2} \quad (13.17)$$

En utilisant les expressions approximatives des capacités données par (13.10) et (13.16), on obtient :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \frac{V_g}{2} \approx \frac{C'_1 - C'_2}{C'_1 + C'_2} \frac{V_g}{2} \\ &= \frac{C_0 \left[1 + \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2 \right] - C_0 \left[1 - \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2 \right]}{C_0 \left[1 + \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2 \right] + C_0 \left[1 - \frac{p}{3p_{\max}} + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2 \right]} \frac{V_g}{2} \\ &= \frac{\frac{p}{p_{\max}}}{1 + \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2} \frac{V_g}{6} \approx \frac{p}{p_{\max}} \left[1 - \frac{1}{5} \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^2 \right] \frac{V_g}{6} \end{aligned} \quad (13.18)$$

13 • Capteur capacitif de pression à déformation de membrane

On en déduit une approximation de la sensibilité de la mesure donnée par :

$$S_{mes} \approx \frac{V_g}{6p_{max}} = 167 \text{ mV}/10^5 \text{ Pa} \quad (13.19)$$

L'écart de linéarité obtenu est de l'ordre de :

$$\delta V_{mes} \approx \left(\frac{p}{p_{max}} \right)^3 \frac{V_g}{30}$$

On obtient, compte tenu de (13.19), une erreur maximale (obtenue pour $p = p_{max}/2$) de $\delta p = p_{max}/40 = 0,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

13.7 Pour les trois valeurs de p proposées, on obtient à partir de (13.9), (13.15) et (13.17) les valeurs reportées dans le tableau 13.1.

Tableau 13.1 - Capacités et tensions de mesure pour trois valeurs de pression

p (Pa)	$1 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$
C_1/C_0	1,0351	1,0983	1,1783
C_2/C_0	0,9688	0,9275	0,8918
V_{mes} (mV)	165,5	421,5	692,1

À partir de ces données (13.5), permet de calculer la meilleure droite au sens des moindres carrés approchant la caractéristique réelle :

$$V_{mes,lin} \text{ (mV)} = 175,5 \cdot 10^{-5} p - 12,434$$

On en déduit une nouvelle approximation de la sensibilité, à savoir :

$$S_{mes} = 175,5 \text{ mV}/10^5 \text{ Pa}$$

La figure 13.8 présente les différentes estimations de la tension de mesure.

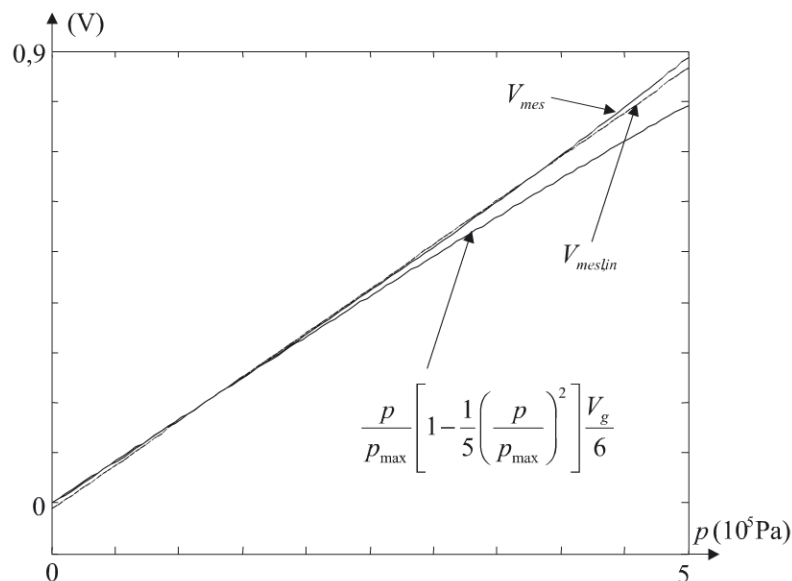


Figure 13.8 - Tension de mesure en fonction de la pression

Le plus grand écart entre la caractéristique réelle et l'approximation linéaire au sens des moindres carrés est pour $p = 5 \cdot 10^5$ Pa et vaut :

$$\begin{aligned} & V_{mes}(5 \cdot 10^5 \text{ Pa}) - V_{mes,lin}(5 \cdot 10^5 \text{ Pa}) \\ &= 0,8872 - (175,5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^5 + 12,434) = 22 \text{ mV} \end{aligned}$$

Compte-tenu de la nouvelle valeur de la sensibilité, cette erreur correspond à :

$$22 \text{ mV} / (175,5 \text{ mV} / 10^5 \text{ Pa}) = 0,125 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

L'erreur représente 2,5 % de l'étendue de mesure.

13.8 Pour une valeur donnée p de la pression, le volume $v = \pi a^2 b$ de la chambre à la pression p_0 évolue de $\Delta v = -\pi a^2 z_{moy}$. Une fois atteint l'équilibre thermique, le gaz étant considéré comme parfait, on a $\Delta p_0 / p_0 = -\Delta v / v = -z_{moy} / b$ où z_{moy} représente la déformée moyenne de la membrane. Si la profondeur b n'est pas suffisante, la variation non négligeable de p_0 se répercutera sur la mesure.

Si la problématique est la mesure de la pression p avec comme référence la pression atmosphérique, une autre solution consiste à ouvrir la chambre à la pression p_0 sur l'extérieur de façon à ce que la pression p_0 soit égale à la pression atmosphérique. On réalise alors une mesure différentielle. Evidemment le mesurande $p - p_0$ peut alors varier avec la pression atmosphérique p_0 même si la pression p reste constante. C'est pourquoi ce montage n'est utilisé que si $p = p_0 + \Delta p$ comme par exemple dans le cas de la mesure de la pression due à une colonne de liquide et lorsque la surface libre de ce dernier est à la pression atmosphérique p_0 .

13.9 Pour se protéger des variations des propriétés électrochimiques du gaz à la pression p , il suffit de transmettre à la membrane la pression à mesurer par l'intermédiaire d'une huile isolante incompressible (huile silicone) et d'une membrane souple d'isolement. Il faut alors tenir compte, dans le calcul des capacités, de la permittivité diélectrique de l'huile qui est différente de celle du gaz à la pression p_0 .

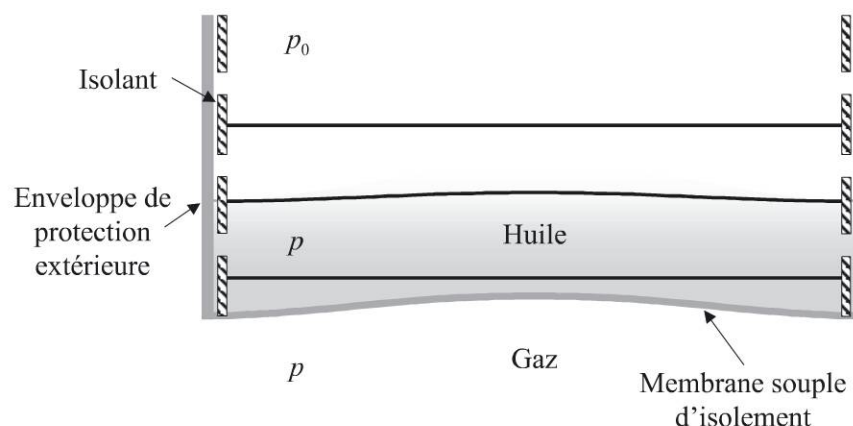


Figure 13.9 - Transmission de la pression par de l'huile

13 • Capteur capacitif de pression à déformation de membrane



De nombreuses configurations de ce type de capteurs sont disponibles. Elles permettent des précisions de mesure généralement meilleures que à 1 % de l'étendue de mesure.

Par nature, ces capteurs sont sensibles à la température. Pour un capteur de pression absolue avec une chambre close à pression p_0 , lors d'une variation de température, on a une variation relative de la pression p_0 égale en première approximation à la variation relative de la température (approximation de gaz parfait).

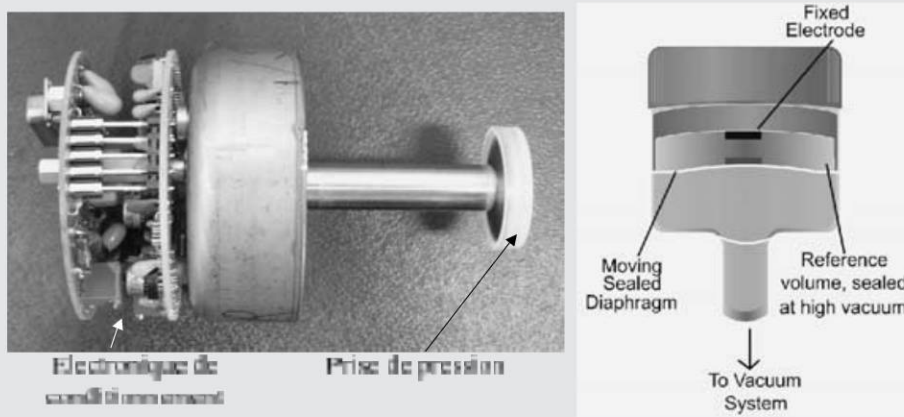


Figure 13.10 - Jauge capacitive Barocel (documentation Boc-Edward)

Le principe décrit précédemment peut être utilisé pour réaliser des capteurs silicium micro-usinés, la mesure capacitive offrant une alternative à la mesure de la déformation de la membrane par jauges d'extensométrie.

Le condensateur réalisé peut être intégré dans un circuit oscillant, la mesure de la pression se ramenant alors à une mesure de fréquence. En technologie micro-usinée, il est simple de prévoir un deuxième condensateur, dit de référence, dont la membrane ne subit pas de déformation liée à la pression et lui aussi intégré dans un circuit oscillant. La mesure de la différence des deux signaux après passage dans un mélangeur permet une mesure très précise de la pression et élimine toute composante du signal pouvant être liée à des grandeurs d'influence (température, accélération dans une direction perpendiculaire aux membranes...)

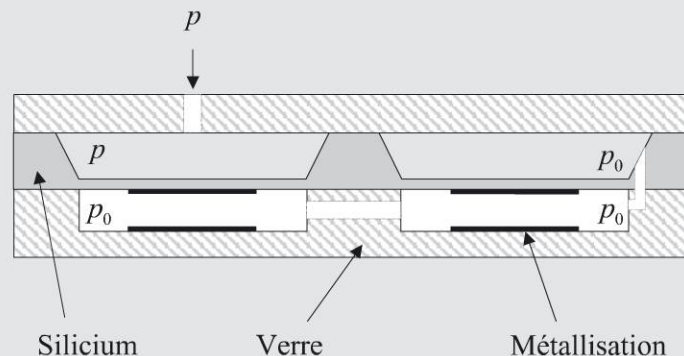


Figure 13.11 - Principe d'un capteur capacitif absolu de pression avec compensation des grandeurs d'influence

PROBLÈME : Accéléromètre piézorésistif basses fréquences

Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir une relation entre les trois grandeurs que sont force, masse et accélération. Les accéléromètres font tous appel à cette relation pour convertir l'accélération en force. La force est ensuite convertie en une grandeur électrique exploitable. Les principes physiques de conversion force-grandeur électrique sont nombreux et pratiquement tous ceux permettant la mesure d'une force peuvent être exploités pour la mesure d'une accélération. Ces dernières années, les progrès des microtechnologies ont permis le développement d'accéléromètres intégrés de plus en plus performants. Est présenté ici le principe d'un accéléromètre silicium micro-usiné dont le principe de conversion utilise l'effet piézorésistif. Cet accéléromètre, très basses fréquences, est destiné à une utilisation inclinométrique où le mesurande primaire est l'angle du système par rapport à la verticale. L'accélération mesurée est alors la projection de l'accélération de la pesanteur sur l'axe sensible du capteur.

Énoncé

I. Principe de base du capteur

On considère la structure de la figure 14.1 réalisée en silicium micro-usiné où une masse sismique centrale est suspendue à un bâti par quatre poutres flexibles identiques de masses négligeables.

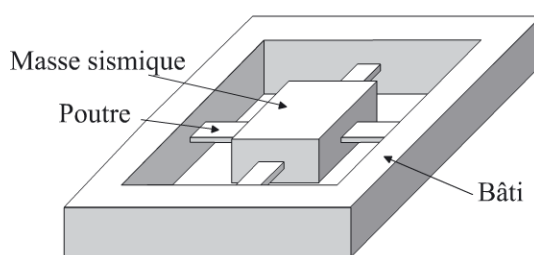


Figure 14.1 - Structure de l'accéléromètre

14 • Accéléromètre piézorésistif basses fréquences

Considérons deux poutres de même axe. Soient L la longueur de ces poutres et \vec{P} le poids de la masse sismique. Tout se passe comme si ce couple de poutres était soumis à la force $\vec{F} = \vec{P}/2$; le reste du poids étant supporté par l'autre couple de poutres (voir figure 14.2). D'un point de vue Résistance des Matériaux, ceci est équivalent à une poutre unique de longueur double $2L$ se déformant sous l'action de la force $\vec{F} = \vec{P}/2$ appliquée en son milieu (voir figure 14.2).

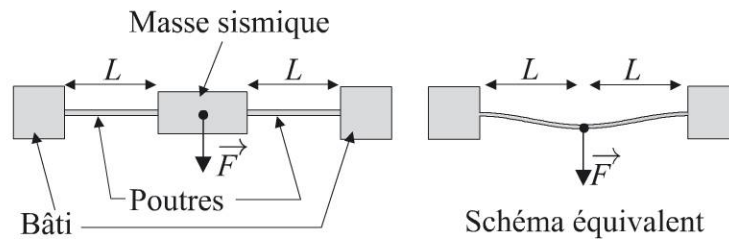


Figure 14.2 - Déformation des poutres

Sous l'action de la force appliquée, une distribution de contraintes prend naissance dans les poutres déformées (voir figure 14.3 où est représentée la contrainte σ_{yy}).

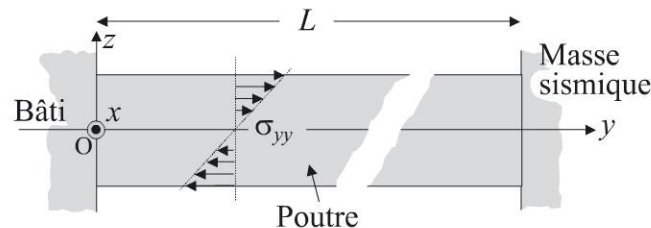


Figure 14.3 - Contrainte dans une des poutres

Chaque poutre est de largeur l (direction Ox), de longueur L (direction Oy) et d'épaisseur e (direction Oz).

On montre qu'en tous les points d'une section droite de la poutre (parallèle au plan xOz) située à une distance y de l'encastrement dans le bâti, la contrainte σ_{yy} est donnée par $\sigma_{yy} = zM_f/I$ où M_f est le moment de flexion et I le moment quadratique de la section droite par rapport à son axe médian parallèle à l'axe Ox . On donne, relativement au schéma équivalent de la figure 14.2, $M_f = F(L - 2y)/4$ pour $0 \leq y \leq L$ où F représente le module de \vec{F} .

On se propose de mesurer l'accélération subie par la masse sismique, ici l'accélération de la pesanteur, en diffusant sur chacune des poutres des jauges de contrainte alors situées à la surface des poutres.

Sur la face supérieure de chaque poutre, on diffuse deux jauges de contrainte alignées sur la direction Oy de la longueur de la poutre (voir figure 14.3) : une à proximité du bâti (indice +) et une à proximité de la masse sismique (indice -) (voir figure 14.4).

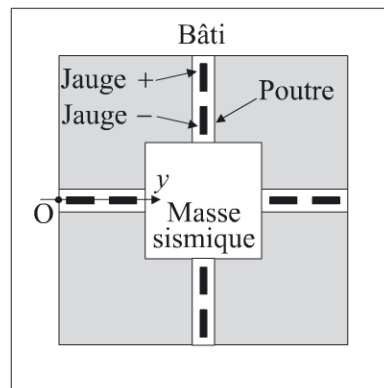


Figure 14.4 - Implantation des jauges de contrainte
(les connexions électriques des jauges ne sont pas représentées)

14.1 Donner la déformation $\varepsilon_{//,+}$, dans la direction y , à la surface des poutres. On note E le module d'Young du matériau des poutres.

14.2 Afin de rester dans le domaine élastique, on fixe la déformation maximale à $\varepsilon_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}$. Au maximum, le système doit pouvoir supporter une accélération totale de $\pm 5g$ selon la direction z où g est l'accélération de la pesanteur. Calculer les valeurs maximales de la masse m et du volume v de la masse sismique pour rester en-deçà de la limite fixée. On donne $L = 500 \mu\text{m}$, $l = 20 \mu\text{m}$, $e = 1 \mu\text{m}$, $E = 140 \text{ kN/mm}^2$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et la masse volumique du silicium $d = 2,33 \text{ g/cm}^3$.

14.3 Les jauges sont de longueur l_j . Montrer que la déformation moyenne d'une jauge centrée à la distance y_0 du bâti est égale à la déformation au point y_0 . On négligera l'effet lié à l'épaisseur de la jauge.

14.4 Déterminer, en première approximation, la distance au bâti à laquelle doivent être implantées les jauges de contrainte puis les déformations correspondantes ε_+ et ε_- .

14.5 Les quatre poutres sont équipées de la même façon. Les deux jauges proches du bâti (jauge +) de deux poutres dans le même alignement sont connectées en série pour former la résistance R_1 et les deux jauges proches de la masse sismique (jauge -) constituent en série la résistance R_2 . On procède de la même façon avec les deux poutres perpendiculaires aux précédentes pour former respectivement les résistances R_3 (jauge +) et R_4 (jauge -). Donner les expressions des résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 sachant que leur valeur au repos est R et leur coefficient de jauge K .

14.6 Les résistances ainsi constituées sont montées en pont. Celui-ci est alimenté par une source de tension continue V_g d'impédance interne négligeable, comme représenté figure 14.5.

14 • Accéléromètre piézorésistif basses fréquences

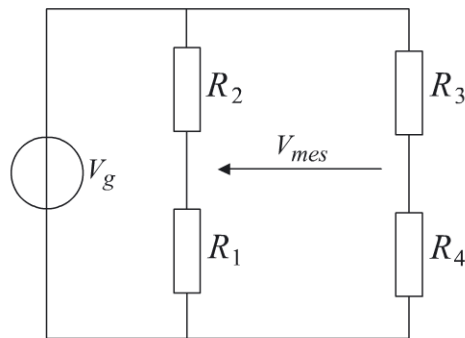


Figure 14.5 - Montage de conditionnement

Donner l'expression de la tension de mesure V_{mes} en fonction de R_1 , R_2 , R_3 et R_4 puis de K , R et ε . Conclure.

II. Effet de la température

Les jauges sont réalisées par diffusion de dopant P sur la structure de silicium dopé N. La résistance au repos et le facteur de jauge dépendent tous les deux de la température. Dans la plage de température d'utilisation du capteur, les valeurs des coefficients de température correspondants sont données par les courbes de la figure 14.5.

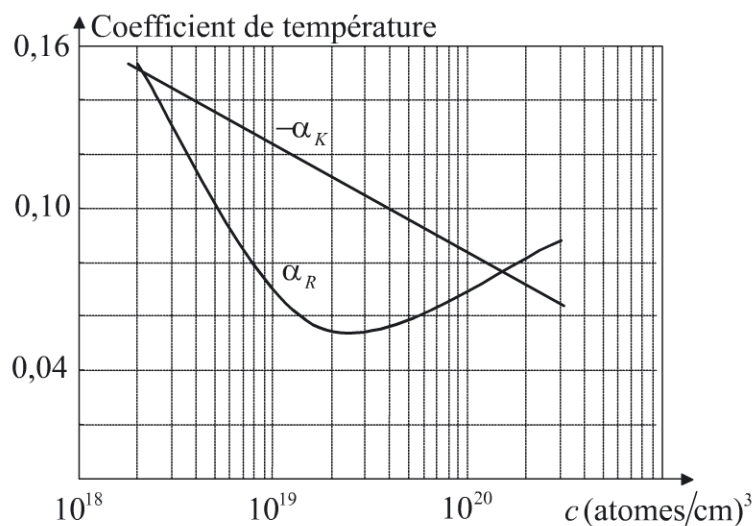


Figure 14.6 - Coefficients de température de la résistance et du coefficient de jauge

14.7 Déterminer la valeur de la concentration à adopter pour que la variation de la résistance d'une jauge sous l'action de la contrainte soit, au premier ordre, indépendante de la température. On notera R_0 et K_0 respectivement les valeurs de la résistance au repos et du facteur de jauge à la température $T_0 = 0^\circ\text{C}$.

14.8 La condition précédente étant réalisée pour la valeur la plus élevée de la concentration, montrer que la mesure dépend de la température au travers de la résistance des jauges au repos.

14.9 Pour compenser cette dérive, on introduit entre l'alimentation et le pont un dipôle de compensation quasiment linéaire avec la température. Celui-ci est constitué d'une CTN en parallèle avec une résistance fixe et dont la résistance dans la plage d'évolution de la température est correctement approchée par $R_c = 2R_{c0}(1 + \alpha_c T)$. Ce dipôle est réalisé en couche mince sur le bâti de façon à être à la même température que les jauges. Montrer qu'un réglage judicieux de la valeur des caractéristiques de ce dipôle permet d'annuler l'effet thermique sur la tension de mesure. Pour la suite, on note $R_0 + R_{c0} = \beta R_0$.

III. Non-linéarité

La jauge est en réalité non linéaire. La caractéristique de la jauge sur son étendue de mesure maximale est donnée figure 14.7 pour une température de 0 °C.

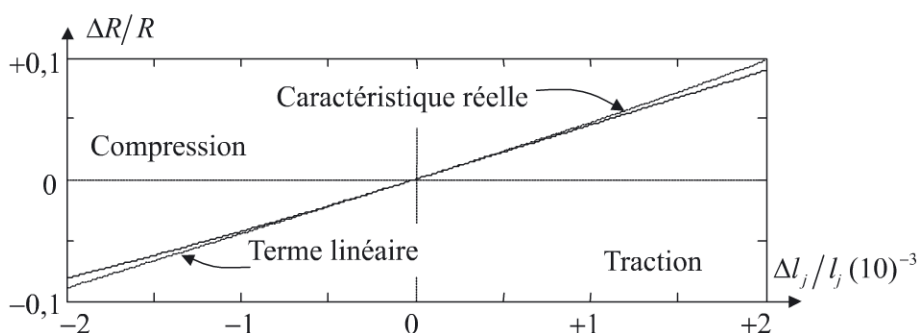


Figure 14.7 - Non-linéarité de la variation de la résistance avec la déformation

Une bonne approximation du facteur de jauge est donnée par :

$$K_0 = K_1 + K_2 \frac{\Delta l_j}{l_j} \tag{14.1}$$

avec $K_1 = 45$ et $K_2 = 10^3$.

Donner dans ce cas l'expression de la tension de mesure à 0 °C et évaluer la non-linéarité.

IV. Comportement statique

14.10 On montre que la flèche maximale prise par les poutres (c'est-à-dire le déplacement selon z de leur extrémité en $y = L$) est donnée à l'équilibre par :

$$z(L) = -\frac{FL^3}{2E I e^3} \tag{14.2}$$

14 • Accéléromètre piézorésistif basses fréquences

En remarquant que $z(G) = z(L) = z_{\max}$ où G est le centre de gravité de la masse sismique, montrer qu'à l'équilibre la réaction des poutres sur la masse sismique peut s'écrire comme la force de rappel d'un ressort de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de E , l , e et L .

14.11 La masse M du bâti étant très supérieure à la masse sismique, calculer la pulsation propre ω_0 du système en fonction de k et m .

14.12 Ecrire, dans l'approximation linéaire, la tension de mesure du pont de la figure 14.5 en fonction de la position $z(G)$. Montrer que l'on peut écrire $V_{mes} = Az(G)$ et calculer la tension de mesure si la masse sismique n'est soumise qu'à son propre poids. On donne $V_g = 10 \text{ V}$, $\beta = 1,2$ et on considère que $l_j \ll L$.

V. Comportement dynamique

14.13 La masse sismique est maintenant soumise en plus de son poids à une accélération extérieure \vec{a} . On montre de plus que l'amortissement du mouvement est du type fluide (force $-\lambda \dot{z}$) et est essentiellement dû à l'air environnant la masse sismique. Établir l'équation différentielle en z du centre de gravité de la masse sismique en fonction de m , k , λ , a et g .

14.14 Donner l'expression de la fonction de transfert $H(p) = V_{mes}/(g + a)$ dans le domaine de Laplace en introduisant la fréquence propre et le coefficient d'amortissement $\xi = \lambda/2 \sqrt{mk}$.

14.15 On se place en régime permanent sinusoïdal. Donner l'expression de la sensibilité $S(\omega)$ en fonction de A , ω , ω_0 et ξ .

14.16 On suppose que l'on se trouve à l'amortissement critique. Donner la nouvelle expression de la sensibilité.

14.17 Calculer $S(0)$ et $S(\omega_0)$.

14.18 Calculer la fréquence de coupure f_1 % à 1 % de cet accéléromètre.

14.19 En l'état, quelle fragilité présente cet accéléromètre et comment y remédier ?

I. Principe de base du capteur

14.1 À la surface d'une poutre, on a $z = e/2$. Le moment quadratique I est par définition :

$$I = \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-e/2}^{-e/2} z^2 dz dx = \frac{le^3}{12}$$

On en déduit la contrainte σ_{yy} et la déformation $\varepsilon_{//,+}$ à la surface de la poutre à la distance y du bâti :

$$\sigma_{yy}(y) = \frac{e}{2} \frac{M_f(y)}{I} = \frac{3F(L-2y)}{2le^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{//}(y) = \frac{\sigma_{yy}(y)}{E} = \frac{3F(L-2y)}{2le^2E} \quad (14.3)$$

14.2 La contrainte maximale σ_{\max} que doit supporter le matériau est liée à la déformation maximale par $\sigma_{\max} = \varepsilon_{\max}E = 280 \text{ N/mm}^2$. D'après (14.3), la contrainte maximale se situe en $y = 0$ et $y = L$, soit évidemment aux encastremets des poutres. Le module de la force maximale F subie par la masse sismique est donné à l'équilibre par $5mg/2$. On doit donc avoir :

$$m = \frac{1}{5g} \sigma_{\max} \frac{4le^2}{3L} \simeq 0,30 \cdot 10^{-3} \text{ g} \quad (14.4)$$

(14.4) conduit à un volume de la masse sismique égal à $v = m/d = 0,13 \text{ mm}^3$.

14.3 Les jauges étant diffusées donc incluses dans le matériau des poutres, elles sont parfaitement solidaires de celles-ci. On néglige l'épaisseur de la jauge. La déformation moyenne $\Delta l_j/l_j$ d'une jauge de longueur l_j centrée en y_0 est alors égale à la déformation moyenne à la surface de la poutre d'un élément de longueur l_j centré en y_0 et donc donnée par :

$$\varepsilon_{\text{moy}} = \frac{1}{l_j} \int_{y_0-l_j/2}^{y_0+l_j/2} \frac{3F(L-2y)}{2le^2E} dy = \frac{3F(L-2y_0)}{2le^2E} = \varepsilon_{//}(y_0)$$

14.4 Proche du bâti, la déformation est maximale et correspond à une élongation, $\varepsilon_{//}(y) > 0$. Elle passe par 0 en $L/2$ et redevient maximale mais de signe opposé à l'approche de la masse sismique, elle correspond alors à une contraction, $\varepsilon_{//}(y) < 0$. On doit positionner les jauges de façon à ce qu'elles enregistrent une déformation maximale, c'est-à-dire centrée en $y_0 = l_j/2$ pour celles proches du bâti (indiquées +) et

14 • Accéléromètre piézorésistif basses fréquences

en $y_0 = L - l_j/2$ pour celles proches de la masse sismique (indicées -). Avec (14.3), les déformations correspondantes sont données par :

$$\varepsilon_+ = \frac{3F(L - l_j)}{2le^2E} \quad \text{et} \quad \varepsilon_- = -\frac{3F(L - l_j)}{2le^2E} = -\varepsilon_+.$$

14.5 On note $R_1 = 2R + \Delta R_1$, $R_2 = 2R + \Delta R_2$, $R_3 = 2R + \Delta R_3$ et $R_4 = 2R + \Delta R_4$. Compte tenu du positionnement des jauges, on a :

$$\Delta R_1 = \Delta R_3 = 2KR\varepsilon_+ \quad \text{et} \quad \Delta R_2 = \Delta R_4 = 2KR\varepsilon_- = -2KR\varepsilon_+$$

14.6 D'après le schéma de la figure 14.5, il vient immédiatement :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) V_g = \frac{R(1 + K\varepsilon_+) - R(1 + K\varepsilon_-)}{2R} V_g = K\varepsilon_+ V_g \quad (14.6)$$

La mesure est linéaire puisque les capteurs ont été considérés linéaires en première approximation et que le pont entier push-pull constitue un circuit de conditionnement linéaire.

II. Effet de la température

14.7 On pose $\Delta R = KR\varepsilon_+$. Au premier ordre en T , il vient :

$$\Delta R = RK\varepsilon_+ = R_0(1 + \alpha_R T)K_0(1 + \alpha_K T)\varepsilon_+ \simeq R_0K_0(1 + (\alpha_R + \alpha_K)T)\varepsilon_+$$

Pour que ΔR soit indépendant de la température, il suffit d'adopter une concentration telle que l'on ait $\alpha_R + \alpha_K = 0$. D'après la figure 14.6, ceci a lieu pour $c \simeq 2.10^{18}$ atomes/cm³ et $c \simeq 1,4.10^{20}$ atomes/cm³. On a alors $\Delta R \simeq R_0K_0\varepsilon_+$

14.8 (14.6) peut encore s'écrire :

$$V_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) V_g = \left(\frac{R + \Delta R}{2R} - \frac{R - \Delta R}{2R} \right) V_g = \frac{\Delta R}{R} V_g$$

En utilisant les résultats précédents, il vient :

$$V_{mes} \simeq \frac{K_0R_0\varepsilon_+}{R_0(1 + \alpha_R T)} V_g$$

Sous les hypothèses faites, les variations de la température affectent la mesure au travers de la valeur de la résistance au repos de la jauge.

14.9 La tension de mesure s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} V_g \\ &= \frac{\Delta R}{R_0(1 + \alpha_R T) + R_{c0}(1 + \alpha_c T)} V_g = \frac{K_0R_0\varepsilon_+}{R_0(1 + \alpha_R T) + R_{c0}(1 + \alpha_c T)} V_g \end{aligned}$$

La résistance au repos a un coefficient thermique α_R positif et le dipôle de compensation un coefficient thermique α_c négatif. Pour que la tension de mesure soit indépendante de la température, il suffit de fixer $\alpha_c = -R_0\alpha_R/R_{c0}$. Pour la concentration d'atomes dopants choisie, soit ici $c \approx 1,4 \cdot 10^{20}$ atomes/cm³, on doit avoir d'après les courbes de la figure 14.6 :

$$\alpha_c \approx -0,075R_0/R_{c0}$$

Avec $R_0 + R_{c0} = \beta R_0$, la tension de mesure s'écrit alors :

$$V_{mes} = \frac{K_0\varepsilon_+}{\beta} V_g$$

La tension de mesure est indépendante de la température mais ceci se fait au prix d'une diminution de la sensibilité par rapport à (14.6) puisque $\beta > 1$.

III. Non-linéarité

On a maintenant d'après (14.1), $K_0 = K_1 + K_2\varepsilon_+$:

La tension de mesure s'écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{mes} &= \frac{R_1R_3 - R_2R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} V_g & (14.7) \\ &= \frac{(R_0(1 + K_1\varepsilon_+ + K_2\varepsilon_+^2))^2 - (R_0(1 - K_1\varepsilon_+ + K_2\varepsilon_+^2))^2}{(2R_0(1 + K_2\varepsilon_+^2))^2 + R_{c0}(4R_0(1 + K_2\varepsilon_+^2))} V_g = \frac{K_1\varepsilon_+}{\beta + K_2\varepsilon_+^2} V_g \end{aligned}$$

Si on utilise l'approximation linéaire de (14.7) plutôt que l'expression exacte pour évaluer la déformation, l'erreur de linéarité engendrée est :

$$\frac{\delta V_{mes}}{V_{mes}} = \frac{\frac{K_1\varepsilon_+V_g}{\beta} - \frac{K_1\varepsilon_+V_g}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + K_2\varepsilon_+^2/\beta}}{\frac{K_1\varepsilon_+V_g}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + K_2\varepsilon_+^2/\beta}} = \frac{K_2\varepsilon_+^2}{\beta}$$

Compte tenu de l'étendue de mesure maximale et que $\beta > 1$, on a au pire, $\delta V_{mes}/V_{mes} = 0,4 \%$. Ceci peut être considéré comme négligeable pour la suite du problème et on écrira :

$$V_{mes} = \frac{K_1\varepsilon_+V_g}{\beta} \tag{14.8}$$

IV. Comportement statique

14.10 A l'équilibre de la masse sismique on a $2\vec{F} + \vec{F}_k = \vec{0}$ où \vec{F}_k représente la réaction des poutres sur la masse sismique. En utilisant (14.2), on en déduit :

$$F_k = -2F = -\frac{4ELe^3}{L^3}z(G) = -kz(G)$$

La réaction des poutres sur la masse sismique est équivalente à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur $k = 4ELe^3/L^3 = 89,6 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$.

14.11 La pulsation propre du système est donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} = 546,5 \text{ rad.s}^{-1}$$

14.12 Dans l'approximation linéaire, on a d'après (14.2), (14.5) et (14.8) :

$$V_{mes} \approx \frac{K_1 \varepsilon + V_g}{\beta} = K_1 \frac{3F(L - l_j)}{2\beta l e^2 E} V_g = -K_1 \frac{3e(L - l_j)}{\beta L^3} z(G) V_g$$

Avec $l_j \ll L$, il vient :

$$V_{mes} \approx -K_1 V_g \frac{3e}{\beta L^2} z(G) = Az(G) \quad (14.9)$$

Avec $\beta = 1,2$, l'application numérique donne $A = -4,5 \text{ V/mm}$. Si la masse sismique n'est soumise qu'à son propre poids, on a $z(G) = -mg/k$ et on obtient une tension de mesure $V_{mes} = 0,151 \text{ V}$.

V. Comportement dynamique

14.13 Pour une accélération de valeur algébrique a , l'équation différentielle décrivant la position z du centre de gravité de la masse sismique est $m\ddot{z} = -mg - kz - \lambda\dot{z} - ma$

14.14 Dans le domaine de Laplace (variable p), on obtient :

$$z = -m(a + g)/(m p^2 + \lambda p + k)$$

Soit en introduisant la fréquence propre ω_0 et le coefficient d'amortissement $\xi = \lambda/2 \sqrt{mk}$ et en utilisant le résultat (14.9) :

$$V_{mes} = Az(G) = -A \frac{a + g}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

La fonction de transfert $H(p) = V_{mes}/(g + a)$ est donc donnée par :

$$H(p) = -\frac{A}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

14.15 On en déduit la sensibilité $S(\omega)$ en régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω :

$$S(\omega) = -\frac{A}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (14.10)$$

Le système a un comportement de filtre du second ordre.

14.16 À l'amortissement critique, $\xi = 1$, (14.10) devient :

$$S(\omega) = -\frac{A}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (14.11)$$

14.17 À partir de (14.11), pour le cas statique et pour la pulsation propre, on obtient :

$$S(0) = -A/\omega_0^2 = 151 \text{ mV/g} \quad \text{et} \quad S(\omega_0) = -A/2\omega_0^2 = 75 \text{ mV/g}$$

14.18 La fréquence de coupure à 1 % est obtenue en résolvant :

$$S(\omega_{1\%}) = S(0)(1 - 1 \%)$$

ce qui entraîne $\omega_{1\%} \simeq 0,1\omega_0$ soit $f_{1\%} \simeq 9 \text{ Hz}$.

Cette fréquence de coupure est relativement basse mais est particulièrement bien adaptée à la mesure d'une accélération constante donc bien adaptée à une utilisation de type inclinomètre par exemple.

14.19 Si le système est soumis à des accélérations trop importantes comme c'est le cas lors d'un choc, la déformation des poutres peut dépasser la limite élastique et entraîner la rupture de celles-ci. Une façon de pallier le problème est de prévoir des butées mécaniques limitant l'excursion de la masse sismique.

14 • Accéléromètre piézorésistif basses fréquences



La technique de conversion piézorésistive des accéléromètres micro-usinés actuels est très fortement concurrencée par la conversion capacitive. Dans ce type de conversion, les faces de la masse sismique forment avec des contre-électrodes des systèmes de condensateurs fonctionnant en mode push-pull. Afin de multiplier les surfaces des armatures en regard, on utilise une structure en peignes interdigités. L'un des peignes est constitué par la masse sismique, l'autre par le bâti.

En utilisant les forces électrostatiques entre électrodes, il est possible d'effectuer un asservissement de la masse sismique à sa position d'équilibre. Comme il n'y a plus de mouvement de celle-ci, on améliore grandement la bande passante et la linéarité du système et on évite les problèmes liés au phénomène de résonance mécanique de la masse sismique. Au lieu d'utiliser une grandeur de retour continue, l'asservissement peut être réalisé selon un mode $\Sigma - \Delta$. Ce sont alors les trains d'impulsions permettant l'asservissement de la masse sismique qui sont à l'image de l'accélération à mesurer. On dispose alors d'une information numérique directement en sortie du capteur et on évite la classique conversion analogique-numérique.

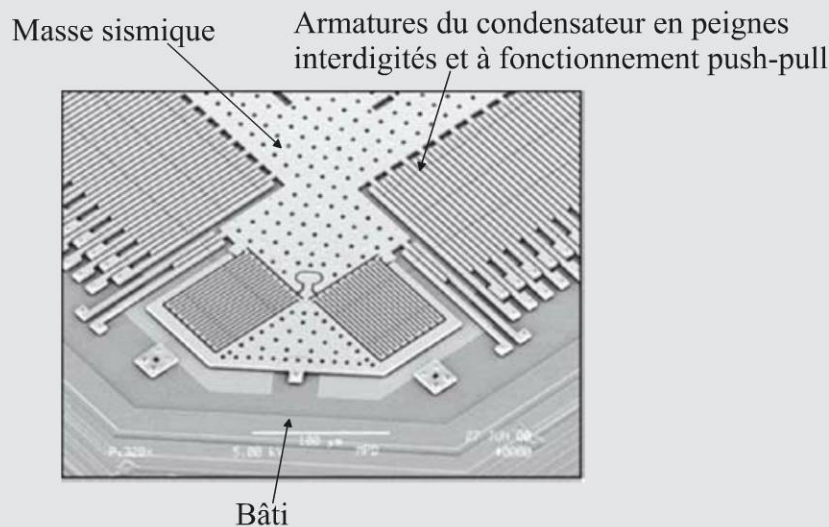


Figure 14.8 - Accéléromètre capacitif (documentation Analog Devices)

PROBLÈME : Capteur de courant à fibre optique

Les capteurs de courant à fibre optique utilisent la biréfringence induite par un champ magnétique (effet Faraday) dans une boucle de fibre optique entourant un conducteur parcouru par un courant dont on veut déterminer la valeur.

Ces capteurs à fibre optique trouvent leur place au sein des réseaux de distribution d'énergie en hautes tensions et courants intenses. Ils offrent une excellente isolation galvanique, restent de petite taille par rapport aux technologies concurrentes, sont insensibles aux champs magnétiques perturbateurs et sont insensibles à la position du conducteur à l'intérieur de la boucle optique.

Ce problème présente de façon simplifiée une des techniques possibles de mesure.

Énoncé

On considère le système de mesure de courant à fibre optique de la figure 15.1.

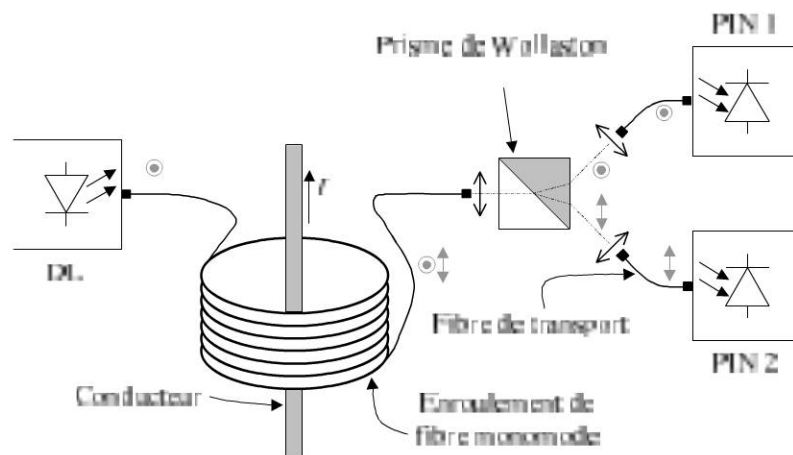


Figure 15.1 - Principe de la mesure

Ce système de mesure est constitué d'un émetteur (diode laser : DL), de deux récepteurs identiques (photodiodes PIN), d'une fibre de silice monomode dite fibre de mesure de longueur $L = 20$ m et d'atténuation linéique $\alpha = 10$ dB/km, d'un prisme de Wollaston, d'une lentille assurant l'interface fibre de mesure-prisme de Wollaston. En sortie du prisme, les deux polarisations suivent des chemins semblables, à savoir passage d'une lentille de focalisation, propagation dans une fibre de transport

15 • Capteur de courant à fibre optique

de faible longueur et réception sur une photodiode PIN. La fibre de mesure est enroulée en spires jointives sur un support amagnétique cylindrique (non représenté ici), de rayon $a = 10$ cm, autour d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité I .

La diode laser émet en continu la puissance $\phi_{DL} = 5$ mW, monochromatique à la longueur d'onde $\lambda = 633$ nm. On suppose que la lumière émise est polarisée rectilignement dans une direction perpendiculaire au plan de la figure 15.1 et que la puissance émise est parfaitement stable. Par hypothèse la direction ordinaire (symbole \odot sur la figure 15.1) du prisme de Wollaston est confondue avec la direction de polarisation de la diode laser. La sensibilité des photodiodes est $S_{PIN} = 0,5$ A/W et leur courant d'obscurité est $I_{obs} = 3$ nA.

Les pertes de couplage diode laser-fibre de mesure et fibre de transport-photodiode sont estimées à 5 dB chacune. La perte de couplage par la lentille, de la fibre de mesure au prisme, est estimée à 2 dB. La perte de couplage prisme-fibre de transport est de 4 dB pour chaque voie. Par voie (polarisation selon la direction ordinaire ou selon la direction extraordinaire), le prisme entraîne une perte supplémentaire de 1 dB. Les pertes d'atténuation par les fibres de transport sont considérées comme négligeables.

15.1 On considère pour l'instant que le courant dans le conducteur est nul. La fibre de transport, la fibre de mesure et les autres éléments sont supposés conserver la polarisation de la lumière qu'ils véhiculent. La polarisation en sortie de la fibre de mesure reste alors perpendiculaire au plan de la figure 15.1.

Estimer les courants I_1 et I_2 délivrés par les photodiodes.

Soit une onde polarisée rectilignement. Celle-ci traverse une région où règne un champ magnétique \vec{H} . On peut montrer que sur une longueur élémentaire $d\vec{l}$ le long d'un rayon lumineux associé à l'onde, la polarisation de l'onde tourne d'un angle élémentaire $d\theta$ donné par $d\theta = V_e \vec{H} \cdot d\vec{l}$ où V_e est la constante de Verdet ($V_e = 4,5 \cdot 10^{-6}$ rad/A à la longueur d'onde $\lambda = 633$ nm) : c'est l'effet Faraday.

15.2 Le conducteur est maintenant parcouru par un courant continu I . Déterminer en fonction de ce dernier, la valeur de l'angle de rotation total θ du plan de polarisation de l'onde lors de son parcours dans l'enroulement de fibre. On fera l'hypothèse que les autres éléments du dispositif sont toujours perpendiculaires à la direction du champ magnétique créé par le conducteur.

15.3 Calculer les deux nouvelles valeurs des courants des photodiodes. On donne $I = 3\,000$ A.

15.4 Pour traiter les signaux, on utilise le circuit de conditionnement schématisé figure 15.2.

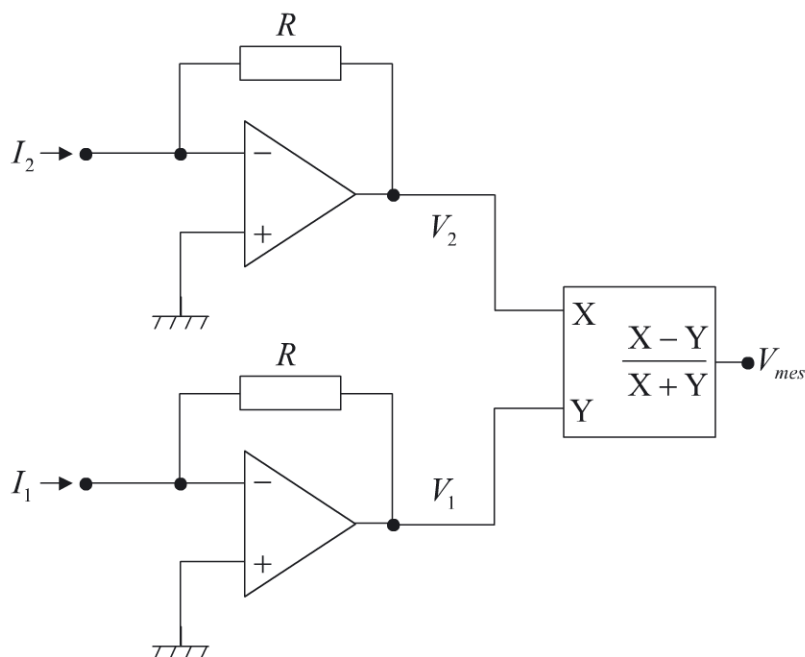


Figure 15.2 - Conditionnement

Avec ce schéma, V_{mes} est non nul pour un courant I nul. Que modifier dans le montage de la figure 15.1 pour remédier à ce problème ?

15.5 Déterminer alors l'expression de la tension de mesure V_{mes} et la sensibilité S_{mes} de cette mesure.

15.6 Le courant à mesurer est assez faible pour que l'on puisse considérer θ petit. Calculer la tension de mesure et la sensibilité pour $I = 100 \text{ A}$.

Corrigé détaillé

15.1 La puissance d'émission de la diode laser est, si on l'exprime en dBm :

$$\phi_{DL}(\text{dBm}) = 10 \log \left(\frac{\phi_{DL}(\text{mW})}{1 \text{ mW}} \right) = 7,0 \text{ dBm}$$

Depuis la diode laser, 5 dB sont perdus à la connexion de la diode laser à la fibre de transport, les 20 m de fibre enroulée entraînent une perte négligeable de $\alpha L = 0,2 \text{ dB}$ et 2 dB sont perdus à l'injection dans le prisme de Wollaston. La polarisation n'ayant pas été modifiée par hypothèse, toute l'intensité se trouve sur la voie ordinaire du

15 • Capteur de courant à fibre optique

prisme ce qui entraîne une perte propre de 1 dB. 4 dB sont de nouveau perdus à l'injection dans la fibre de transport et 5 dB à l'injection sur la photodiode. Les pertes sont donc estimées à 17,20 dB. La puissance ϕ_1 reçue par la photodiode PIN 1 est donc :

$$\phi_1 = 7,0 \text{ dBm} - 17,2 \text{ dB} = -10,2 \text{ dBm} = 95,5 \text{ } \mu\text{W} \quad (15.1)$$

La valeur du courant délivré par la photodiode PIN 1 s'en déduit aisément et on a :

$$I_1 = S_{PIN} \cdot \phi_1 + I_{obs} = 47,7 \text{ } \mu\text{A}$$

Comme aucune composante de polarisation ne se propage sur le mode extraordinaire du prisme, la puissance ϕ_2 reçue par la photodiode PIN 2 est nulle. Le courant délivré par celle-ci est donc égal au courant d'obscurité.

15.2 À part la fibre mesure, aucun des autres éléments n'introduit de modification de la polarisation de la lumière transmise jusqu'aux photodiodes. L'angle de rotation total du plan de polarisation est donc donné par :

$$\theta = \int_{\text{enroulement de fibre}} V_e \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

D'après le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique sur un contour fermé Γ est égale au courant total traversant toute surface s'appuyant sur ce contour. Si le brin de fibre à l'entrée de l'enroulement est placé au plus proche du brin de fibre à la sortie de l'enroulement, on peut considérer que l'enroulement de fibre constitue un contour fermé. On a donc :

$$\theta = V_e \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = V_e NI$$

N représente le nombre de spires de fibre donné par $N = L/2\pi a \simeq 32$. L'angle total de rotation par ampère du courant dans le conducteur est donc $144 \cdot 10^{-6} \text{ rad/A} = 8,25 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{A}$.

L'angle de rotation du plan de polarisation ne dépend que du courant à mesurer et du nombre de fois où la fibre entoure le conducteur. Il n'y a donc aucune erreur engendrée par l'excentrement du conducteur par rapport à l'enroulement de fibre ni par le fait que le conducteur puisse être ou non rectiligne.

15.3 La polarisation en sortie de la fibre de mesure ayant tourné de l'angle θ précédemment calculé, il convient de projeter la direction de la polarisation sur les directions ordinaire et extraordinaire du prisme de Wollaston. La puissance véhiculée par l'onde ordinaire est alors proportionnelle à $\cos^2 \theta$ et la puissance véhiculée par l'onde extraordinaire proportionnelle à $\sin^2 \theta$. Toutes autres grandeurs étant

restées identiques par ailleurs, les puissances reçues par les photodiodes sont donc d'après (15.1) :

$$\phi_1 = 95,5 \cdot \cos^2 \theta \text{ } \mu\text{W} \quad \text{et} \quad \phi_2 = 95,5 \cdot \sin^2 \theta \text{ } \mu\text{W}$$

Les courants correspondants sont alors donnés par :

$$I_1 = 47,7 \cdot \cos^2 \theta \text{ } \mu\text{A} \quad \text{et} \quad I_2 = 47,7 \cdot \sin^2 \theta \text{ } \mu\text{A}$$

Pour $I = 3\,000 \text{ A}$, on obtient $\theta = 24,75^\circ$ soit $I_1 = 39,3 \text{ } \mu\text{A}$ et $I_2 = 8,4 \text{ } \mu\text{A}$.

15.4 Il suffit de tourner le prisme de Wollaston de 45° . Ainsi pour un courant I nul donc pour $\theta = 0$, on aura d'après ce qui précède :

$$I_1 = 47,7 \cdot \cos^2 \pi/4 = 23,8 \text{ } \mu\text{A} \quad \text{et} \quad I_2 = 47,7 \cdot \sin^2 \pi/4 = 23,8 \text{ } \mu\text{A}$$

Pour un courant I non nul les courants seront :

$$I_1 = 47,7 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \text{ } \mu\text{A} \quad \text{et} \quad I_2 = 47,7 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \text{ } \mu\text{A} \quad (15.2)$$

15.5 Les amplificateurs opérationnels (supposés idéaux) de la figure 15.2 réalisent une conversion courant-tension. On a $V_1 = -RI_1$ et $V_2 = -RI_2$. En tenant compte de (15.2), la tension de mesure V_{mes} s'écrit :

$$V_{mes} = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1} = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)} = \sin 2\theta = \sin(2V_eNI)$$

La sensibilité de la mesure s'en déduit immédiatement :

$$S_{mes} = 2V_eN \cos(2V_eNI)$$

Cette sensibilité est maximale pour les faibles valeurs du courant I .

15.6 Pour $I = 100 \text{ A}$, on a $\theta = 0,825^\circ = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$.

La tension de mesure est donc approximativement $V_{mes} \simeq 2V_eNI = 28,8 \text{ mV}$ et la sensibilité $S_{mes} \simeq 2V_eN = 0,288 \text{ mV/A}$.

Pour les faibles courants, la mesure est relativement linéaire car, comme $V_{mes} = \sin(2V_eNI)$, le terme de non-linéarité est d'ordre 3 en $2V_eNI$.



L'étendue de mesure du capteur étudié ici peut s'adapter à la mesure à effectuer en changeant simplement le nombre de tours de fibre bobinés autour du conducteur et l'angle entre les directions ordinaire et extraordinaire du prisme

15 • Capteur de courant à fibre optique

de Wollaston et le plan de la figure 15.1 (on règle ainsi la valeur du courant I pour laquelle on désire fixer $V_{mes} = 0$).

Un problème lié à la puissance mesurée sur chacune des voies se pose. Pour chaque voie, la puissance mesurée est la même pour θ , $-\theta$ et $\pi \pm \theta$ si bien que l'électronique de conditionnement doit être modifiée si jamais l'excursion du mesurande courant I mène à cette indétermination.

Des techniques plus complexes ont été développées afin de pallier les défauts de celle présentée ici. Essentiellement, ces techniques sont basées sur la réalisation d'un interféromètre de type Sagnac comme le système présenté figure 15.3.

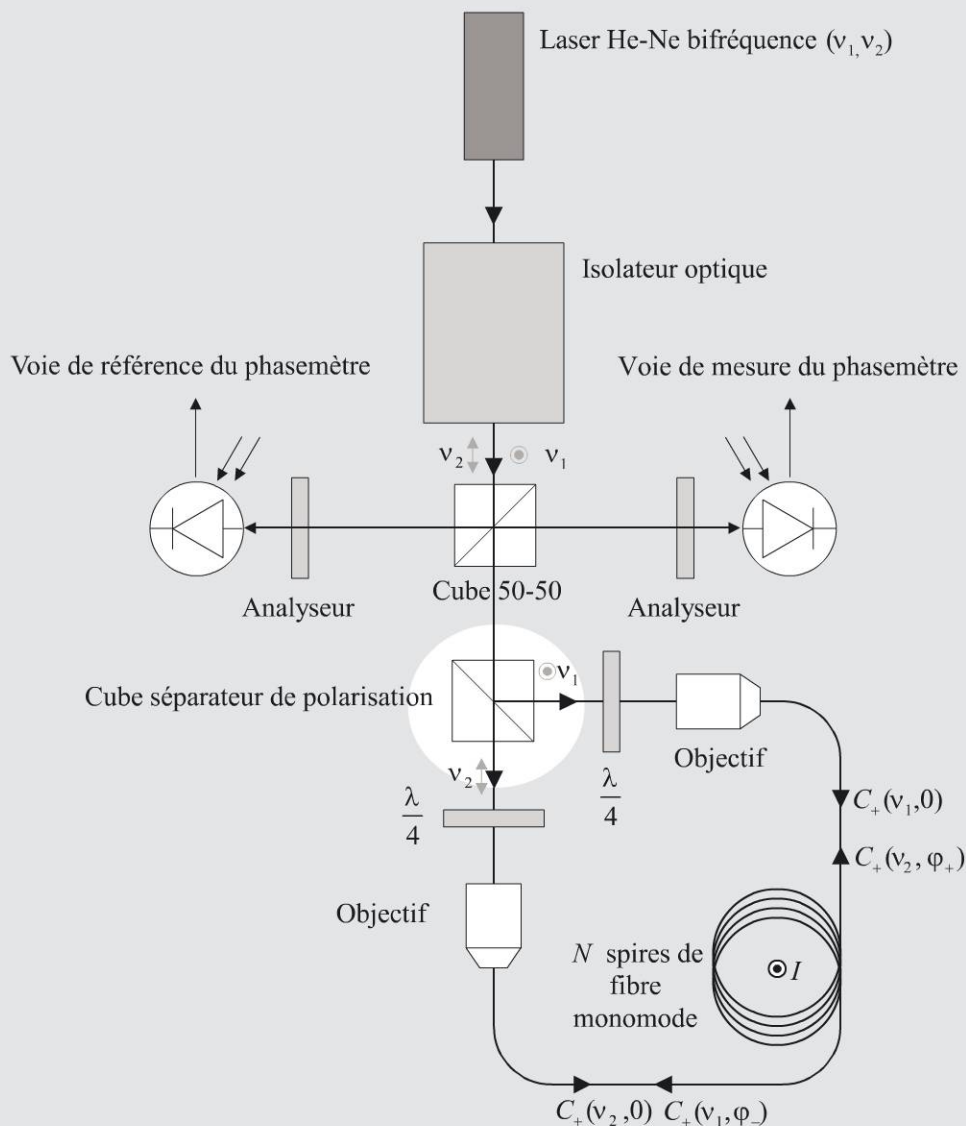


Figure 15.3 - Ampèremètre à interféromètre de Sagnac à laser bifréquence et détection hétérodyne (les sigles \odot et \updownarrow désignent les deux polarisations rectilignes orthogonales et le sigle C_+ la polarisation circulaire droite) (d'après P. Ferdinand, « Capteurs à fibres optiques », 1992 Editions Tec & Doc.)

PROBLÈME : Ampèremètre à ceinture de Rogowski

Un certain nombre d'instruments de mesure du courant ou ampèremètres fonctionnent sur le principe de la ceinture de Rogowski. Dans ces ampèremètres, on détecte la force électromotrice produite dans un bobinage par la variation du champ d'induction magnétique créé par le courant à mesurer. Bien évidemment, il est nécessaire que le courant soit variable dans le temps.

Énoncé

On considère le montage représenté figures 16.1 et 16.2. Un fil conducteur est enroulé sur un tore de matériau diélectrique. On suppose que le fil utilisé est de diamètre négligeable et que le bobinage est formé d'un très grand nombre N de spires jointives de rayon a . Ce tore, qui garde suffisamment de souplesse pour pouvoir être ouvert et refermé, constitue une ceinture de Rogowski. Cette dernière est ouverte puis refermée de façon à introduire en son centre un conducteur rectiligne, supposé indéfini, confondu avec l'axe z et parcouru par un courant $I(t)$.

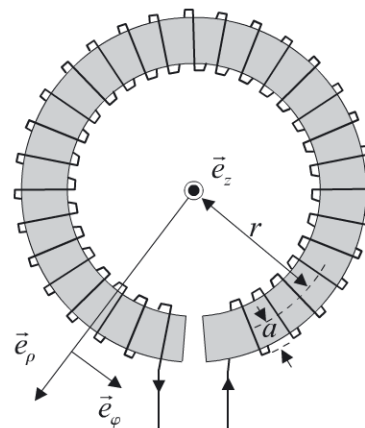


Figure 16.1 - Ceinture de Rogowski

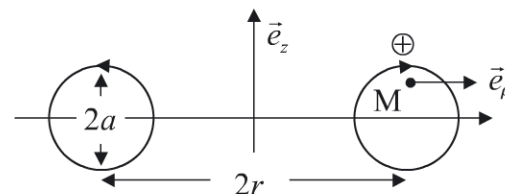


Figure 16.2 - Ceinture de Rogowski en coupe

16.1 Étudier la symétrie du problème et en déduire les propriétés du champ d'induction magnétique \vec{B} créé par le courant $I(t)$ en tout point M de l'espace : orientation du champ dans le repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ et dépendance en fonction des variables ρ , φ et z .

16.2 Par application du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ d'induction magnétique \vec{B} dans tout l'espace.

16 • Ampèremètre à ceinture de Rogowski

16.3 Calculer le flux ϕ du champ magnétique à l'intérieur d'une spire. On donne :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + u \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - u^2}} \quad \text{si } u < 1 \quad (16.1)$$

Dans l'approximation où $a \ll r$, déterminer le champ d'induction moyen $\langle B \rangle$ sur la surface d'une spire et le comparer au champ $B(r)$ au centre de la spire.

16.4 Donner l'expression du flux total ϕ_t dans le tore et en déduire l'expression de la force électromotrice induite e aux bornes de ce dernier.

16.5 On déplace le conducteur parcouru par le courant $I(t)$ de Δr parallèlement à lui-même. Montrer qu'au moins jusqu'à l'ordre 2 en $\Delta r/r$, il n'y a pas d'effet sur la valeur de ϕ_t . On supposera que le diamètre $2a$ du bobinage est suffisamment petit devant le rayon moyen r du tore pour que le résultat de la question 4 quant au champ moyen sur la spire reste exact, même si le fil est excentré.

16.6 Pour la suite du problème, on considère de nouveau que le conducteur est centré par rapport au tore. Montrer que l'ampèremètre est insensible aux champs extérieurs tant que l'on peut considérer ceux-ci comme uniformes dans le volume du tore.

16.7 Quel principal problème présente en l'état le dispositif de mesure réalisé ?

16.8 L'électronique de conditionnement est présentée figure 16.3 où les amplificateurs opérationnels peuvent être considérés comme idéaux.

Établir la fonction de transfert $H(p) = V_{mes}(p)/e(p)$ de l'électronique de conditionnement. Que réalise ce conditionneur si $R_2 C_2$ est suffisamment grand ?

16.9 Donner la sensibilité S_c du système de mesure du courant réalisé.

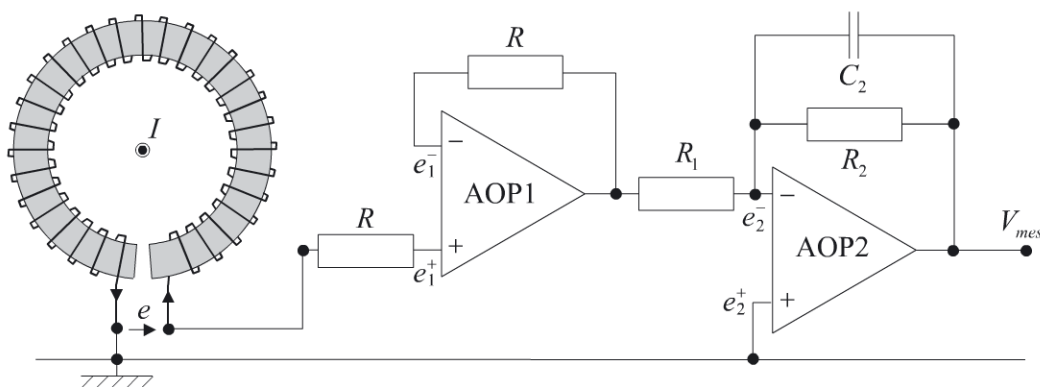


Figure 16.3 - Circuit de conditionnement

16.1 On utilise le système de coordonnées cylindriques de la figure 16.1. Le fil pouvant être considéré comme infini, il y a invariance du problème par translation du fil selon l'axe z et par rotation autour de cet axe. Le module B de l'induction magnétique ne peut donc dépendre que de la variable ρ .

L'induction magnétique \vec{B} est perpendiculaire aux plans de symétrie de la distribution de courant. Soit le point $M(\rho, \varphi, z)$ de l'espace où l'on calcule le champ. Le plan contenant ce point et le fil rectiligne est plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ d'induction magnétique est donc orthoradial et au total on a donc $\vec{B} = B(\rho) \vec{e}_\varphi$.

16.2 On applique le théorème d'Ampère en calculant la circulation de \vec{B} sur un cercle Γ de rayon ρ . Il vient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(\rho) \vec{e}_\varphi \cdot \rho d\varphi \vec{e}_\varphi = \int_0^{2\pi} \rho B(\rho) d\varphi = 2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I(t)$$

Soit :

$$B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi\rho} \tag{16.2}$$

16.3 Considérons une spire du bobinage (figure 16.4) et calculons le flux ϕ de \vec{B} au travers de cette spire. Ce flux est donné par :

$$\phi = \int_{spire} \vec{B}(\rho) \cdot d\vec{S} \tag{16.3}$$

$d\vec{S}$ représente le vecteur élément de surface, perpendiculaire à la surface.

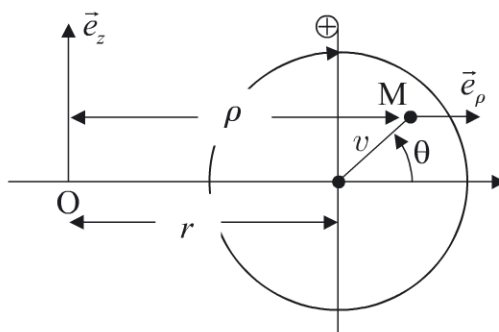


Figure 16.4 - Calcul du flux dans une spire

16 • Ampèremètre à ceinture de Rogowski

Telle qu'est prise l'orientation de la spire on a $d\vec{S} = vdv d\theta \vec{e}_\varphi$. Comme $\vec{B} = B(\rho) \vec{e}_\varphi$ avec $\rho = r + v \cos \theta$, en utilisant (16.2), (16.3) devient :

$$\phi = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{v dv d\theta}{r + v \cos \theta} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} r \int_0^{a/r} \int_0^{2\pi} \frac{u du d\theta}{1 + u \cos \theta}$$

Comme $u = v/r < 1$, en utilisant (16.1), il vient :

$$\phi = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} r \int_0^{a/r} \frac{2\pi u du}{\sqrt{1-u^2}} = \mu_0 I(t) r \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right] \quad (16.4)$$

Le champ moyen sur la spire est donné par :

$$\langle B \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_{spire} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\phi}{\pi a^2} = \frac{\mu_0 I(t) r}{\pi a^2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right] \quad (16.5)$$

Si on considère que $a \ll r$, (16.4) et (16.5) deviennent :

$$\phi \simeq \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \pi a^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \dots \right] \quad \text{et} \quad \langle B \rangle \simeq \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \dots \right]$$

En se limitant au terme principal, on obtient :

$$\langle B \rangle \simeq B(r) \quad \text{et} \quad \phi \simeq \pi a^2 B(r) \quad (16.6)$$

La courbe de la figure 16.5 présente l'erreur relative introduite sur le champ et sur le flux en considérant les expressions de (16.6) en place des valeurs vraies données par (16.4) et (16.5).

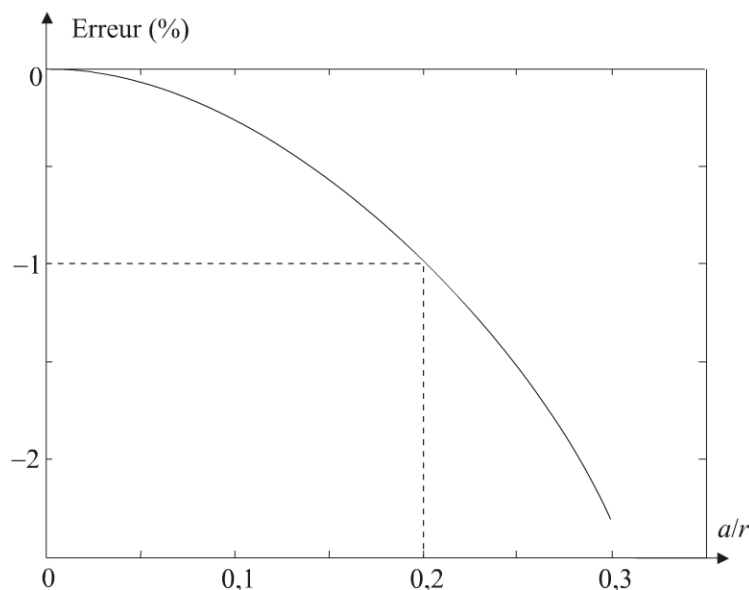


Figure 16.5 - Erreur relative sur l'induction et sur le flux

On remarque que tant que $a/r < 0,2$, l'erreur relative introduite reste inférieure à 1 %.

16.4 Le flux total ϕ_t dans le bobinage est la somme des flux dans les spires le constituant, comme elles sont identiques et au nombre de N , on obtient :

$$\phi_t = \mu_0 N I(t) r \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right]$$

La force électromotrice induite est donnée par la loi de Lenz, soit :

$$e = -\frac{d\phi_t}{dt} = -N\mu_0 R \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right] \frac{dI(t)}{dt} \quad (16.7)$$

16.5 On considère une spire du tore de centre M comme représentée sur la figure 16.6.

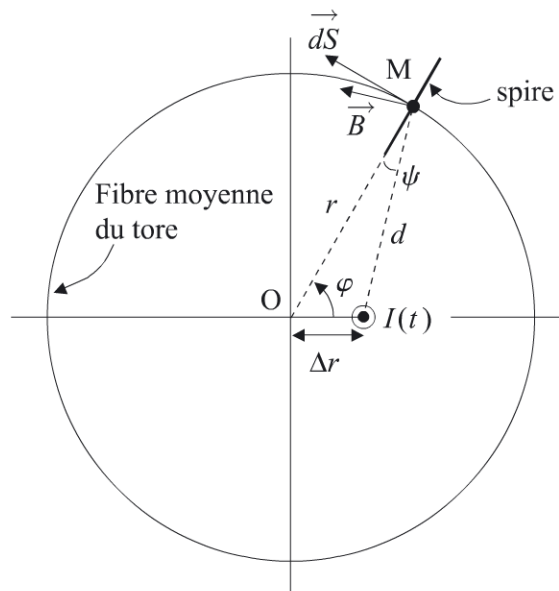


Figure 16.6 - Conducteur excentré

Le champ d'induction créé en M par le courant $I(t)$ s'écrit $B(M) = \mu_0 I(t) / 2\pi d$. Considérons un arc élémentaire du tore de longueur $rd\varphi$ en M. Il participe au flux total dans le tore proportionnellement au nombre de spires qu'il contient, soit $Nd\varphi/2\pi$. En utilisant l'approximation de la question 3, le flux dû à l'arc élémentaire considéré s'écrit :

$$d\phi(M) = \pi a^2 \frac{Nd\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi d} \cdot \cos \psi \quad (16.8)$$

D'après la figure 16.6, on a $d^2 = r^2 + \Delta r^2 - 2r\Delta r \cos \varphi$ et $\Delta r^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \psi$. (16.8) devient :

$$d\phi(M) = \pi a^2 \frac{Nd\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta r}{r} \cos \varphi}{1 - 2\frac{\Delta r}{r} \cos \varphi + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2} \quad (16.9)$$

On calcule le développement limité de (16.9) à l'ordre 2 en $\Delta r/r$. On obtient :

$$d\phi(\mathbf{M}) \simeq \pi a^2 \frac{Nd\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \cdot \left[1 + \frac{\Delta r}{r} \cos \varphi + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \cos 2\varphi \right]$$

Considérons M' le point symétrique de M par rapport à O pour lequel $\varphi' = \varphi + \pi$.
On a :

$$\begin{aligned} d\phi(\mathbf{M}) + d\phi(\mathbf{M}') &\simeq \pi a^2 \frac{Nd\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \cdot \left[1 + \frac{\Delta r}{r} \cos \varphi + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \cos 2\varphi \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{\Delta r}{r} \cos \varphi + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \cos 2\varphi \right] \quad (16.10) \\ &= \pi a^2 \frac{Nd\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} 2 \left[1 + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \cos 2\varphi \right] \end{aligned}$$

Le flux total est obtenu par intégration de (16.10) selon φ :

$$\begin{aligned} \phi_t &= \int_0^\pi a^2 \frac{\mu_0 NI(t)}{2\pi r} \left[1 + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \cos 2\varphi \right] d\varphi \quad (16.11) \\ &= \frac{\mu_0 NI(t)}{2\pi r} \pi a^2 = \frac{\mu_0 NI(t) a^2}{2r} \end{aligned}$$

On retrouve que le terme principal de l'expression du flux n'est pas changé. Puisque pour ce calcul le développement limité a été poussé à l'ordre 2 avant l'intégration, le changement de la valeur du flux dû à l'excentricité ne peut être qu'un terme d'ordre 2.

Le système de mesure réalisé est donc peu sensible au centrage du conducteur dans le tore constituant la ceinture de Rogowski.

16.6 On considère un champ uniforme sur le volume du tore et une spire particulière du tore. Le champ d'induction extérieur crée un certain flux au travers de la spire. Considérons la spire symétrique de la première par rapport au centre O du tore. Le champ d'induction y crée un flux exactement opposé à celui créé dans la première spire puisque les vecteurs surface des deux spires sont opposés et que le champ est uniforme. Au total, un champ extérieur uniforme sur le volume du tore ne créant pas de flux dans ce dernier ne perturbe pas la mesure du courant circulant dans le conducteur enserré par le tore.

16.7 L'équation (16.7) montre très clairement que la force électromotrice récupérée aux bornes du tore est proportionnelle à la dérivée du courant à mesurer. Ceci ne

pose pas de problème dans le cas d'un courant purement sinusoïdal puisqu'il n'y a alors qu'un simple déphasage entre la force électromotrice et le courant à mesurer et que dans ce cas, la force électromotrice est proportionnelle à la fréquence du courant sinusoïdal et à son amplitude.

En revanche, si on destine le système à la mesure de courants de formes plus complexes et de régimes transitoires, le système de mesure ne peut être laissé en l'état.

16.8 Le premier amplificateur est un simple montage suiveur. On retrouve donc à l'entrée du deuxième amplificateur, sur la résistance R_1 , la force électromotrice e .

La fonction de transfert de l'électronique de conditionnement est dans ce cas égale à celle du deuxième amplificateur, soit :

$$H(p) = \frac{V_{mes}(p)}{e(p)} = -\frac{Z_2}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + R_2 C_2 p} \quad (16.12)$$

Ceci constitue la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre. En dehors de la bande passante du filtre, c'est-à-dire si $R_2 C_2 \omega \gg 1$, (16.12) peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{V_{mes}(p)}{e(p)} = -\frac{Z_2}{R_1} = -\frac{1}{R_1 C_2 p}$$

Ceci constitue la fonction de transfert d'un intégrateur.

16.9 L'équation (16.7) permet de donner l'expression de la force électromotrice dans le domaine de Laplace, soit :

$$e(p) = -N\mu_0 r \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right] pI(p)$$

La fonction de transfert du système est alors donnée par :

$$\frac{V_{mes}(p)}{I(p)} = \frac{V_{mes}(p)}{e(p)} \frac{e(p)}{I(p)} = \frac{N\mu_0 r}{R_1 C_2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right]$$

La tension de mesure est proportionnelle au courant.

On en déduit la sensibilité, à savoir :

$$S_c = \frac{N\mu_0 r}{R_1 C_2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \right]$$



Les dispositifs de mesure du courant fonctionnant sur le principe de la ceinture de Rogowski n'utilisent pas de matériaux magnétiques, ils ne sont donc pas soumis aux phénomènes d'hystérésis, de rémanence ou de saturation. Ils donnent aux bornes de la ceinture une force électromotrice, qui après intégration est l'image presque parfaite du courant primaire circulant dans le conducteur.

Par construction, ces systèmes sont peu sensibles à la position du conducteur primaire à l'intérieur de la ceinture. Ceci n'est que théorique car, en fait, les imperfections de réalisation du tore imposent un centrage du conducteur sans lequel les erreurs de mesure peuvent atteindre quelques %.

De façon à limiter l'influence des champs magnétiques externes certaines versions possèdent un blindage magnétique assurant un meilleur comportement CEM.

Les performances de ces dispositifs dépendent très fortement de la qualité de l'électronique de l'intégrateur.

Traditionnellement utilisé depuis plusieurs décennies dans les domaines des courants forts, ce type de dispositifs permet une précision de l'ordre de ± 1 % de l'étendue de mesure pour les ceintures flexibles à $\pm 0,2$ % pour des systèmes rigides installés en poste fixe. La bande passante s'étend généralement de quelques hertz à quelques kilohertz.

Depuis quelques années, la technologie PRIME® de la société LEM a permis de réduire fortement le coût de fabrication et l'encombrement de la ceinture, permettant ainsi de proposer à des prix attractifs des versions dédiées aux faibles et moyens courants. La seule véritable limitation de ce type de dispositifs reste que, par nature, ils ne permettent pas la mesure des courants continus.



Figure 16.7 - Ceinture de Rogowski flexible LEM (documentation LEM)

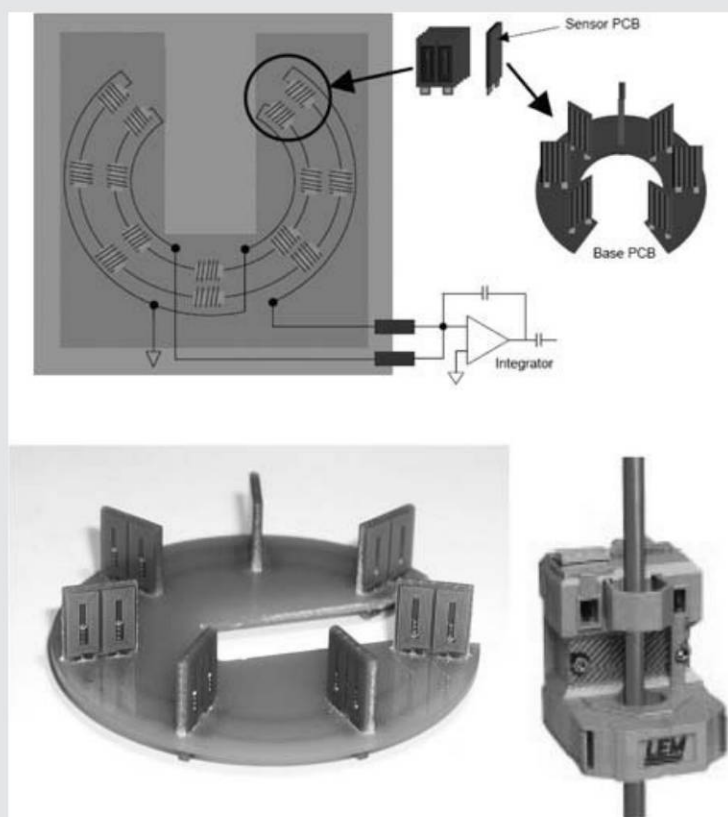


Figure 16.8 - Système LEM en technologie PRIME® (principe, bobine et dispositif)
(documentation LEM)

PROBLÈME :

Transformateur différentiel (LVDT)

Les capteurs inductifs de type LVDT (*Linear Voltage Differential Transformer*) sont constitués d'un bobinage primaire alimenté par une tension sinusoïdale. Le déplacement d'un équipage mobile, principalement constitué d'un noyau ferromagnétique, modifie les coefficients de mutuelle inductance entre le bobinage primaire et deux bobinages secondaires situés de part et d'autre de celui-ci. Une électronique de conditionnement, utilisant un traitement de type push-pull des forces électromotrices induites aux secondaires, délivre un signal analogique proportionnel au déplacement de l'équipage mobile. Performances et fiabilité font du LVDT un des capteurs les plus utilisés dans la mesure de précision des déplacements linéaires.

Énoncé

I. Principe du capteur

Soit le LVDT schématisé figure 17.1 et constitué d'un bobinage primaire alimenté par un générateur alternatif et de deux enroulements secondaires identiques et symétriques par rapport au primaire. Les bobinages primaire et secondaires constituent trois solénoïdes coaxiaux que l'on supposera de même section et dans lesquels un noyau ferromagnétique modifie par son déplacement le couplage entre primaire et secondaires. Le noyau magnétique est solidarisé à l'objet dont on désire mesurer le déplacement au moyen de la tige de guidage.

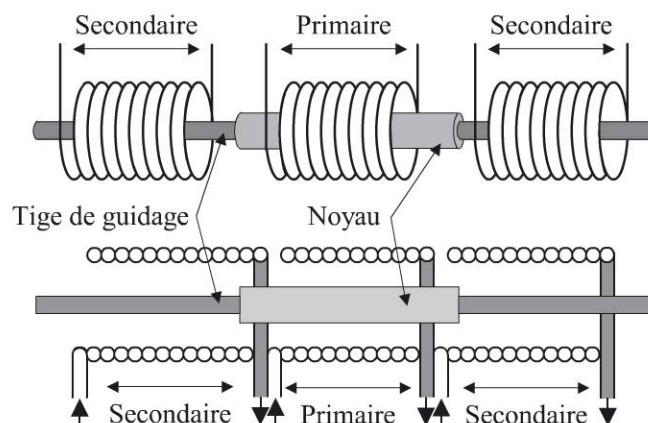


Figure 17.1 - Principe du LVDT (vue éclatée et coupe)

On suppose que le primaire est alimenté par un générateur de courant sinusoïdal parfait $i_1 = I_1 \cos(\omega t)$. Soient L_1, L'_2 et L''_2 les inductances des enroulements primaire et secondaires et R_1, R'_2 et R''_2 les résistances correspondantes.

Les coefficients de mutuelles inductances entre le primaire et les enroulements secondaires sont notés $M'(x)$ et $M''(x)$ lorsque le noyau magnétique se trouve déplacé longitudinalement de x , la position centrale du noyau étant prise comme origine de ces déplacements.

Les deux enroulements secondaires sont montés en opposition et le circuit est refermé sur une impédance de charge R_e , impédance d'entrée d'un étage de conditionnement de la tension V_2 (voir figure 17.2).

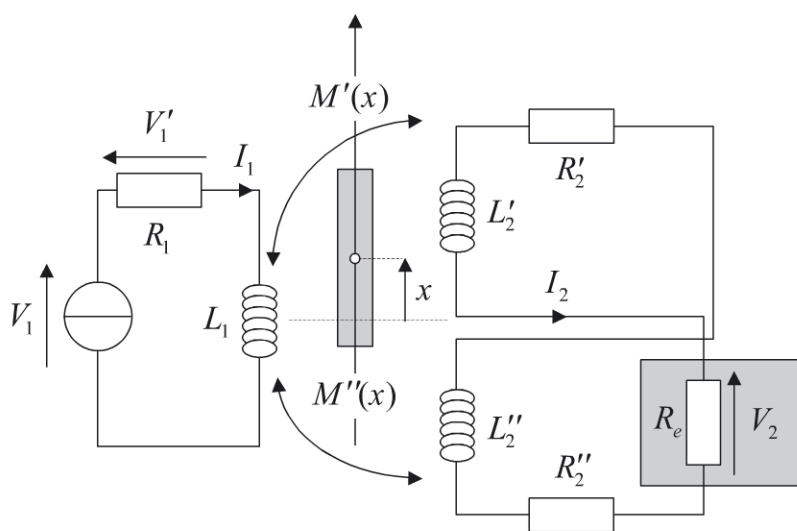


Figure 17.2 - Principe de la mesure

On considère les deux bobines du secondaire de fabrication identique, c'est-à-dire de même longueur $l_0 = 4 \text{ cm}$ et de même rayon $r_0 = 5 \text{ mm}$. Chaque bobine est constituée d'un enroulement jointif de fil de cuivre de résistivité $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ et de rayon $r = 0,5 \text{ mm}$ bobiné sur une couche. On a donc toujours $R'_2 = R''_2 = R_2$ et au repos, c'est-à-dire avec le noyau en position médiane, $L'_2(x = 0) = L''_2(x = 0) = L_2$.

17.1 On pose que V_1 est l'amplitude complexe de la tension aux bornes de la source. Donner les équations régissant le fonctionnement du système en régime permanent sinusoïdal.

17.2 En déduire les expressions de I_2 et V_2 , amplitudes complexes du courant secondaire et de la tension aux bornes de la résistance de charge.

17.3 Calculer la résistance R_2 des bobines.

17 • Transformateur différentiel (LVDT)

17.4 Calculer l'inductance L des bobines du secondaire si pour l'instant on ne tient pas compte de la présence du noyau magnétique. Pour cela on fera l'hypothèse que le champ qu'elles créent peut être assimilé à celui d'un solénoïde infini et on affectera la valeur de l'inductance trouvée du facteur de correction de Nagaoka, à savoir $K = \left(1 + 0,9(r_0/l_0) - 0,2(r_0/l_0)^2\right)^{-1}$ où r_0 est le rayon de la bobine et l_0 sa longueur. On donne la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

17.5 Calculer les valeurs maximale et minimale de l'inductance que peuvent prendre les bobines L'_2 et L''_2 . On donne la perméabilité relative du matériau du noyau magnétique $\mu_r = 700$.

17.6 On suppose que la longueur du noyau est supérieure à la longueur du bobinage primaire de sorte que, quelle que soit sa position, il occupe toujours l'espace intérieur de ce bobinage. Montrer qu'alors $L'_2(x) + L''_2(x)$ est constant.

17.7 On donne $f = 1\,000 \text{ Hz}$ (fréquence de l'alimentation) et $R_e \geq 100 \text{ k}\Omega$. Compte tenu de ces valeurs, donner l'expression approchée de la tension V_2 .

17.8 En utilisant le fait que le fonctionnement est push-pull, donner une expression de $M'(x) - M''(x)$ et en déduire l'expression de V_2 au premier ordre.

II. Électronique de conditionnement

17.9 On note v_i l'expression réelle correspondant à l'écriture complexe $V_i e^{j\omega t}$, à savoir :

$$v_i = |V_i| \cos(\omega t + \arg(V_i))$$

On prélève la tension v'_1 , proportionnelle au courant primaire, aux bornes de la résistance R_1 . Les tensions v'_1 et v_2 sont utilisées comme entrées du circuit de conditionnement schématisé figure 17.3 où E est une tension constante, le circuit déphaseur étant représenté figure 17.4.

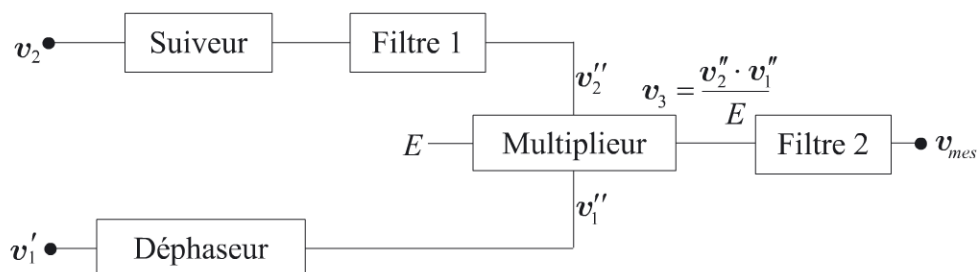


Figure 17.3 - Circuit de conditionnement

L'amplificateur opérationnel utilisé étant considéré idéal, calculer la valeur à donner au produit $R_\varphi C_\varphi$ dans le circuit de la figure 17.4 pour que le signal v''_1 soit de même amplitude que la tension v'_1 mais en quadrature retard.

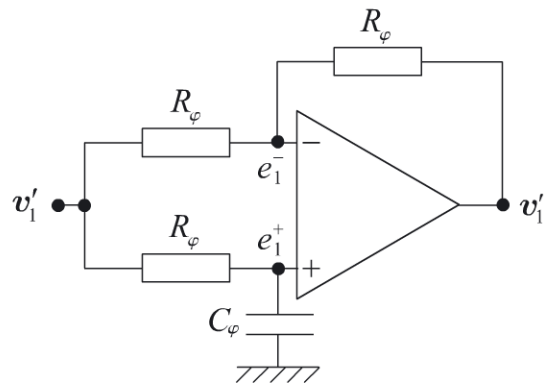


Figure 17.4 - Montage déphaseur

17.10 Le filtre 1 est un filtre passe-bande étroit, accordé sur la pulsation d'alimentation ω du LVDT et destiné à filtrer le signal d'éventuelles composantes indésirables provenant de parasites ou des non-linéarités du capteur. On considère qu'autour de la pulsation ω , le filtre est de gain G et n'entraîne pas de déphasage notable. Déterminer l'expression de la tension v_3 en sortie du multiplieur.

17.11 Le filtre 2 de la figure 17.3 est un filtre passe-bas à cellule de Rauch comme schématisé sur la figure 17.5. Déterminer de façon générale la fonction de transfert du filtre à cellule de Rauch. On explicitera celle-ci en fonction des admittances des branches $Y_i = 1/Z_i$.

17.12 Pour ce filtre, on pose $Z_1 = Z_3 = Z_4 = R = 1 \text{ k}\Omega$ et $Z_2 = Z_5 = 1/jC\omega$. On note $\omega_0 = 1/RC$. Donner à partir du calcul précédent l'expression de la fonction de transfert du filtre.

17.13 Calculer la valeur de C pour que la fréquence de coupure à -3 dB soit $f_c = 20 \text{ Hz}$.

17.14 Déterminer l'expression de la tension de mesure V_{mes} en sortie du filtre 2 de la figure 17.3 et la sensibilité S_{mes} de la mesure.

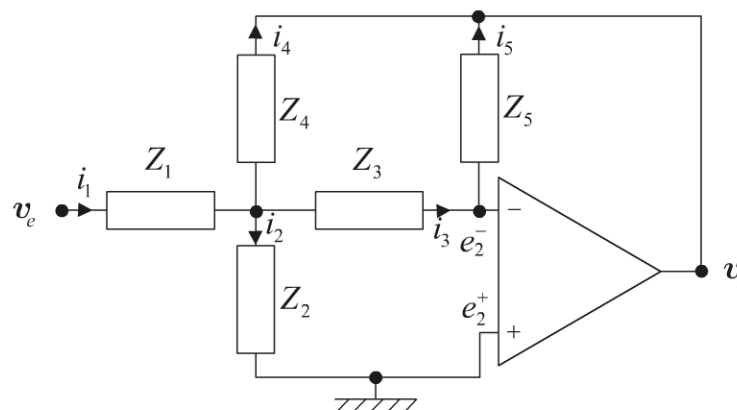


Figure 17.5 - Filtre à cellule de Rauch

Corrigé détaillé

I. Principe du capteur

17.1 Les deux secondaires étant montés en opposition, les forces électromotrices induites par le primaire se soustraient et d'après le schéma électrique de la figure 17.2, on a en régime permanent sinusoïdal :

$$\begin{cases} V_1 = [R_1 + jL_1\omega] I_1 + [j\omega (M''(x) - M'(x))] I_2 \\ 0 = [j\omega (M''(x) - M'(x))] I_1 + [R_e + 2R_2 + j\omega (L_2'(x) + L_2''(x))] I_2 \end{cases}$$

17.2 Les amplitudes complexes du courant secondaire et de la tension aux bornes de la résistance de charge sont alors données par :

$$\begin{cases} I_2 = -\frac{j\omega (M''(x) - M'(x))}{R_e + 2R_2 + j\omega (L_2'(x) + L_2''(x))} I_1 \\ V_2 = \frac{j\omega (M'(x) - M''(x))}{R_e + 2R_2 + j\omega (L_2'(x) + L_2''(x))} R_e I_1 \end{cases} \quad (17.1)$$

17.3 Comme les bobines du secondaire sont identiques, de longueur l_0 et constituées de fil de rayon $r = 0,5$ mm bobiné en spires jointives sur une couche, on a donc $N = l_0/2r = 40$ spires par bobine. Elles sont donc de résistance :

$$R_2 = \rho \cdot N2\pi r_0/\pi r^2 = 27,5 \text{ m}\Omega$$

17.4 Le champ d'induction \vec{B} créé par un solénoïde vide et infini est nul à l'extérieur de celui-ci. Il est coaxial, uniforme et de module $B = \mu_0 nI$ à l'intérieur du solénoïde où μ_0 est la perméabilité de l'air (prise égale à celle du vide), n le nombre de spires par unité de longueur et I le courant parcourant le solénoïde. Pour un solénoïde de longueur l_0 créant ce champ d'induction, le flux total de ce dernier au travers des nl_0 spires de surface πr_0^2 est $\phi = nl_0\pi r_0^2 B = \mu_0 n^2 l_0 \pi r_0^2 I = LI$ avec ici $n = N/l_0 = 1/2r$. On en tire l'expression de l'inductance $L = \mu_0 n^2 l_0 \pi r_0^2$. En prenant en compte le facteur de correction de Nagaoka, il vient :

$$L = \frac{\mu_0 l_0 \pi r_0^2}{4r^2} \frac{1}{1 + 0,9(r_0/l_0) - 0,2(r_0/l_0)^2} = 3,56 \text{ }\mu\text{H}$$

17.5 On peut borner l'intervalle des valeurs de L'_2 et L''_2 . En effet, chacune de ces bobines ne peut avoir une inductance inférieure à L , valeur prise par une des inductances si aucune partie du noyau ne se situe dans son espace intérieur. De même, chacune de ces bobines ne peut avoir une inductance supérieure à $\mu_r L$, valeur prise si l'ensemble de l'espace intérieur de la bobine est comblé par le noyau. On a donc $L_{2,\min} = 3,56 \mu\text{H}$ et $L_{2,\max} = \mu_r L = 2,49 \text{mH}$.

17.6 On note Δl la différence de longueur du noyau et du bobinage primaire. Les deux bobines secondaires étant en série, elles se comportent quelle que soit la position du noyau, comme une bobine à noyau ferromagnétique de longueur Δl en série avec une bobine à noyau d'air de longueur $2l_0 - \Delta l$. $L'_2(x) + L''_2(x)$ est donc constant.

17.7 Compte tenu des valeurs numériques données, au maximum on obtient :

$$(L'_2 + L''_2)\omega = 2\mu_r L\omega = 4\pi\mu_r Lf = 31,30 \Omega$$

Comme $R_2 = 27,5 \text{m}\Omega$ et $R_e \geq 100 \text{k}\Omega$, (17.1) devient :

$$V_2 \simeq j\omega (M'(x) - M''(x)) I_1$$

17.8 Puisque le montage est push-pull, les coefficients de mutuelle induction peuvent se développer sous la forme :

$$\begin{cases} M'(x) = M(0) + \alpha x + \beta x^2 + \delta x^3 + \dots \\ M''(x) = M(0) + \alpha(-x) + \beta(-x)^2 + \delta(-x)^3 + \dots \end{cases}$$

La tension s'écrit donc au premier ordre :

$$V_2 \simeq j\omega 2\alpha x I_1 \tag{17.2}$$

La tension aux bornes de la charge est en quadrature avec le courant primaire, avance ou retard selon la valeur de x . Elle varie de façon quasi linéaire pour des faibles déplacements par rapport à l'origine, centre du dispositif, comme le montre la simulation de la figure 17.6.

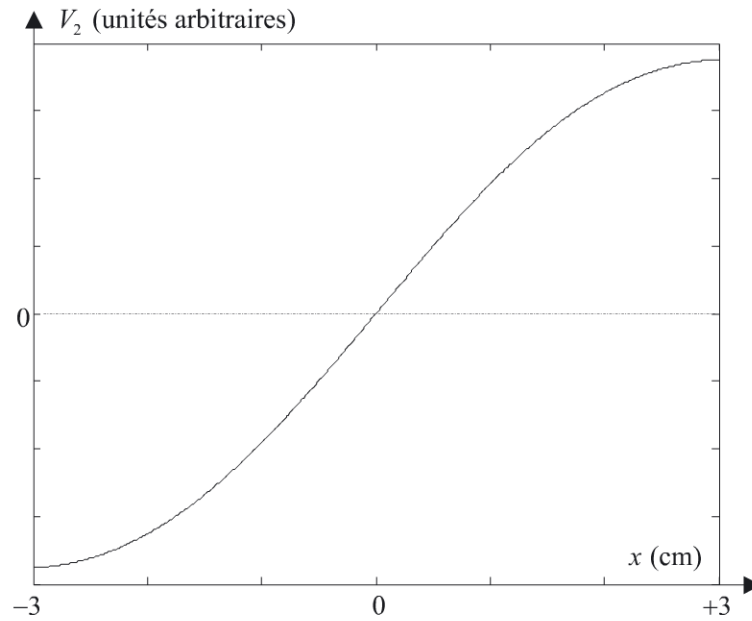


Figure 17.6 - Amplitude de la tension V_2

II. Électronique de conditionnement

17.9 En écriture complexe, on a en régime permanent sinusoïdal :

$$\begin{cases} e_1^+ = \frac{1}{jC_\varphi\omega} \frac{V_1'}{R_\varphi + \frac{1}{jC_\varphi\omega}} = \frac{V_1'}{1 + jR_\varphi C_\varphi\omega} \\ e_1^- = V_1'' + R_\varphi \frac{V_1' - V_1''}{2R_\varphi} = \frac{V_1' + V_1''}{2} \end{cases}$$

L'amplificateur étant idéal, la contre-réaction amène $e_1^+ = e_1^-$, soit :

$$\frac{V_1''}{2} = V_1' \left(\frac{1}{1 + jR_\varphi C_\varphi\omega} - \frac{1}{2} \right) = \frac{V_1'}{2} \left(\frac{1 - jR_\varphi C_\varphi\omega}{1 + jR_\varphi C_\varphi\omega} \right)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$V_1'' = V_1' e^{2j\varphi} \quad \text{avec} \quad \varphi = \arctan(-R_\varphi C_\varphi\omega)$$

Pour que le signal v_1'' soit en quadrature retard par rapport à v_1' , il suffit que $\varphi = -\pi/4$.

On doit donc choisir $R_\varphi C_\varphi\omega = 1$.

17.10 Aux entrées du multiplieur on retrouve les signaux E , v_1'' et v_2'' . Ce dernier est le signal issu du LVDT passé par le suiveur et filtré par le filtre 1. D'après (17.2) et puisque le filtre ne déphase pas le signal et est de gain G , $v_2'' \simeq -2\alpha\omega GI_1 x \sin(\omega t)$ v_1'' est un signal à l'image du courant primaire, déphasé et en quadrature retard, soit $v_1'' = R_1 I_1 \sin(\omega t)$.

Le signal de sortie du multiplieur est donc :

$$v_3 \simeq -\frac{2\omega\alpha GR_1 I_1^2}{E} x \sin^2(\omega t) = -\frac{\omega\alpha GR_1 I_1^2}{E} x (1 - \cos(2\omega t)) \quad (17.3)$$

17.11 D'après le circuit de la figure 17.5, on a :

$$\begin{cases} V_e = \frac{i_3}{Y_3} + \frac{i_1}{Y_1} \\ V_s = -\frac{i_5}{Y_5} = -\frac{i_3}{Y_5} = \frac{i_3}{Y_3} - \frac{i_4}{Y_4} = \frac{i_2}{Y_2} - \frac{i_3}{Y_3} - \frac{i_3}{Y_5} \\ i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \end{cases} \quad (17.4)$$

La résolution de (17.4) conduit à :

$$H(p) = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

17.12 En développant $H(p)$ en fonction des admittances données, il vient :

$$H(p) = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{\frac{1}{(RC)^2}}{p^2 + \frac{3}{RC}p + \frac{1}{(RC)^2}} = -\frac{\omega_0^2}{p^2 + 3\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (17.5)$$

17.13 En régime sinusoïdal permanent, (17.5) devient :

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j3\omega_0\omega}$$

En continu, on a $H(0) = -1$. La fréquence de coupure f_c à -3 dB est obtenue en résolvant $|H(j\omega_c)| = |H(0)|/\sqrt{2}$ soit tous calculs faits :

$$f_c = \sqrt{\frac{\sqrt{53} - 7}{2}} f_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{53} - 7}{2}} \frac{1}{2\pi RC}$$

$f_c = 20$ Hz impose $C = 2,978 \mu\text{F}$.

17 • Transformateur différentiel (LVDT)

17.14 Comme $2f \gg f_c$ où f est la fréquence d'alimentation du LVDT, on peut considérer que la composante alternative de v_3 est totalement éliminée par le filtrage et compte tenu du fait que $H(0) = -1$, il vient d'après (17.3) :

$$V_{mes} \simeq \frac{\omega \alpha G R_1 I_1^2}{E} x \quad (17.6)$$

Sous les approximations effectuées, on obtient une tension de mesure proportionnelle au déplacement du noyau magnétique à l'intérieur des bobines du LVDT.

La sensibilité de la mesure se déduit immédiatement de (17.6) et on a :

$$S_{mes} \simeq \omega \alpha G R_1 I_1^2 / E$$

ENCART 17.1

Les caractéristiques métrologiques des LVDT en font des capteurs de déplacement très couramment utilisés aussi bien dans l'asservissement d'actionneurs linéaires et le contrôle de position comme pour l'équipement de vérins hydrauliques que comme partie intégrante de systèmes de métrologie dimensionnelle comme les palpeurs mécaniques pour machines à mesurer tridimensionnelles.

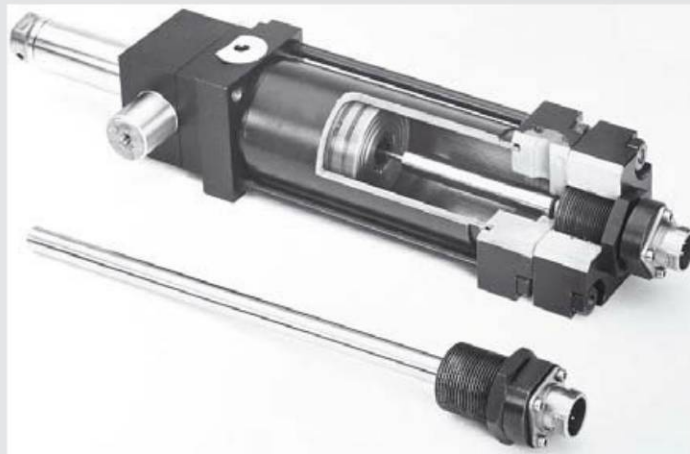


Figure 17.7 - LVDT et équipement LVDT d'un vérin (documentation Sensorex)

Les caractéristiques de ces LVDT varient selon leur utilisation. On a couramment des étendues de mesure allant de ± 1 mm (pour un palpeur) à ± 500 mm (pour un LVDT de grande longueur) pour des sensibilités allant de 500 mV/mm·V à 1 mV/mm·V. Typiquement l'écart de linéarité est de $0,1$ %.

Le même principe peut être utilisé pour réaliser un RVDT (Rotary Voltage Differential Transformer) qui permet la mesure de déplacements angulaires, un rotor magnétique modifiant le couplage entre un primaire alimenté en sinusoïdal et deux secondaires.

PROBLÈME : Interféromètre de Mach-Zender utilisé en capteur d'angle

Ce problème présente l'utilisation qui peut être faite d'un interféromètre en capteur de déplacement angulaire, le déplacement angulaire ne constituant ici qu'un mesurande secondaire. L'intérêt d'un tel principe est la possibilité de réaliser le montage selon un principe MOEMS (*Micro Optic Electro Mechanical System*) réalisant ainsi un capteur intégré.

Énoncé

L'interféromètre de Mach-Zender est un interféromètre à deux ondes constitué de deux miroirs M_1 et M_2 parfaitement réfléchissants et de deux lames séparatrices identiques S_1 et S_2 , semi-réfléchissantes disposées à 45° sur la direction des rayons lumineux. Ces lames ont un coefficient de transmission énergétique de 50%.

L'interféromètre est éclairé par une diode laser DL fournissant une onde supposée plane et monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ (voir figure 18.1). L'intensité de l'onde de sortie de l'interféromètre est mesurée par une photodiode P.

18.1 En l'absence des deux lames de verre L_1 et L_2 présentes sur la figure 18.1, quel est le déphasage entre les deux ondes arrivant sur la photodiode et s'étant réfléchies l'une sur M_1 et l'autre sur M_2 ? En déduire l'éclairement de la photodiode.

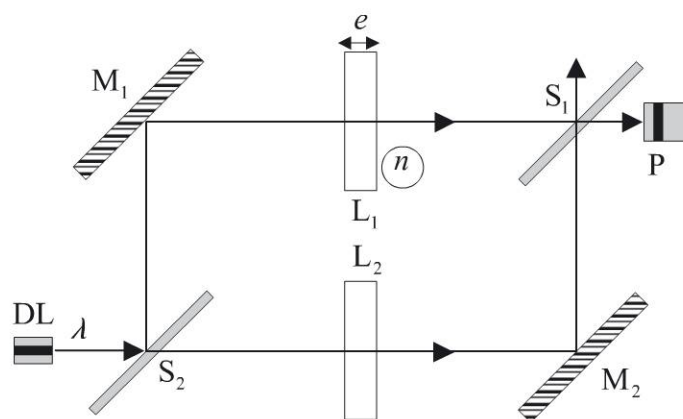


Figure 18.1- Principe de l'interféromètre Mach-Zender

18 • Interféromètre de Mach-Zender utilisé en capteur d'angle

18.2 On introduit sur le trajet des rayons lumineux et perpendiculairement à ces derniers, les deux lames de verre L_1 et L_2 , de même épaisseur $e = 1$ mm et de même matériau d'indice $n = 1,5$. L'interféromètre étant supposé dans le vide, quel est le déphasage entre les deux ondes arrivant sur la photodiode ? Quel est l'éclairement de la photodiode ?

18.3 La lame L_2 est tournée d'un angle θ par rapport à un axe passant par son centre et perpendiculaire au plan de la figure 18.1. Calculer la différence de marche ΔL introduite entre les deux ondes (celle se réfléchissant sur M_1 et celle se réfléchissant sur M_2) en fonction de e , n , r et θ où r est l'angle de réfraction à l'intérieur des lames de verre.

18.4 En utilisant la loi de la réfraction de Descartes et en considérant θ petit, calculer, au premier ordre non nul en θ , la différence de marche ΔL en fonction de e , n et θ .

18.5 En déduire le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux ondes sur la photodiode.

18.6 Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(\theta)$ reçue par la photodiode en fonction e , n , θ , λ et de l'intensité I_0 émise par la diode laser.

18.7 Étudier le comportement de l'intensité reçue $I(\theta)$ en fonction de l'angle θ .

L'angle θ n'est que le mesurande secondaire d'un mesurande primaire non précisé ici.

Le capteur est conçu (butée mécanique) pour que l'angle θ ne puisse dépasser la valeur θ_{\max} à laquelle correspond le premier minimum de l'intensité.

Le chemin géométrique de la diode laser à la photodiode est $l = 1,2$ cm.

La diode laser émet une puissance $P_d = 3$ mW en continu de façon supposée uniforme dans la section du faisceau. Cette section est supposée circulaire de diamètre $\varnothing_d = 50$ μm en sortie de la diode. La divergence du faisceau est $d = 1$ mrad et la longueur de cohérence temporelle $l_c = 10$ μm .

La surface utile de réception de la photodiode supposée circulaire est de diamètre $\varnothing_p = 60$ μm et sa sensibilité $S_p = 0,85$ A.W⁻¹ à la longueur d'onde de la diode laser utilisée.

18.8 Quelle limite théorique la diode laser impose-t-elle sur la valeur de θ_{\max} ?

18.9 Calculer la puissance maximale $P_{p,\max}$ reçue par la photodiode et le courant correspondant i_{\max} fourni. Pour cela, on fera l'hypothèse que l'absorption et la réflexion par les éléments tels que les miroirs et les lames sont négligeables.

18.10 L'électronique de traitement du courant de la photodiode permet une résolution de $i_{\max}/50$. Calculer la résolution angulaire $\Delta\theta$ du système au voisinage de $\theta_{\max}/2$.

18.11 Comment peut-on améliorer la résolution d'un tel capteur ?

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonvalle
- Le site de Dunod, à l'adresse suivante :
www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

PROBLÈME : Étude d'une thermistance en utilisation bolométrique pour la détermination à distance de la température d'un corps

Dans une utilisation bolométrique, une thermistance permet de déterminer la puissance radiative émise par une cible et d'en déduire sa température. La mesure est évidemment réalisée sans contact. Bien que l'invention du bolomètre date de 1878, son principe reste très actuel. Il permet de réaliser, comme ici, un pyromètre à poste fixe et est aussi utilisé dans le développement des nouvelles caméras thermiques (caméras bolométriques ou caméras thermiques non refroidies) où chacun des pixels de l'imageur est en fait un microbolomètre de principe identique à celui décrit dans ce problème.

Énoncé

Dans ce problème, on notera T une température exprimée en Kelvin et t cette même température exprimée en degré Celsius.

On considère une thermistance dont la résistance est donnée par :

$$R(T) = R_0 \exp B \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right] \quad (19.1)$$

B est une constante positive, T la température absolue et T_0 une température de référence. On rappelle qu'à la température de $t = 0^\circ\text{C}$ correspond la température absolue $T = 273,15\text{ K}$.

Les seules caractéristiques données par le constructeur sont $R(T_1) = 5\,000\ \Omega$ à $t_1 = 25^\circ\text{C}$ et $R(T_2) = 4\,135\ \Omega$ à $t_2 = 30^\circ\text{C}$.

19.1 Calculer la valeur de B , en déduire le type (CTN ou CTP) de la thermistance.

19.2 Établir une expression de $R(T)$ en fonction de $R(T_1)$, B , T et T_1 , puis calculer $R(T)$ pour des températures t variant de degré en degré de 25 à 30°C .

19.3 La thermistance est montée en pont simple avec trois résistances fixes de valeur $R_1 = 5\,000\,\Omega$. Le pont est alimenté par une source de courant continu parfaite $I_g = 2\text{ mA}$ (voir figure 19.1).

Déterminer la tension de mesure V_{mes} puis exprimer $R(T)$ en fonction de V_{mes} , I_g et R_1 .

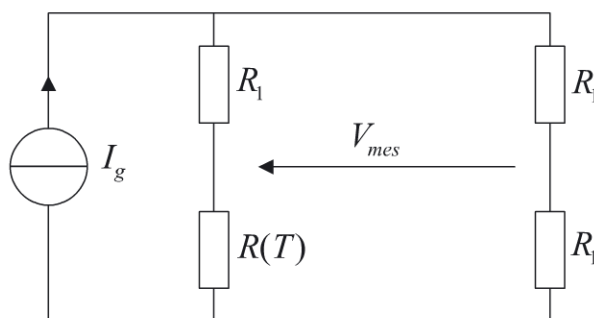


Figure 19.1 - Montage en pont de la thermistance

19.4 On place l'ensemble précédent dans une enceinte thermostatée à $t_a = t_1$, soit à 25°C (figure 19.2). Quelle devrait être la tension de mesure si on effectuait un raisonnement trop simpliste ?

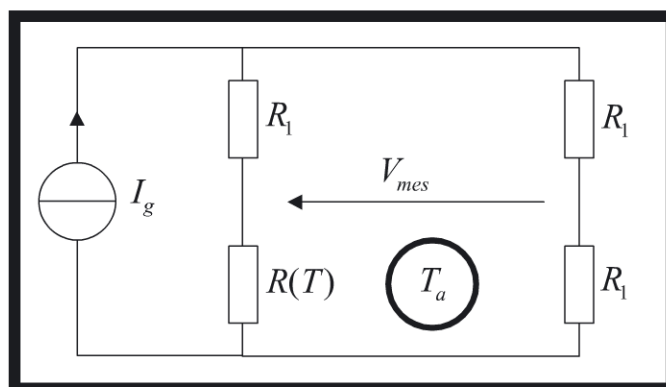


Figure 19.2 - Enceinte thermostatée

19.5 Le montage étant celui de la figure 19.2, on mesure une tension de déséquilibre du pont $V_{mes} = -15\text{ mV}$. Conclure quant à la température de la thermistance.

Calculer la résistance de la thermistance pour cette tension de déséquilibre et en déduire sa température t en $^\circ\text{C}$ et son auto-échauffement $\Delta t_a = t - t_a$.

19.6 Soient P_J la puissance dissipée par effet Joule par la thermistance, K_a (en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$) son coefficient d'échange thermique avec l'enceinte, M (en kg) sa masse et C (en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) sa chaleur massique. Établir l'équation différentielle du bilan thermique de la thermistance. En déduire en régime permanent la relation reliant

19 • Étude d'une thermistance en utilisation bolométrique ...

la puissance dissipée par effet Joule par la thermistance à son coefficient d'échange thermique avec l'enceinte et à son auto-échauffement ΔT_a .

19.7 En revenant au circuit électrique, établir l'expression de la puissance P_J dissipée par effet Joule en fonction de $R(T)$, R_1 et I_g et la calculer pour la valeur $t_a = 25^\circ\text{C}$ de la température de l'enceinte.

19.8 En déduire la valeur du coefficient d'échange thermique K_a .

19.9 En reprenant les résultats des questions précédentes, calculer pour des températures t de la thermistance variant par pas de 1°C de 25 à 30°C , la puissance $P_J(t)$ qu'elle dissipe par effet Joule et son auto-échauffement Δt_a . Montrer que ces derniers sont pratiquement constants. Pour la suite on les considérera constants.

On considère maintenant une utilisation du système en bolomètre. Une fenêtre est pratiquée dans l'enceinte pour y loger une optique qui permet à un rayonnement extérieur d'atteindre la thermistance et d'y être en partie absorbé (voir figure 19.3).

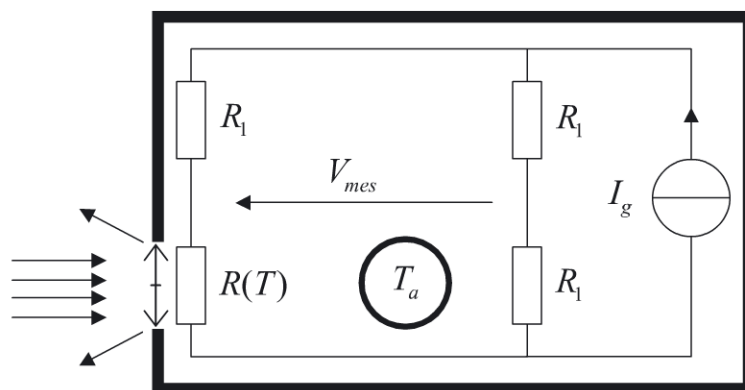


Figure 19.3 - Principe du bolomètre

On suppose que ces modifications n'entraînent pas d'évolutions des caractéristiques du système précédent.

19.10 Soit ϕ_a la puissance du rayonnement absorbée par la thermistance. Écrire l'équation différentielle du bilan thermique de la thermistance en fonction de K_a , ΔT_a , T , T_a , ϕ_a , M et C . En déduire en régime permanent la relation reliant l'échauffement total ΔT de la thermistance à son auto-échauffement et à la puissance ϕ_a absorbée.

Le système est placé en regard d'une paroi dont il aura en charge la mesure de la température et qui pour simplifier est considérée comme un corps noir. La paroi est portée à une température $t_{cn} = 700^\circ\text{C}$. La distance à la paroi est suffisante pour ne pas perturber entre autre l'enceinte thermostatée tout en laissant suffisamment de rayonnement atteindre la thermistance.

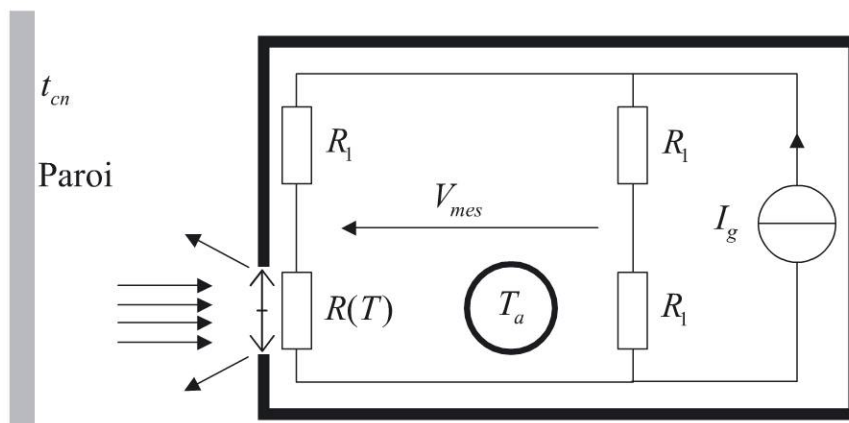


Figure 19.4 - Principe de la mesure

La puissance ϕ_a absorbée par la thermistance provoque une déviation du pont $V_{mes} = -250$ mV.

19.11 En déduire la valeur de la résistance de la thermistance, son échauffement Δt et la valeur de la puissance absorbée ϕ_a .

19.12 La paroi est maintenant à une température t'_{cn} inconnue. La puissance absorbée ϕ'_a par la thermistance provoque une nouvelle déviation du pont $V'_{mes} = -100$ mV. En déduire la valeur de la résistance de la thermistance, son échauffement $\Delta t'$ et la puissance absorbée ϕ'_a .

19.13 En déduire la température inconnue t'_{cn} .

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonvalle

Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

PROBLÈME : Pince ampèremétrique AC-DC

Les pinces ampèremétriques et les capteurs de courant à poste fixe pour circuits imprimés fonctionnent selon le même principe. Ils permettent tous deux la mesure du courant circulant dans une portion rectiligne de conducteur. La différence essentielle entre ces deux types de capteurs réside dans le fait que la pince peut s'ouvrir pour venir entourer le conducteur alors que ce dernier doit être enfilé au travers du capteur à poste fixe.

S'il ne s'agit que de mesurer des courants alternatifs, une technique de transformateur de courant suffit. Le secondaire est bobiné sur un anneau de matériau ferromagnétique entourant le conducteur parcouru par le courant à mesurer qui constitue le primaire du transformateur. Le courant dans le secondaire est alors à l'image du courant dans le conducteur primaire.

Lorsque l'on cherche à mesurer un courant continu ou lentement variable, cette technique ne peut plus convenir. On utilise le même principe de base et on remplace le bobinage secondaire par une sonde à effet Hall insérée dans le matériau ferromagnétique.

Ce problème présente une étude simplifiée des capteurs à sonde à effet Hall. Deux types de montage dit en boucle ouverte et en boucle fermée sont étudiés. Le montage en boucle fermée encore appelé montage à flux nul, en annulant le champ dans l'anneau ferromagnétique, permet de limiter les courants de Foucault et d'augmenter de façon importante la bande passante du système de mesure.

Énoncé

I. Principe du fonctionnement en boucle ouverte

On considère un anneau de matériau ferromagnétique doux (proportionnalité des champs d'induction et d'excitation magnétiques) de perméabilité relative μ_r , de rayon moyen r et pouvant s'ouvrir, constituant ainsi une pince pouvant entourer un conducteur parcouru par un courant I (voir figures 20.1 et 20.2). Une petite cavité dans le matériau ferromagnétique permet d'y insérer une sonde à effet Hall.

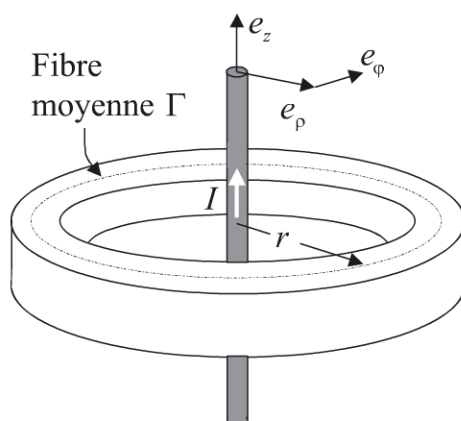


Figure 20.1- Anneau ferromagnétique et conducteur du courant à mesurer

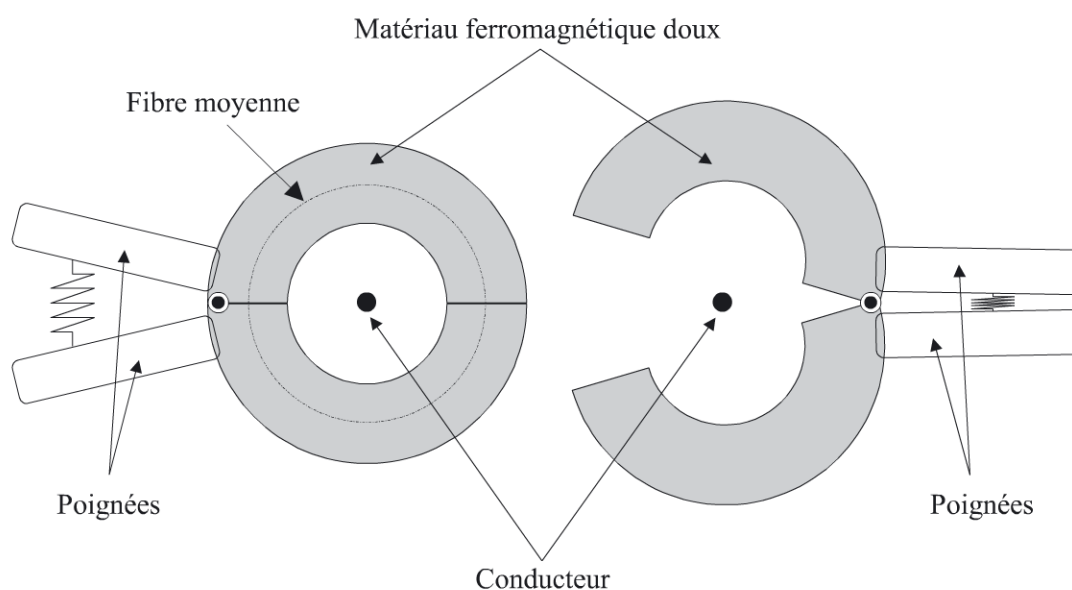


Figure 20.2 - Schéma de principe de la pince ampèremétrique

La sonde à effet Hall utilisée est une sonde Honeywell SS94A1 dont les caractéristiques sont les suivantes :

SS94A1 Sensor

Tableau 20.1 - Caractéristiques de la sonde linéaire à effet Hall (d'après documentation Honeywell)

Mean Feature	Gen. purpose
Supply Voltage V_s (VDC)	6.6 to 12.6
Supply Current I_s (mA)	13 typ. 30 max.
Output Current I_o (mA)	1 max.
Response Time τ_s (μ s)	3 typ.
Range (gauss)	-500 to +500
Sensitivity S_s (mV/gauss@ 25 °C)	5.0 ± 0.1
Linearity (% span)	-0.8 typ. -1.5 max.
V_{out} (V@ $V_s = 8$ V, 0 gauss, and 25 °C)	4.00 ± 0.04
Temperature Error (all %s reference 25 °C value)	
Null (%/°C)	± 0.02
Gain (%/°C)	± 0.02

La sonde à effet Hall est insérée dans le matériau ferromagnétique créant un entrefer de largeur faible d (voir figure 20.3).

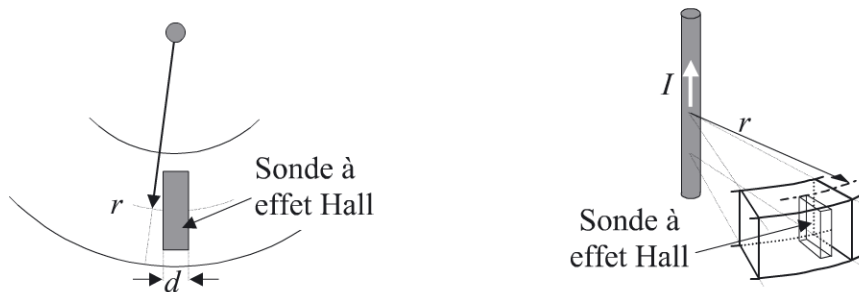


Figure 20.3 - Implantation de la sonde à effet Hall

20.1 En considérant le fil comme infini, établir à partir du théorème d'Ampère l'expression de la circulation du champ d'excitation magnétique \vec{H} sur la fibre moyenne du circuit magnétique, soit en $\rho = r$. On notera respectivement \vec{H}_{air} et \vec{H}_{ferro} les valeurs de ce champ dans l'entrefer et dans le matériau magnétique.

20.2 Dans l'hypothèse où l'entrefer est faible et les lignes parfaitement guidées (champ purement orthoradial), déduire du résultat précédent l'expression de l'amplitude B du champ d'induction magnétique en $\rho = r$ en fonction de μ_0 , μ_r , I , r et d .

20.3 L'intensité maximale du courant à laquelle on limite l'utilisation de la pince est $I_{max} = 100$ A. On admet qu'à l'induction correspondant à ce courant, on reste dans la partie linéaire de la caractéristique $B(H)$ et donc que μ_r est une constante.

Donner, en utilisant les caractéristiques de la sonde, la valeur maximale B_{\max} du champ d'induction auquel on peut la soumettre puis calculer la valeur minimale r_{\min} de r correspondante. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$, $\mu_r = 700$, $d = 2 \text{ mm}$ et on rappelle que l'unité légale (S.I.) de l'induction, le tesla, vaut 10^4 gauss.

20.4 On considère que c'est la valeur r_{\min} de r qui est utilisée et que la valeur moyenne $\langle B \rangle$ du champ d'induction sur la sonde de Hall est égale à sa valeur en $\rho = r_{\min}$. La température de la sonde est de 25°C et celle-ci est alimentée sous $V_s = 8 \text{ V}$. Déterminer l'excursion de V_{mes} si le capteur est conditionné comme sur la figure 20.4.

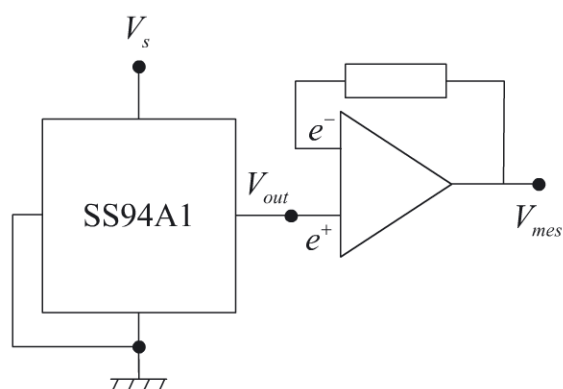


Figure 20.4 - Conditionnement

20.5 Donner en mV/A , la sensibilité de la mesure $S_{mes} = \Delta V_{mes} / \Delta I$.

20.6 Déterminer l'écart à la linéarité δV_{mes} de V_{mes} et l'erreur δI ainsi introduite sur une mesure du courant I circulant dans le conducteur.

20.7 On s'intéresse maintenant à la bande passante de la pince ampèremétrique réalisée. On suppose que l'évolution de la perméabilité relative du matériau magnétique peut être approchée par un modèle passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure $f_{c,ferro} = 5 \text{ kHz}$.

La réponse de la sonde à effet Hall peut aussi être considérée comme étant du premier ordre. On suppose que le temps de réponse donné dans le tableau 20.1, est le temps correspondant à 5 % si bien que $\tau_s \approx 3\tau$ où τ est le temps caractéristique. Calculer la fréquence de coupure $f_{c,s}$ de la sonde.

L'amplificateur opérationnel utilisé possède une fonction de transfert en boucle ouverte $H(p) = A / (1 + \tau_{aop} p)$ avec $A = 10^5$ et $\tau = 15,92 \text{ ms}$. Déterminer la fréquence de coupure $f_{c,ampli}$ de l'amplificateur tel qu'il est utilisé dans le montage de conditionnement.

Évaluer l'ordre de grandeur de la fréquence de coupure f_c du système de mesure. Lequel des trois éléments constitutifs conditionne cette valeur ?

20.8 Les courants de Foucault produits dans le matériau magnétique chauffent ce dernier. Par conduction et rayonnement, une certaine quantité de chaleur est transmise à la sonde à effet Hall provoquant une augmentation de sa température et donc une variation de la sensibilité de la mesure. Le problème est d'autant plus gênant que la puissance dissipée par les courants de Foucault est, pour un champ variant sinusoïdalement dans le temps, proportionnelle au carré de l'amplitude du champ magnétique et au carré de sa fréquence, caractéristiques dépendant évidemment du courant à mesurer. On introduit donc par cet effet une non-linéarité supplémentaire.

Evaluer V_{mes} pour une augmentation de température $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ par rapport à la température de référence de 25°C et pour le courant $I_{max} = 100\text{ A}$. En déduire la variation de tension δV_{mes} créée par la variation de température ΔT et l'erreur δI ainsi introduite sur la mesure du courant :

$$\delta V_{mes} = V_{mes}(I = 100\text{ A}, T = 25 + 10^\circ\text{C}) - V_{mes}(I = 100\text{ A}, T = 25^\circ\text{C})$$

II. Principe du fonctionnement en boucle fermée

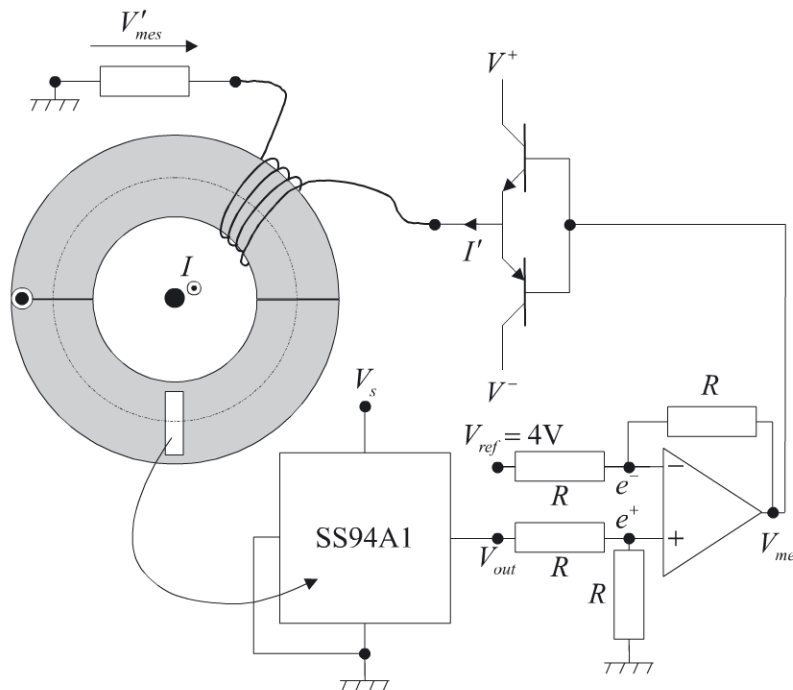


Figure 20.5 - Fonctionnement en boucle fermée ou montage à flux nul

Pour pallier les problèmes liés au matériau magnétique (bande passante, échauffement par courants de Foucault, etc.) on se propose de modifier le système selon le schéma de la figure 20.5.

20.9 Expliquer le fonctionnement du montage à flux nul.

20.10 Estimer le nombre N de spires parcourues par le courant I' afin que ce dernier ne dépasse pas $I'_{\max} = 100$ mA. On fera l'hypothèse que le matériau ferromagnétique est de section carrée a^2 et que les spires sont bobinées serrées sur ce dernier.

20.11 Préciser les avantages du montage à flux nul.

Corrigé détaillé

I. Principe du fonctionnement en boucle ouverte

20.1 On utilise le système de coordonnées cylindriques de la figure 20.1. Le fil pouvant être considéré comme infini, il y a invariance du problème par translation du fil selon l'axe z et par rotation autour de cet axe. Le module H de l'excitation magnétique ne peut donc dépendre que de la variable ρ .

L'excitation magnétique \vec{H} est perpendiculaire aux plans de symétrie de la distribution de courant. Soit le point $M(\rho, \varphi, z)$ de l'espace où l'on calcule le champ. Le plan passant par ce point et contenant le fil est plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ d'excitation magnétique est donc orthoradial et au total on a $\vec{H} = H(\rho)\vec{e}_\varphi$.

On applique le théorème d'Ampère en calculant la circulation de \vec{H} sur la fibre moyenne Γ du circuit magnétique. Il vient :

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H(r)\vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi \vec{e}_\varphi = \int_0^{2\pi} rH(r)d\varphi = I$$

L'entrefer d étant faible, on peut écrire :

$$H_{ferro}(2\pi r - d) + H_{air}d = I \tag{20.1}$$

20.2 Considérons un tube de champ élémentaire de l'induction magnétique de section dS . Considérant que l'entrefer est faible et que le champ d'induction magnétique \vec{B} est purement orthoradial, le tube de champ est alors de section dS constante.

Le champ d'induction étant à flux conservatif, le flux élémentaire $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ s'écrit $B\vec{e}_\varphi \cdot dS\vec{e}_\varphi = BdS$ et est constant au travers d'une section du tube de champ.

On en déduit que l'induction magnétique B est constante sur la fibre moyenne Γ .

20 • Pince ampèremétrique AC-DC

En utilisant les relations constitutives du matériau ferromagnétique ($B(r) = \mu_r \mu_0 H_{ferro}(r)$) et de l'air ($B(r) = \mu_0 H_{air}(r)$) dans le résultat (20.1), il vient :

$$\frac{B(r)}{\mu_r \mu_0} (2\pi r - d) + \frac{B(r)}{\mu_0} d = I$$

Ce qui s'écrit encore :

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r + d(\mu_r - 1)} \quad (20.2)$$

20.3 La pince étant limitée à la mesure d'un courant maximal $I_{\max} = 100 \text{ A}$ et la sonde à effet Hall ayant une étendue de mesure de $\pm B_{\max} = \pm 500 \text{ gauss}$ soit $\pm 500 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, on obtient de (20.2) la valeur minimale r_{\min} du rayon de la fibre moyenne du matériau magnétique :

$$r_{\min} = \frac{\mu_r}{2\pi} \left[\frac{\mu_0 I}{B_{\max}} - d \left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \right] = 5,75 \text{ cm}$$

20.4 La sensibilité donnée de la sonde à effet Hall à 25°C est $S_s = 5 \text{ mV/gauss}$ sous une alimentation $V_s = 8 \text{ V}$.

La tension au repos (i.e. en champ nul) est $V_{out}(B = 0 \text{ T}, T = 25^\circ \text{C}) = 4 \text{ V}$.

Au maximum, on a donc $V_{out} = V_{out}(B = 0 \text{ T}, T = 25^\circ \text{C}) \pm S_s(T = 25^\circ \text{C}) \cdot B_{\max}$, le signe \pm tenant pour les deux sens possibles du courant dans le conducteur. L'excursion de V_{out} est donc de $(4 \pm 2,5) \text{ V}$.

Le montage de la figure 20.4 étant un simple montage suiveur, on a :

$$V_{mes} = V_{out} \in [1,5; 6,5]$$

20.5 La sensibilité S_{mes} de la mesure est donnée par :

$$S_{mes} = \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta I} = \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta V_{out}} \frac{\Delta V_{out}}{\Delta B} \frac{\Delta B}{\Delta I} = \frac{\Delta V_{out}}{\Delta B} \frac{\Delta B}{\Delta I} = S_s \frac{\Delta B}{\Delta I}$$

Le champ d'induction étant proportionnel au courant I à mesurer, on peut calculer la sensibilité en remplaçant $\Delta B/\Delta I$ dans l'expression précédente par B_{\max}/I_{\max} . Il vient alors :

$$S_{mes} = \frac{\Delta V_{mes}}{\Delta I} = S_s \frac{B_{\max}}{I_{\max}} = 5 \text{ mV/gauss} \cdot \frac{500 \text{ gauss}}{100 \text{ A}} = 25 \text{ mV/A}$$

20.6 L'erreur de linéarité typique donnée dans le tableau 20.1 est de $-0,8 \%$. Ceci induit un écart maximum de la tension de sortie V_{mes} par rapport à la linéarité de :

$$\delta V_{mes} = -0,8 \% \cdot (6,5 - 1,5) = -40 \text{ mV}$$

L'erreur δI ainsi introduite sur une mesure du courant I circulant dans le conducteur est donc de $\delta I = \delta V_{mes}/S_{mes} = -1,6 \text{ A}$.

20.7 Pour évaluer l'ordre de grandeur de la fréquence de coupure f_c du système de mesure, on s'intéresse au comportement fréquentiel des trois éléments constitutifs.

La perméabilité relative du matériau magnétique pouvant être approchée par un modèle passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_{c,ferro} = 5$ kHz, la fonction de transfert du circuit magnétique est obtenue à partir du résultat (20.2) :

$$\begin{aligned} \frac{B(p)}{I(p)} &= \frac{\mu_0 \mu_r(p)}{2\pi r + d(\mu_r(p) - 1)} = \frac{\mu_0 \frac{\mu_r}{1 + \tau_{ferro} p}}{2\pi r + d\left(\frac{\mu_r}{1 + \tau_{ferro} p} - 1\right)} \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r}{(2\pi r - d + \mu_r d) \left(1 + \frac{2\pi r - d}{2\pi r - d + \mu_r d} \tau_{ferro} p\right)} \end{aligned} \quad (20.3)$$

Avec $\tau_{ferro} = 1/(2\pi f_{c,ferro}) = 31,83 \mu s$, (20.3) conduit à la constante de temps :

$$\tau'_{ferro} = \frac{2\pi r - d}{2\pi r - d + \mu_r d} \tau_{ferro} = 6,50 \mu s$$

La fréquence de coupure correspondante est donc $f'_{c,ferro} = 24,5$ kHz.

La sonde à effet Hall a une réponse de type premier ordre de constante de temps τ donc de fréquence de coupure $f_{c,s}$ donnés par :

$$\tau = \tau_s/3 = 1 \mu s \quad \text{et} \quad f_{c,s} = 159,2 \text{ kHz}$$

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{V_{out}(p)}{B(p)} = \frac{S_c}{1 + \tau_s p}$$

L'amplificateur opérationnel utilisé possède une fonction de transfert en boucle ouverte $H(p) = A/(1 + \tau_{aop} p)$.

Le montage étant un suiveur, on a $(V_{out} - V_{mes}) \cdot A/(1 + \tau_{aop} p) = V_{mes}$ soit :

$$\frac{V_{mes}(p)}{V_{out}(p)} = \left(\frac{A}{1 + A}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\tau_{aop}}{1 + A}\right) p}$$

La fréquence de coupure $f_{c,ampli}$ de l'amplificateur est donc donnée par :

$$f_{c,ampli} = \frac{1 + A}{2\pi \tau_{aop}} = 1 \text{ MHz}$$

Parmi les trois éléments constitutifs, c'est le circuit magnétique qui possède la bande passante la plus faible. La fonction de transfert $V_{mes}(p)/I(p)$ du système de mesure est donc principalement conditionnée par la réponse du circuit magnétique. L'ordre de grandeur de la fréquence de coupure f_c du système de mesure est donc de $f'_{c,ferro} = 24,5$ kHz.

20.8 En utilisant les données du tableau 20.1 et les résultats précédents, il vient :

$$V_{mes}(I = 100 \text{ A}, T = 25^\circ \text{C}) = 4 \text{ V} + 500 \text{ gauss} \cdot 5 \text{ mV/gauss} = 6,5 \text{ V}$$

$$V_{mes}(I = 100 \text{ A}, T = 25 + 10^\circ \text{C})$$

$$= 4 \text{ V} \cdot (1 + 0,02 \text{ } \%/^\circ \text{C} \cdot 10^\circ \text{C}) + 500 \text{ gauss} \cdot (1 + 0,02 \text{ } \%/^\circ \text{C} \cdot 10^\circ \text{C}) \cdot 5 \text{ mV/gauss}$$

$$= 6,513 \text{ V}$$

L'erreur introduite par l'augmentation de la température de la sonde à effet Hall est donc $\delta V_{mes} = 13 \text{ mV}$. Ceci correspond à une erreur sur le courant mesuré donnée par :

$$\delta I = \frac{\delta V_{mes}}{S_{mes}} = \frac{13 \text{ mV}}{25 \text{ mV/A}} = 0,52 \text{ A}$$

II. Principe du fonctionnement en boucle fermée

20.9 Le générateur de courant est commandé par la tension de mesure V_{mes} . Considérons un courant I dans le conducteur. L'amplificateur opérationnel étant monté en soustracteur, le signal V_{mes} est $V_{mes} = V_{out} - V_{ref}$. Comme $V_{ref} = 4 \text{ V}$, V_{mes} n'est à l'image que des seules variations de V_{out} engendrées par le champ d'induction magnétique. On a soustrait la composante continue de V_{out} et V_{mes} est directement proportionnel au champ d'induction magnétique. Avec un sens du courant tel qu'indiqué sur le schéma de la figure 20.5, le champ d'induction magnétique dans le circuit magnétique est de la forme $B \vec{e}_\varphi$ et V_{mes} est positif. Le transistor NPN de l'alimentation de courant est donc conducteur et le transistor PNP bloqué. Un courant I' proportionnel à V_{mes} donc à I circule dans l'enroulement bobiné sur le circuit magnétique dans le sens schématisé sur la figure 20.5. Ce courant crée un champ d'induction magnétique $-B' \vec{e}_\varphi$ qui s'oppose au champ $B \vec{e}_\varphi$ créé par le courant I dans le conducteur. Le système en boucle fermée s'équilibre de façon à ce que le champ d'induction et donc le signal de sortie de l'amplificateur opérationnel soient nuls.

20.10 Pour obtenir la valeur du nombre N de spires, il faut tout d'abord déterminer l'expression du champ d'induction \vec{B}' créé par I' . Sous les mêmes hypothèses que pour le calcul de \vec{B} à savoir un entrefer faible et des lignes de champ parfaitement orthoradiales, le théorème d'Ampère appliqué sur un contour circulaire de rayon ρ centré sur l'axe z et passant dans le matériau ferromagnétique donne :

$$H'_{ferro}(2\pi\rho - d) + H'_{air}d = NI'$$

De la même façon qu'à la question I.2, on en déduit l'expression du champ d'induction magnétique :

$$B'(\rho) = \frac{\mu_0 \mu_r NI'}{2\pi\rho + d(\mu_r - 1)}$$

Pour déterminer l'expression du nombre de spires, on utilise le fait que le champ B créé par le courant I est totalement compensé dans le circuit ferromagnétique par le champ B' créé par le courant I' . En particulier pour les valeurs maximales de champ, on écrit $B(I_{\max}) = B_{\max} = B'(I'_{\max})$.

Ce champ d'induction étant une fonction de ρ , on calcule la valeur moyenne $\langle B' \rangle$ de l'induction B' sur la section du matériau ferromagnétique. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle B' \rangle &= \mu_0 \mu_r N I' \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{+a/2} dz \int_{r_{\min}-a/2}^{r_{\min}+a/2} \frac{d\rho}{d(\mu_r - 1) + 2\pi\rho} \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r N I'}{2\pi a} \ln \left(\frac{d(\mu_r - 1) + 2\pi \left(r_{\min} + \frac{a}{2} \right)}{d(\mu_r - 1) + 2\pi \left(r_{\min} - \frac{a}{2} \right)} \right) \\ &= 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot N I' \end{aligned} \quad (20.4)$$

N est alors déduit de $B_{\max} = 500 \cdot 10^{-4} \text{ T} = \langle B'(I'_{\max}) \rangle = 5 \cdot 10^{-4} N I'_{\max}$, soit $N = 1000$.

On remarque que si on avait calculé le champ moyen $\langle B \rangle$ sur la section du circuit magnétique, on aurait obtenu un résultat similaire à (20.4) :

$$\langle B \rangle = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi a} \ln \left(\frac{d(\mu_r - 1) + 2\pi \left(r_{\min} + \frac{a}{2} \right)}{d(\mu_r - 1) + 2\pi \left(r_{\min} - \frac{a}{2} \right)} \right) \quad (20.5)$$

Compte tenu des valeurs numériques utilisées, on a $d(\mu_r - 1) \gg 2\pi(r_{\min} \pm a/2)$. Le développement limité de (20.5) jusqu'au deuxième ordre donne :

$$\langle B \rangle \simeq \frac{\mu_0 \mu_r I}{d(\mu_r - 1)} \frac{1}{1 + \frac{2\pi r_{\min}}{d(\mu_r - 1)}}$$

Ce résultat est à prendre en compte relativement à la valeur de $B(r_{\min})$ utilisée dans les calculs. L'erreur commise reste faible et l'hypothèse faite au I.4 à savoir de confondre la valeur moyenne $\langle B \rangle$ du champ d'induction sur la sonde de Hall et sa valeur en $\rho = r_{\min}$ est raisonnable, en effet :

$$\frac{\langle B \rangle - B(r_{\min})}{B(r_{\min})} = - \left(\frac{2\pi r_{\min}}{d(\mu_r - 1)} \right)^2 = -6,7 \cdot 10^{-2}$$

20.11 La tension de mesure V'_{mes} à l'image de I' permet donc d'avoir accès au courant I à mesurer.

20 • Pince ampèremétrique AC-DC

En régime permanent, le champ total dans le ferromagnétique étant nul, il n'y a plus d'échauffement par courant de Foucault et la limitation de fonctionnement lié au comportement fréquentiel du matériau magnétique est bien moindre.

La multiplication du nombre de spires de l'enroulement sur le circuit magnétique permet de contrebalancer l'effet du courant I par un courant I' relativement faible.

ENCART 20.1

Les deux techniques étudiées dans ce problème de mesure des courants AC-DC offrent chacune un certain nombre d'avantages et d'inconvénients. Elles présentent toutes deux l'avantage d'une bonne isolation galvanique mais également l'inconvénient d'une assez faible immunité aux champs magnétiques externes.

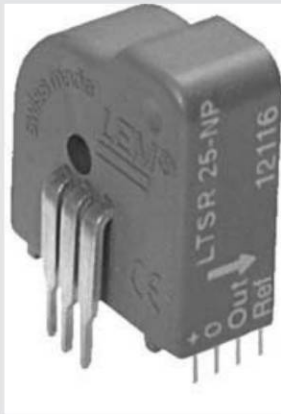


Figure 20.6 - Capteur de courant (fonctionnement en boucle fermée) à souder sur carte (documentation LEM)



Figure 20.7 - Pince ampèremétrique (documentation Chauvin-Arnoux)

Les capteurs de courants conçus sur le fonctionnement en boucle ouverte bénéficient d'une électronique simple et sont donc d'un coût peu élevé. Leur faible consommation reste principalement limitée à celle de la sonde à effet Hall. Cependant, ce principe présente l'inconvénient de chauffer le matériau magnétique par courants de Foucault et donc la mesure présente une sensibilité fortement variable en fonction de la fréquence du signal à mesurer. De plus, dans le cas de la mesure d'un courant continu, il peut se produire une dérive liée à l'induction rémanente du matériau magnétique. Les capteurs commercialisés présentent une bande passante de l'ordre de 0–50 kHz, une erreur de linéarité typique de $\pm 0,5\%$ et une précision de l'ordre de $\pm 1\%$.

Les capteurs de courant conçus sur le fonctionnement en boucle fermée sont dotés d'une électronique plus complexe et sont donc d'un coût plus élevé. Leur consommation, du fait de la présence de la source de courant nécessaire à la contre-réaction, est aussi plus élevée. Par principe, puisqu'il y a annulation du champ d'induction dans le matériau ferromagnétique, il n'y a pas de perte ni d'échauffement par courants de Foucault ni d'existence d'une induction rémanente du matériau magnétique. Les capteurs commercialisés présentent une bande passante de l'ordre de 0–200 kHz, une erreur de linéarité typique de $\pm 0,1\%$ et une précision de l'ordre de $\pm 5\%$.

Si le courant à mesurer varie suffisamment rapidement dans le temps, une autre technique peut être employée. Celle-ci utilise la force électromotrice induite par les variations du courant primaire dans un secondaire bobiné sur un noyau non-ferromagnétique. L'inconvénient de cette technique est que la force électromotrice induite au secondaire est à l'image de la dérivée du courant. Une technique permettant de disposer d'un signal de mesure à l'image du courant consiste à utiliser le principe de fonctionnement de la ceinture de Rogowski qui intègre la force électromotrice du secondaire.

PROBLÈME : Capteur angulaire robuste[@]

La volonté d'améliorer la commande des actionneurs des engins de chantier afin d'en obtenir une cinématique plus souple et plus précise nécessite, entre autres, la mise au point de capteurs angulaires particulièrement robustes. Ces capteurs destinés à travailler dans une atmosphère sévère (climat, poussière, humidité, etc.) doivent pouvoir fournir une mesure en temps réel de l'angle d'une articulation et ceci en supportant les vibrations et les chocs. Les grandeurs d'influence (atmosphère, chocs, vibrations, etc.) sont telles que les solutions industrielles existantes sont peu adaptées, principalement en raison de la liaison mécanique des deux parties mobiles de l'articulation.

Ce problème traite d'une partie de l'étude de faisabilité d'un capteur angulaire de type inductif destiné à être utilisé sur un engin de chantier.

Énoncé

I. Codeur angulaire inductif

Soit un codeur angulaire inductif destiné à la mesure de l'angle articulaire θ de deux éléments droits d'un engin de chantier que sont, par exemple, le balancier et la flèche d'une pelleuse (voir figures 21.1 et 21.2)

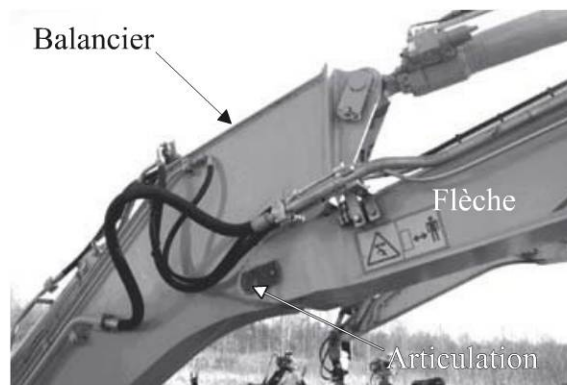


Figure 21.1 - Vue latérale d'une articulation de pelleuse

Le schéma de principe de cette articulation et les notations utilisées sont présentées figure 21.2.

[@] Les données de ce problème sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage)

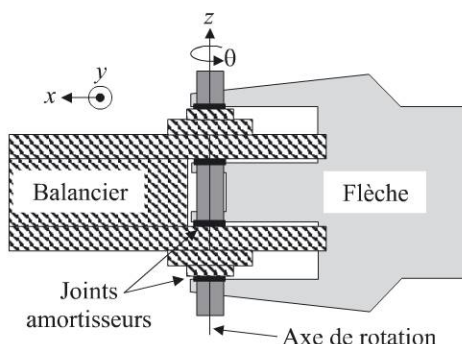


Figure 21.2 - Schéma de l'articulation

Le capteur angulaire doit être particulièrement robuste. Il doit être en mesure de fournir en temps réel la valeur de l'angle articulaire θ tout en présentant une sensibilité des plus faibles aux grandeurs d'influence. Celles-ci sont principalement les mouvements possibles (vibrations et chocs) dans les directions x , y et z de la flèche par rapport au balancier, mouvements rendus possibles par la conception (joints amortisseurs) et l'usure dans le temps des pièces mécaniques. Le capteur doit être de plus insensible aux autres grandeurs d'influence que sont les mouvements et accélérations de l'ensemble de l'articulation à θ fixé (déplacement de la pelleuse), la température, l'humidité, la poussière, le rayonnement infrarouge...

L'étendue de mesure est limitée à $E.M. = [-40^\circ, 40^\circ]$. La solution étudiée est celle d'un potentiomètre inductif à bobinage multiple. Deux pièces cylindriques coaxiales sans contact, l'une solidaire de la flèche (le stator induit) l'autre du balancier (le rotor inducteur) portent sur leur périphérie quatre groupes de bobinage constituant quatre capteurs élémentaires. Chaque capteur élémentaire est constitué d'un bobinage installé sur le rotor (solidaire du balancier) et en regard, de quatre bobinages installés sur le stator (solidaire de la flèche) comme le présente la figure 21.3. Le sens de l'enroulement est identique pour les différentes bobines. Aucune liaison mécanique n'existe entre le rotor et le stator.

Les bobines de l'inducteur sont montées en série et alimentées par une source de courant sinusoïdal I_g à la fréquence $f_g = 100$ kHz.

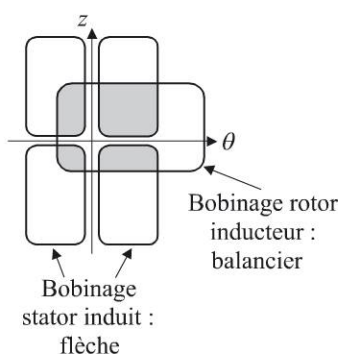


Figure 21.3 - Capteur élémentaire

21 • Capteur angulaire robuste

Les bobines de l'induit sont numérotées de b_1 à b_8 et de h_1 à h_8 selon les schémas des figures 21.4 et 21.5.

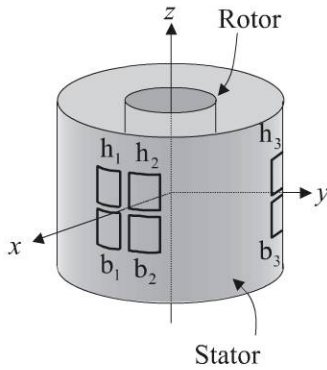


Figure 21.4 - Principe du système

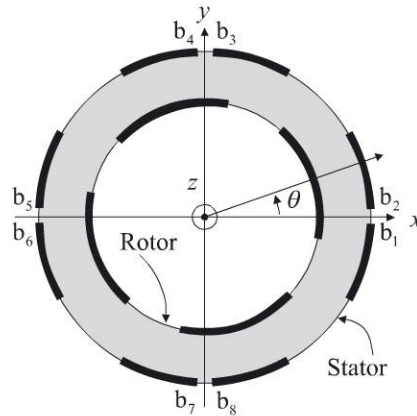


Figure 21.5 - Numérotation des bobines (pour les bobines indicées b sur la figure 21.4)

Lorsque le système est dans sa position de repos, chaque bobine rotor étant centrée par rapport aux quatre bobines stator qui lui font face et les axes rotor et stator étant confondus, chaque bobine stator est le siège d'une force électromotrice e_0 .

21.1 On considère un déplacement du rotor par rapport au stator. Ce déplacement peut être constitué d'une rotation d'angle θ (que l'on cherche à mesurer), d'un glissement de l'axe du rotor par rapport à celui du stator selon $z\vec{u}_z$ ou d'un déplacement latéral de l'axe rotor selon $x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ (grandeurs d'influence à éliminer). \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z sont les vecteurs unitaires des trois axes. Donner au premier ordre, en considérant de faibles déplacements à partir de la position de repos, les variations Δe_i des forces électromotrices induites dans les bobines du stator.

21.2 Déterminer quelle association série des bobines permet d'obtenir une variation ΔV_{mes} de la tension de mesure V_{mes} aux bornes de l'ensemble qui soit, au premier ordre, indépendante de x , y et z , et présente la meilleure sensibilité par rapport à θ .

L'amplitude V_{mes} du signal de mesure évolue dans le temps en fonction de l'évolution de l'angle θ à déterminer et, de façon résiduelle, en fonction des déplacements parasites selon les directions x , y et z . On suppose que le spectre utile de $V_{mes}(t)$, fonction implicite du temps, est l'intervalle $[0; f_u]$.

Une résistance R_g est placée en série avec le capteur et on note $v_g = R_g I_g \cos \omega_g t$ la tension aux bornes de cette résistance. Cette tension ainsi que la tension de mesure servent d'entrée à un multiplicateur analogique dont le signal de sortie est $v(t) = v_g(t)v_{mes}(t)/E$ (voir figure 21.6).

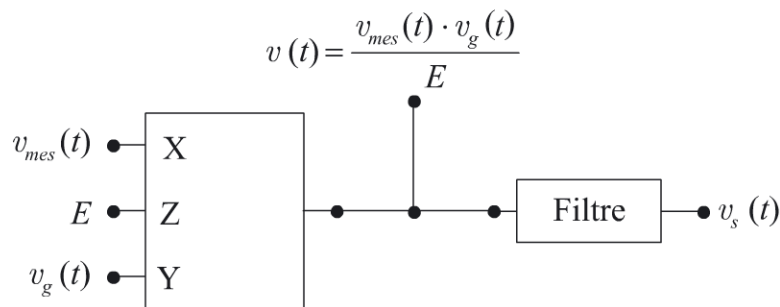


Figure 21.6 - Circuit de conditionnement

21.3 Pour une fréquence f du spectre utile de $V_{mes}(t)$, donner l'expression du signal de sortie $v_f(t)$ du premier étage du conditionneur.

En généralisant à tout le spectre utile du signal de mesure, en déduire le spectre du signal $v(t)$. On considérera que le spectre de $v(t)$ ne contient que des composantes de fréquences très inférieures à $2\omega_g$.

21.4 Le filtre de la figure 21.6 est un filtre passe-bas à cellule de Rauch comme schématisé sur la figure 21.7. Déterminer de façon générale la fonction de transfert $H(p)$ du filtre à cellule de Rauch. On explicitera celle-ci en fonction des admittances $Y_i = 1/Z_i$ des branches.

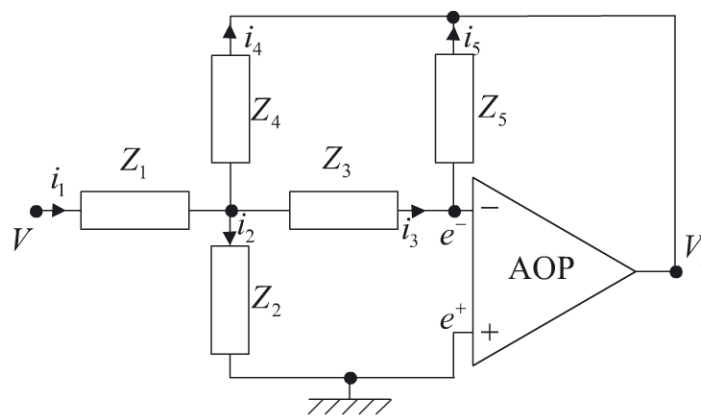


Figure 21.7 - Filtre à cellule de Rauch

21.5 Pour ce filtre (figure 21.7), on pose $Y_1 = Y_3 = Y_4 = 1/R$ avec $R = 1 \text{ k}\Omega$, $Y_5 = Cp$ et $Y_2 = kCp$. Par identification de la fonction de transfert à celle d'un filtre passe-bas du second ordre, donner l'expression du facteur d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 .

21.6 On fixe le facteur d'amortissement à $\xi = 1/\sqrt{2}$. En déduire la valeur de k . Montrer que dans ce cas le gain $G(\omega)$ du filtre s'écrit simplement et que la pulsation de coupure ω_c à -3 dB est égale à la pulsation propre ω_0 .

21 • Capteur angulaire robuste

21.7 De façon à ne conserver dans le spectre de $v(t)$ que le spectre utile de $V_{mes}(t)$, on fixe $G(2\omega_g) = G_0 - 80$ dB. En déduire la valeur à donner au condensateur C .

21.8 Donner alors l'expression du signal $v_s(t)$.

21.9 Un prototype est réalisé et on relève la tension de mesure $V_{mes}(\theta)$ en fonction de l'angle θ . Les résultats de cet étalonnage sont reportés dans le tableau 21.1.

Tableau 21.1 - Étalonnage

θ (°)	-40	-30	-20	-10	-0
V_{mes} (mV)	-105,74	-94,08	-70,84	-40,08	-1,15
θ (°)	+10	+20	+30	+40	
V_{mes} (mV)	+41,56	+72,16	+92,38	+105,63	

Évaluer la sensibilité de la mesure et l'erreur de linéarité. On donne $RI_g/2E = 2$.

On rappelle que les coefficients de la meilleure droite au sens des moindres carrés, d'équation $y = ax + b$, passant par N couples de points de mesure (x_i, y_i) sont donnés par :

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (21.1)$$

21.10 La non-linéarité étant importante, on se propose de réduire celle-ci de façon à obtenir dans l'idéal un signal de la forme $K\theta$. Montrer que l'inversion de la relation $v_s(\theta)$ peut permettre de linéariser la mesure pour peu que l'on puisse réaliser un signal qui soit un polynôme dont la variable est la tension v_s .

21.11 Une régression polynomiale de la relation $\theta(v_s)$ montre qu'avec une bonne précision on peut écrire pour v_s exprimé en volts et θ en degrés :

$$\theta = 1,504 \cdot 10^4 \cdot v_s^3 + 31,215 \cdot v_s^2 + 202,823 \cdot v_s - 0,1470 \quad (21.2)$$

À partir d'une approximation de la relation $\theta(v_s)$, donner les valeurs des résistances R_4 et R_5 à utiliser dans le montage de la figure 21.8 de façon à linéariser le signal de mesure et de générer un signal $v'_s = K\theta$ avec $K = 100$ mV/°. On considère les composants idéaux et on donne $V_{ref} = 100$ mV, $R_1 = R_3 = 1$ k Ω et $R_2 = 100$ k Ω .

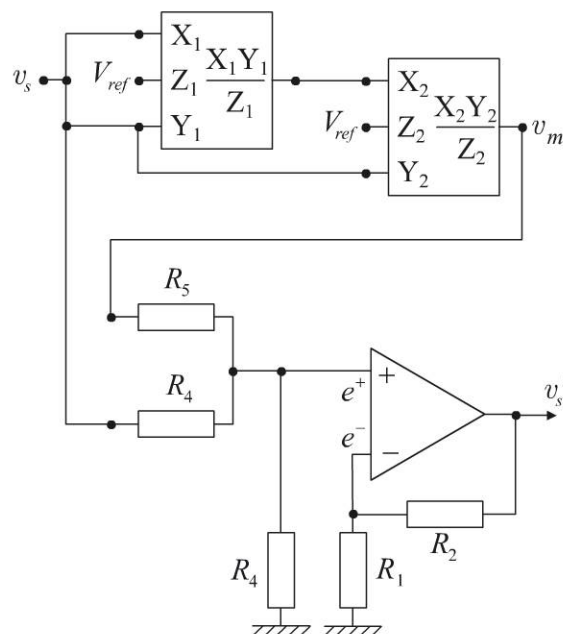


Figure 21.8- Circuit de conditionnement du signal

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

- ▶ La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville
- ▶ Le site de Dunod, à l'adresse suivante : www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

PROBLÈME : Anémomètre à fil chaud

Parmi les différentes techniques d'anémométrie, une méthode relativement fiable consiste à plonger dans l'écoulement du fluide un fil fin métallique (généralement pour les gaz) ou un film métallique (généralement pour les liquides) pouvant présenter une géométrie plus ou moins complexe (fil droit, serpentin...). Le capteur résistif constitué par cet élément métallique est chauffé par effet Joule. Si sa température est supérieure à la température du fluide, le capteur perd de la chaleur au profit du fluide. L'échange thermique entre le capteur et le fluide se fait principalement par convection et est fonction des propriétés du fluide, de sa vitesse et de l'écart de température entre le fluide et le capteur. Le capteur acquiert alors une température donc une valeur de sa résistance fonction de la vitesse du fluide.

Une des problématiques de cette méthode de mesure est liée à la température du fluide qui doit être parfaitement connue et stable. Toute erreur sur la mesure de la température du fluide entraîne une erreur importante sur la détermination de la vitesse du fluide.

Ce problème étudie dans un premier temps une technique simple de mesure de la vitesse du fluide. Le conditionnement électronique du capteur maintient sa température constante. Ce montage présente l'inconvénient de posséder une grande sensibilité aux variations ou erreurs de mesure de la température du fluide.

Dans un second temps, une technique de mesure permettant de s'affranchir de la mesure de la température du fluide est présentée. Cette dernière technique est inspirée d'un article paru dans *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements*, vol. 52, n° 5, pp. 1554-1558, October 2003.

Énoncé

L'anémomètre à fil chaud étudié ici est constitué d'un fil métallique résistif de résistance R_c , fonction de sa température T_c , dans lequel circule un courant I . La puissance dissipée par effet Joule fournit de la chaleur au fil qui en rétrocede une certaine quantité au fluide à la température T_f ($T_f < T_c$) circulant à la vitesse v . La chaleur cédée au fluide par le fil est fonction des températures du fluide et du fil et de la vitesse du fluide. Le fil constitue alors un capteur de mesure de la vitesse du fluide dans lequel il est plongé.

I. Montage à température constante

Un montage classique consiste à conditionner le capteur selon le montage de la figure 22.1 afin de maintenir constante sa température. À température du fluide donnée, si la vitesse du fluide augmente, la température du fil et donc sa résistance ont tendance à diminuer. La contre-réaction du montage provoque une augmentation du courant circulant dans le fil et donc de l'effet Joule de façon à ramener la température du capteur à sa valeur initiale.

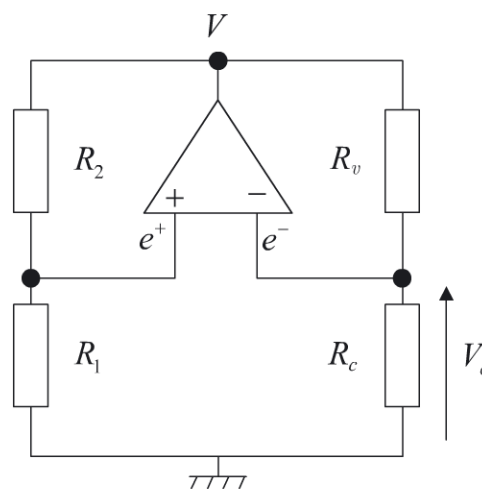


Figure 22.1- Conditionnement

On suppose que l'amplificateur opérationnel utilisé possède une fonction de transfert en boucle ouverte de la forme $H(p) = A/(1 + \tau p)$ et on pose $k = R_1/(R_1 + R_2)$.

22.1 a) Exprimer les entrées e^+ et e^- de l'amplificateur en fonction de k , V et V_c puis établir la relation liant V et V_c dans le domaine de Laplace en fonction de τ , p , k et A .

b) En déduire dans le domaine temporel, l'expression de l'équation différentielle reliant V et V_c . Donner l'expression de V_c en régime permanent.

22.2 À partir de la figure 22.1, établir la relation donnant R_c en fonction de R_v , V et V_c puis en utilisant le résultat précédent exprimer R_c en fonction de R_v , k et A .

22.3 La résistance du capteur peut s'écrire en 1^{ère} approximation $R_c = R_0(1 + \alpha T_c)$ où R_0 représente la résistance du capteur à 0 °C. En utilisant la question précédente, exprimer la température T_c du capteur en fonction de R_v , R_0 , α , V et V_c puis en fonction des constantes R_v , R_0 , α , k et A .

Conclure quant à ces deux derniers résultats.

22.4 Soit P la puissance dissipée par effet Joule par le capteur, calculer P en fonction de R_v , V et V_c .

22.5 Soit $C = mc$ la capacité calorifique du capteur (où m est sa masse et c sa capacité calorifique massique) et S la surface latérale du fil dont il est constitué. Soient T_f la température du fluide et v sa vitesse. On suppose que la chaleur fournie par le capteur au fluide pendant l'intervalle de temps élémentaire dt peut se mettre en première approximation sous la forme $S(a + b\sqrt{v})(T_c - T_f)dt$. Cette expression dite

formule de King n'est valable que pour un domaine précis de vitesse, de température et de viscosité du fluide qui ne sera pas précisé ici.

Établir le bilan thermique du capteur en fonction de P .

22.6 On suppose que le régime permanent est atteint. Déterminer l'expression de la vitesse v du fluide.

22.7 Plutôt que de calculer la vitesse du fluide à partir des valeurs constantes T_c , R_c (voir questions I.2 et 3 et de la mesure de P via celle de V_c (voir question I.4), on suppose que l'on dispose d'une électronique capable de mesurer V et V_c . Cette électronique est à même d'effectuer les calculs nécessaires à la détermination de T_c et de P à partir des mesures de V et V_c et des constantes du problème, R_v , R_0 et α .

En effet, déterminer la température T_c du capteur par le calcul nécessite de connaître parfaitement les valeurs de R_v , R_0 , α , k et A ce qui reste délicat pour certaines grandeurs notamment pour A . De plus toute variation de la tension de décalage de l'amplificateur opérationnel, effet non pris en compte ici, entraînerait une variation de la température du capteur et fausserait donc les résultats.

a , b , S , α , R_0 et R_v étant des données du problème, quel est l'inconvénient majeur toujours présent lors la détermination de la vitesse v du fluide à partir des mesures de V et V_c ?

22.8 Le fil est un alliage de résistivité $\rho = 1,15 \cdot 10^{-7} \Omega \text{ m}$ à 0°C , de rayon $r = 20,0 \mu\text{m}$ et de longueur $l = 7,50 \text{ cm}$. Calculer la valeur de sa résistance R_0 à 0°C .

22.9 Des mesures sur ce montage pour un fluide à la température $T_f = 20^\circ \text{C}$ donnent $V = 5,12 \text{ V}$ et $V_c = 2,57 \text{ V}$. Déterminer P , T_c et la résistance R_c du capteur. En déduire la vitesse v du fluide. On donne $\alpha = 1,72 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$, $R_v = 7,52 \Omega$, $a = 1\,375 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}$ et $b = 976 \text{ W} \cdot \text{s}^{1/2} \cdot \text{m}^{-5/2} \cdot \text{C}^{-1}$.

22.10 Si on commet une erreur de 1°C sur la détermination de la température du fluide, quelle erreur relative commet-on sur la détermination de la vitesse à partir des mêmes mesures de V et V_c ?

II. Montage à compensation de température à un capteur

Pour pallier la difficulté précédente, on remplace la résistance R_v par un système commutant à la fréquence f et où la résistance R_v prend alternativement les valeurs $R_{v1} = 7,52 \Omega$ et $R_{v2} = 7,32 \Omega$; le reste du montage restant identique. On suppose comme précédemment que les mesures sont toujours effectuées une fois l'équilibre atteint. On fait de plus l'hypothèse que la fréquence de commutation est suffisante pour considérer que la température du fluide et sa vitesse n'évoluent pas sur une période de commutation.

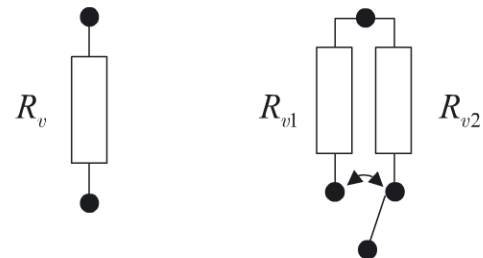


Figure 22.2 - Commutation

22.11 Donner les expressions des puissances P_1 et P_2 respectivement en fonction de V_1, V_{c1}, R_{v1} et V_2, V_{c2}, R_{v2} .

22.12 Donner les expressions des températures T_{c1} et T_{c2} en fonction de α et R_0 et respectivement de V_1, V_{c1}, R_{v1} et V_2, V_{c2}, R_{v2} .

22.13 On suppose qu'après chaque commutation les mesures des tensions V_1, V_{c1}, V_2 et V_{c2} s'effectuent une fois l'équilibre atteint et que l'on dispose d'une unité de calcul capable de stocker ces valeurs et d'effectuer les calculs nécessaires. À partir des bilans thermiques propres à chaque état de commutation, déterminer l'expression de la vitesse v du fluide en fonction de P_1, P_2, T_{c1} et T_{c2} . Conclure quant à cette mesure.

Corrigé détaillé

I. Montage à température constante

22.1 a) D'après la figure 22.1, R_1 et R_2 constituent un diviseur de la tension V , si bien que $e^+ = VR_1/(R_1 + R_2) = kV$. On a directement $e^- = V_c$. La fonction de transfert en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel étant $H(p) = A/(1 + \tau p)$, on obtient à la sortie de ce dernier :

$$V = H(p)(e^+ - e^-) = \frac{A}{1 + \tau p}(kV - V_c)$$

Après réarrangement, on obtient l'équation liant, dans le domaine de Laplace, V et V_c , soit :

$$\tau pV + (1 - Ak)V + AV_c = 0$$

b) Dans le domaine temporel, cette expression devient :

$$\tau \frac{dV}{dt} + (1 - Ak)V + AV_c = 0 \quad (22.1)$$

En régime permanent, il vient simplement :

$$V_c = V \frac{(Ak - 1)}{A} \quad (22.2)$$

22.2 R_c et R_v réalisent un diviseur de tension de la tension V .

Soit $V_c = VR_c/(R_c + R_v)$. En utilisant (22.2), il vient :

$$R_c = \frac{V_c}{V - V_c} R_v = \frac{Ak - 1}{A(1 - k) + 1} R_v \quad (22.3)$$

22.3 À partir de la loi d'évolution de la résistance du capteur, la température de ce dernier peut se mettre sous la forme :

$$T_c = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_c - R_0}{R_0} \right)$$

Soit, en utilisant (22.3) :

$$T_c = \frac{1}{\alpha R_0} \left(\frac{(R_v + R_0)V_c - R_0V}{V - V_c} \right) = \frac{1}{\alpha R_0} \left(\frac{(Ak - 1)(R_v + R_0) - AR_0}{A(1 - k) + 1} \right) \quad (22.4)$$

On remarque qu'en régime permanent la résistance du capteur et sa température sont asservies à rester constantes et leurs valeurs ne dépendent que de la valeur de la résistance R_0 du capteur au repos (à la température de référence de 0°C), de son coefficient thermique α , des autres résistances du pont R_v , R_1 et R_2 et du gain A en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel.

22.4 Le calcul de la puissance dissipée par effet Joule par le capteur est immédiat et on obtient en utilisant le résultat (22.3) :

$$P = \frac{V_c^2}{R_c} = \frac{V_c(V - V_c)}{R_v} \quad (22.5)$$

22.5 Pendant la durée dt , la différence entre l'énergie δQ_r reçue par le capteur par effet Joule et l'énergie δQ_c qu'il rétrocede au fluide est égale à l'énergie δQ_a qu'il accumule et qui provoque une augmentation dT_c de sa température. On a donc le bilan thermique suivant :

$$\delta Q_r - \delta Q_c = \delta Q_a = Pdt - S(a + b\sqrt{v})(T_c - T_f)dt = mcdT_c = CdT_c$$

Soit encore :

$$P - S(a + b\sqrt{v})(T_c - T_f) = C \frac{dT_c}{dt} \quad (22.6)$$

22.6 Le régime permanent atteint, on a $dT_c/dt = 0$. On peut déduire du résultat (22.6) la vitesse v du fluide, soit :

$$v = \left[\frac{1}{bS} \left(\frac{P}{T_c - T_f} - aS \right) \right]^2 \quad (22.7)$$

Dans (22.7), P et T_c sont données par les résultats précédents, soit :

$$P = \frac{V_c^2}{R_c} = \frac{V_c(V - V_c)}{R_v} \quad \text{et} \quad T_c = \frac{1}{\alpha R_0} \frac{(R_v + R_0)V_c - R_0V}{V - V_c}$$

22.7 Les mesures de V et de V_c donnent accès à P et à T_c puis à la vitesse v . L'inconvénient de ce type de mesure est qu'elle dépend fortement de la température du fluide T_f . On doit donc la mesurer par ailleurs et prendre en compte ses variations éventuelles.

22.8 La résistance R_0 à la température de référence 0°C est donnée par la loi d'Ohm macroscopique, soit :

$$R_0 = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{l}{\pi r^2} = 6,86 \Omega$$

22.9 À partir de ce résultat et de (22.4) et (22.5), on obtient $T_c = 60,6^\circ\text{C}$ et $P = 871 \text{ mW}$. On en déduit immédiatement $R_c = 7,58 \Omega$.

La surface latérale du fil est donnée par $S = 2\pi r l = 9,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. La vitesse du fluide s'en déduit à partir de (22.7) et on obtient $v = 0,85 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

22.10 En reprenant le calcul de la vitesse v à partir du résultat (22.7) avec les mêmes valeurs de V , V_c et par conséquent de P mais avec une température du fluide surestimée de $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, soit $T_f + \Delta T = 20 + 1 = 21^\circ\text{C}$, on obtient une vitesse du fluide de $0,96 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ au lieu de $0,85 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'erreur relative commise est donc de 13 %.

L'erreur d'estimation de la température du fluide entraîne une forte erreur sur la mesure de la vitesse du fluide. Cette erreur est d'autant plus importante que la vitesse du fluide est faible et que sa température est élevée comme le montre la figure 22.3.

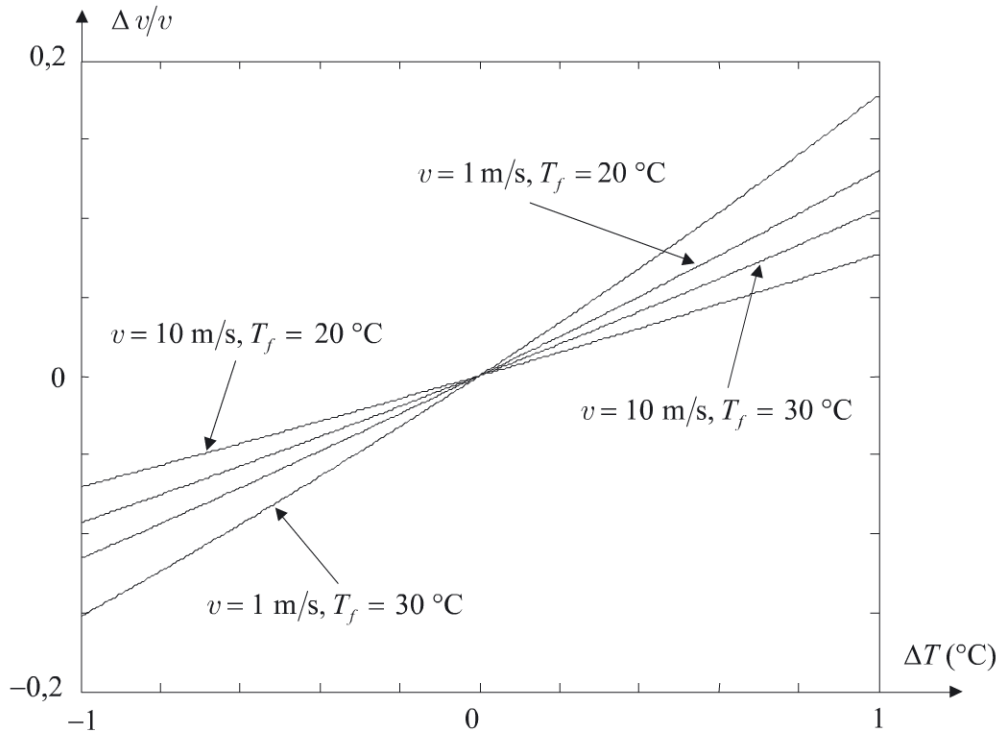


Figure 22.3 - Erreur relative sur la vitesse en fonction de l'erreur de mesure sur la température du fluide

II. Montage à compensation de température à un capteur

22.11 D'après le résultat (22.5), on a immédiatement :

$$P_1 = \frac{V_{c1}(V_1 - V_{c1})}{R_{v1}} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{V_{c2}(V_2 - V_{c2})}{R_{v2}}$$

22.12 De même, d'après le résultat (22.4), il vient :

$$T_{c1} = \frac{1}{\alpha R_0} \left(\frac{(R_{v1} + R_0)V_{c1} - R_0 V_1}{V_1 - V_{c1}} \right) \quad \text{et} \quad T_{c2} = \frac{1}{\alpha R_0} \left(\frac{(R_{v2} + R_0)V_{c2} - R_0 V_2}{V_2 - V_{c2}} \right)$$

22.13 À partir des équations du bilan thermique à l'équilibre et en considérant que la vitesse du fluide et sa température restent constantes sur au moins une période de commutation, on a (voir (22.6)) :

$$P_1 = S(a + b\sqrt{v})(T_{c1} - T_f) \quad \text{et} \quad P_2 = S(a + b\sqrt{v})(T_{c2} - T_f)$$

Par soustraction de deux valeurs consécutives, c'est-à-dire des deux valeurs précédentes, il vient :

$$v = \left[\frac{1}{bS} \left(\frac{P_1 - P_2}{T_{c1} - T_{c2}} - aS \right) \right]^2$$

La mesure est maintenant indépendante de la température T_f du fluide, P_i et T_{ci} ($i = 1,2$) étant obtenues par calcul à partir des valeurs mesurées V_i et V_{ci} et des données α , R_0 et R_{vi} .

La mesure reste cependant tributaire d'une bonne connaissance des coefficients a et b apparaissant dans la formule de King, coefficients dépendant de la nature du fluide et de celle du capteur.

ENCART 22.1

Dans ce problème, une hypothèse importante a été faite en ce sens que l'on a toujours supposé que les mesures étaient effectuées une fois l'équilibre thermique atteint. Il est important, afin de fixer la fréquence de commutation des résistances R_{v1} et R_{v2} , d'évaluer la vitesse de la réponse thermique du système. Ceci peut être effectué en résolvant simultanément les deux équations différentielles (22.1) et (22.6). À ce titre, les courbes de la figure 22.4 présentent l'évolution temporelle de la résistance R_c du capteur et de la tension de sortie V de l'amplificateur opérationnel pour une commutation de la valeur $R_{v1} = 7,52 \Omega$ (régime permanent atteint) à la valeur $R_{v2} = 7,32 \Omega$. Les valeurs utilisées pour cette simulation sont celles du problème et $A = 10^5$, $k = 0,501$, $C = 3 \cdot 10^{-8} \text{ J.K}^{-1}$ et $\tau = 1,59 \text{ ms}$.

Dans ce type de montage à température constante, la réponse est extrêmement rapide, bien plus que dans d'autres montages possibles comme par exemple un montage à courant constant dans le capteur.

À partir de ces courbes, il est clair qu'une commutation à une fréquence de quelques kilohertz peut être envisagée.

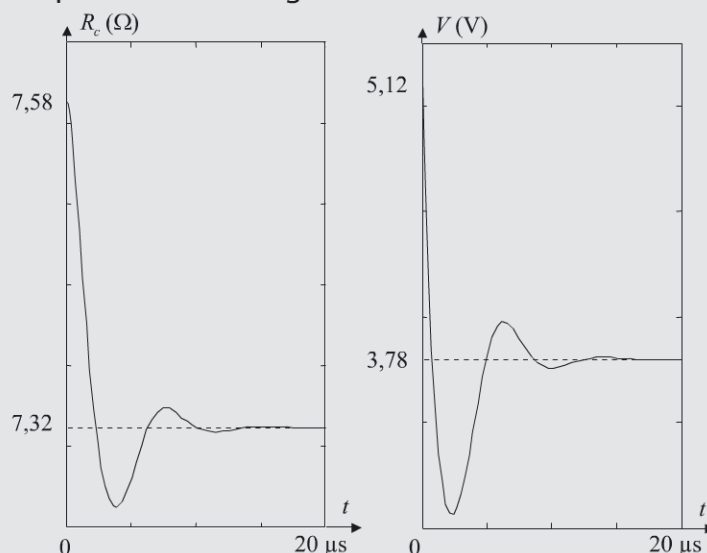


Figure 22.4 - Évolution temporelle de la résistance R_c du capteur et de la tension de sortie V de l'amplificateur

22 • Anémomètre à fil chaud



Figure 22.5 - Sonde thermo-anémométrique, tête de mesure de la sonde (laissant apparaître le fil chaud et le composant de mesure de la température du fluide) et module de conditionnement et d'affichage (documentation KIMO)

PROBLÈME : Thermocouple, thermopile et pyromètre optique[@]

La température est, après le temps, la deuxième variable physique la plus fréquemment mesurée. Dans un environnement de production industrielle, une surveillance précise des températures permet d'augmenter la qualité du produit et la productivité. Parmi les techniques de mesure, la mesure à distance par pyrométrie n'est pas une invention nouvelle ; elle est employée depuis plusieurs décennies dans l'industrie et la recherche. Les innovations récentes ont permis de réduire les coûts, d'augmenter la fiabilité de la mesure et de miniaturiser les capteurs. Deux principaux types de capteurs se partagent le marché de la mesure de température à distance : les thermopiles, principalement utilisées dans le domaine des pyromètres à poste fixe et portables et les matrices semiconductrices IR ou bolométriques dans le domaine de l'imagerie thermique. Ce problème présente quelques éléments du fonctionnement d'un pyromètre optique à thermopile.

Énoncé

I. Thermocouple

Dans ce problème on notera t une température exprimée en degré Celcius et T la même température exprimée en Kelvin.

On considère le montage représenté figure 23.1, destiné à une mesure de température par thermocouple avec compensation de soudure froide. La fem du thermocouple A - B utilisé est donnée dans le tableau 23.1. Les câbles de prolongation du thermocouple sont constitués du même métal noté X. On note t_c la température de la jonction de mesure et t_a la température ambiante, température de la soudure froide et de l'ensemble de l'électronique. Les amplificateurs opérationnels utilisés sont considérés idéaux.

[@] Les données de ce problème sont téléchargeables (cf. l'avant-propos de l'ouvrage)

23 • Thermocouple, thermopile et pyromètre optique

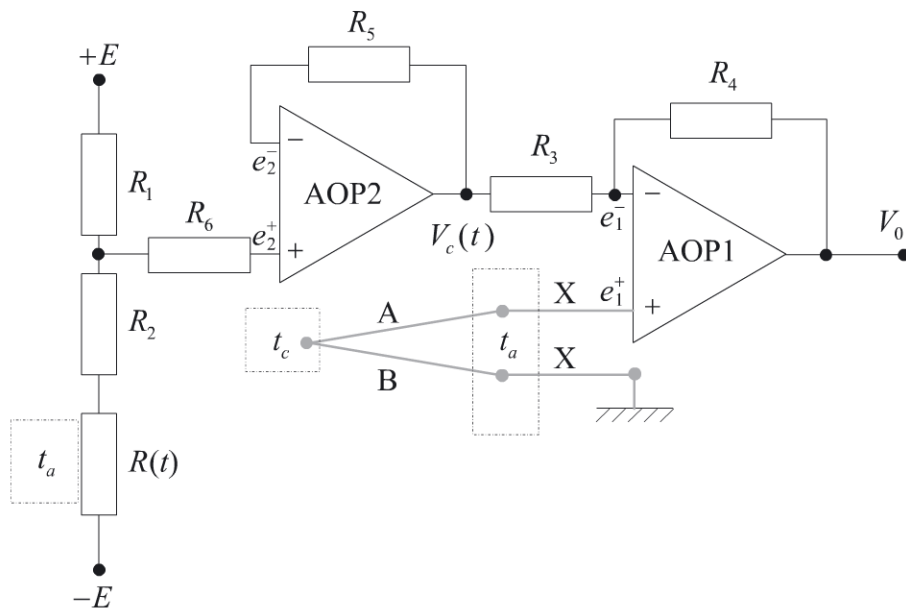


Figure 23.1 - Schéma de principe de la mesure

Tableau 23.1 - Force électromotrice en fonction de la température

		$E_{A/B}^{t;0}$ (μV)									
$t(^{\circ}\text{C})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	59	118	176	235	294	354	413	472	532	
10	591	651	711	770	830	890	950	1010	1071	1131	
20	1192	1252	1313	1373	1434	1495	1556	1617	1678	1740	
30	1801	1862	1924	1986	2047	2109	2171	2233	2295	2357	
40	2420	2482	2545	2607	2670	2733	2795	2858	2921	2984	

23.1 Calculer l'expression de la tension de sortie V_0 en fonction de la fem de Seebeck du thermocouple et de la tension V_c .

23.2 Quelle condition doit satisfaire V_c pour que V_0 soit proportionnel à $E_{A/B}^{t_c;0}$?

Exprimer cette condition en fonction du pouvoir thermoélectrique $s_{A/B}$ du thermocouple, en supposant $E_{A/B}^{t_a;0}$ linéaire en fonction de t_a . Quelle est dans ce cas pour le thermocouple la valeur de $s_{A/B}$?

23.3 Les résistances R_1 et R_2 sont indépendantes de la température alors que la valeur de la résistance $R(t)$, placée à la température ambiante t_a , évolue avec la température suivant la loi $R(t) = R_0(1 + \alpha_R t)$. Calculer l'expression générale de $V_c(t_a)$. Comme on peut supposer que $\alpha_R t_a \ll 1$, on se contentera d'une expression à l'ordre 1 en $\alpha_R t_a$ de $V_c(t_a)$. Calculer cette expression.

23.4 La tension $V_c(t_a)$ devant être utilisée pour la compensation de soudure froide, déterminer les relations que doivent vérifier R_1 , R_2 et R_0 puis α_R et $s_{A/B}$.

23.5 La résistance $R(t)$ est celle d'une thermistance $R'(T)$ linéarisée au moyen d'une résistance R_l en parallèle. On rappelle que la résistance de la thermistance évolue avec la température absolue T selon :

$$R'(T) = R_{réf} \exp B \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{réf}} \right] \quad (23.1)$$

À partir des données du tableau 23.2 donnant les valeurs de la résistance en fonction de la température, calculer par régression linéaire la valeur du coefficient B . On rappelle qu'à une température dans l'échelle Celsius de 0°C correspond une température absolue de $273,15\text{ K}$.

Tableau 23.2- Évolution de la résistance de la thermistance

t ($^\circ\text{C}$)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$R'(T)$	14129,9	11335,1	9152	7437,4	6060,3	5000	4134,9	3438,1	2873,8

23.6 Déterminer la valeur de R_l pour linéariser $R'(T)$ autour de la température $\bar{t}_a = 25^\circ\text{C}$.

23.7 Calculer la valeur R_0 et le coefficient thermique α_R de $R(t)$ en considérant que ce coefficient a une valeur constante égale à celle prise en $t = \bar{t}_a$.

23.8 À partir des résultats précédents, calculer les valeurs des résistances R_1 et R_2 . On donne $R_4 = 99R_3$ et $E = 2,5\text{ V}$.

23.9 Donner l'expression de la tension de mesure et calculer la sensibilité de la mesure après la compensation de soudure froide.

II. Thermopile

On réalise maintenant une thermopile, capteur du rayonnement infrarouge, constituée d'une association série de plusieurs thermocouples du type précédemment décrit. Le système est réalisé par micro-usinage. Les couples sont réalisés sur une membrane suspendue reliée au bâti par des poutres de grande longueur de façon à minimiser la conduction thermique entre les jonctions de mesure à la température t et les jonctions de référence à la température t_a , température du bâti (voir figures 23.2 et 23.3). La membrane recouverte d'un matériau absorbant l'infrarouge est de faible épaisseur, donc de faible capacité calorifique, de façon à ce que l'absorption du rayonnement infrarouge provoque une élévation significative de sa température t . Le bâti, de grande inertie thermique, est à la température t_a (indépendante de l'évolution de la température t). La résistance $R(t)$ du circuit de compensation de soudure froide précédemment étudié se trouve sur le bâti et est donc à la température t_a .

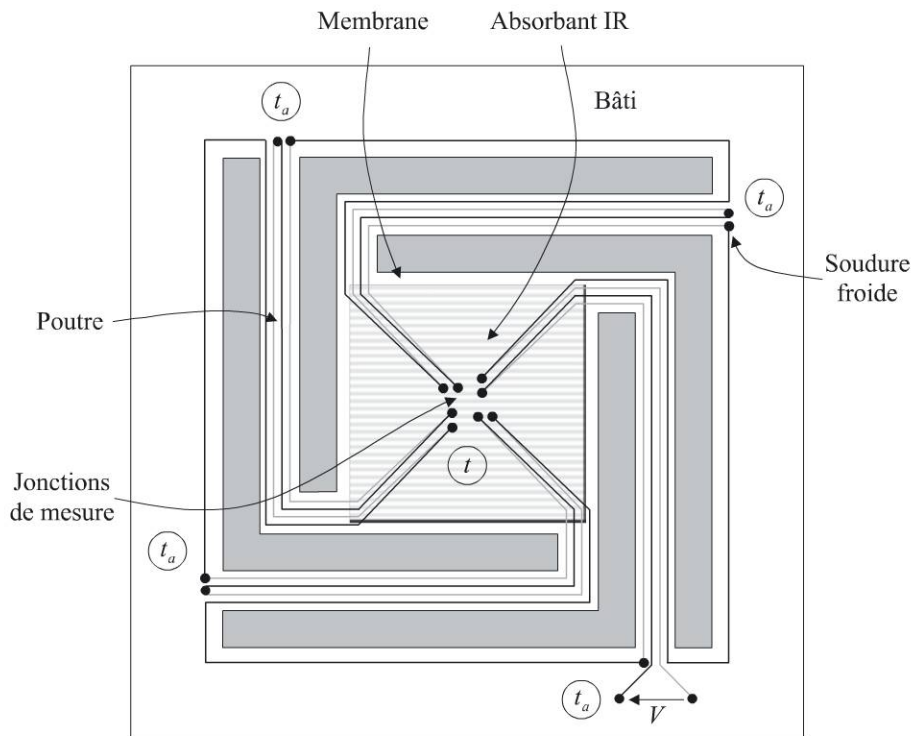


Figure 23.2 - Thermopile micro-usinée à huit jonctions de mesure

23.10 On suppose qu'il y a N thermocouples élémentaires et comme schématisé sur la figure 23.3, que l'ensemble est relié à l'électronique par des conducteurs X. Déterminer l'expression de la tension V aux bornes de l'ensemble des N thermocouples.

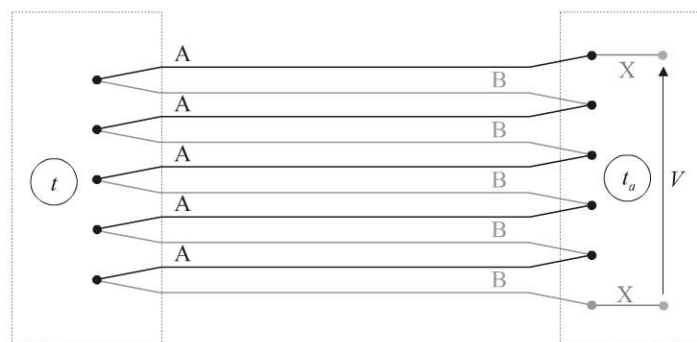


Figure 23.3 - Principe de la constitution d'une thermopile à cinq jonctions de mesure

23.11 Montrer que l'électronique de compensation de soudure froide développée précédemment convient pour peu que l'on recalcule les valeurs des résistances R_1 et R_2 . Donner la nouvelle valeur de la sensibilité. On donne $N = 32$.

III. Pyromètre optique

La thermopile précédente est destinée à être utilisée dans un pyromètre optique. Un pyromètre optique utilise le rayonnement thermique d'un corps à la température T_c pour en déduire, à distance, cette température.

Tout corps à température T_c émet un rayonnement infrarouge dont la répartition spectrale et la puissance totale sont des fonctions de la température. On rappelle qu'un corps noir est un corps idéal dont le facteur d'absorption est égal à l'unité quelle que soit la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique qu'il reçoit. À l'équilibre thermique, l'émittance spectrale $E_\lambda(T_c, \lambda)$ (puissance rayonnée par unité de surface du corps et par unité de longueur d'onde dans les 4π stéradians) d'un corps noir est donnée par la loi de Planck :

$$E_\lambda(T_c, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T_c}\right) - 1 \right]} \quad (23.2)$$

h représente la constante de Planck, c le célérité de la lumière et k la constante de Boltzmann.

L'émittance spectrale $E_{\lambda, \text{réel}}(T_c, \lambda)$ d'un corps réel est liée à celle du corps noir $E_\lambda(T_c, \lambda)$ par l'émissivité du corps réel $\varepsilon(T_c, \lambda)$. Un corps dont l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde λ est appelé corps gris.

Le corps noir suit l'hypothèse de Lambert, à savoir que sa luminance est uniforme.

Le pyromètre optique collecte le rayonnement infrarouge émis en provenance d'une partie du corps que l'on appellera la cible. La fenêtre d'entrée du pyromètre est une lentille de focale image f et de diamètre \varnothing . Celle-ci filtre une certaine bande spectrale $[\lambda_1 ; \lambda_2]$ du rayonnement incident qui est focalisée sur les jonctions de mesure d'une thermopile (surface active d'aire Σ de la membrane). Ce rayonnement est en partie absorbé par la thermopile. L'absorption d'une partie du rayonnement provoque une élévation de la température T de la thermopile. Celle-ci traduit cette élévation de température en signal électrique et une électronique adaptée permet d'en déduire la température T_c de la cible. On note $r(\lambda)$ le facteur de réflexion énergétique à la longueur d'onde λ prenant en compte les différentes réflexions (lentille et thermopile).

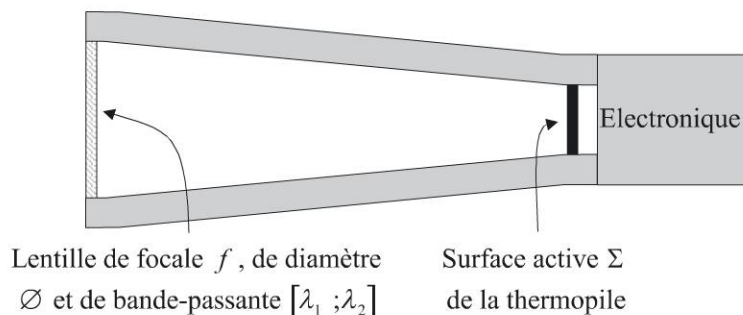


Figure 23.4 - Schéma de principe du pyromètre optique

23.12 Soit un corps rayonnant à la température T_c . On note Σ' la surface de la cible effectivement scrutée par le pyromètre. Etablir la relation entre Σ et Σ' . Pour la

23 • Thermocouple, thermopile et pyromètre optique

lentille, on se placera dans la formulation de Descartes en notant p_i la distance algébrique du centre optique de la lentille à la surface active et p_o la distance algébrique du centre optique de la lentille à la cible scrutée.

En notant L la luminance de la cible, montrer que le flux F reçu par la thermopile est une constante.

23.13 Calculer la résolution optique du pyromètre, rapport de la distance objet scruté-pyromètre au diamètre de la surface cible scrutée sur l'objet. On donne $p_i = 6,5$ cm.

23.14 La fenêtre spectrale utile du pyromètre est $[\lambda_1 ; \lambda_2] = [8 \mu\text{m} ; 14 \mu\text{m}]$. On étalonne le système en le plaçant face à un corps noir à la température T_{cn} .

Déterminer l'expression de la puissance du rayonnement reçu par la thermopile dans la fenêtre spectrale du système. On introduira la constante de Stefan $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15h^3 c^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, on posera $x_1 = hc/kT_{cn}\lambda_1$ et $x_2 = hc/kT_{cn}\lambda_2$ et on supposera le facteur de réflexion $r(\lambda)$ constant et égal à $r = 25 \%$.

De même, on posera :

$$U(x_1, x_2) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \text{et} \quad \eta = (15/\pi^4) \cdot \sigma T_{cn}^4 \cdot U(x_1, x_2)$$

23.15 $x_1 = hc/kT_{cn}\lambda_1$ et $x_2 = hc/kT_{cn}\lambda_2$ sont des fonctions de la température du corps noir. En se limitant à une étendue de mesure $E.M = [0^\circ\text{C} ; 900^\circ\text{C}]$ la valeur de l'intégrale $U(x_1, x_2)$ est donnée par la courbe de la figure 23.5. La courbe de la figure 23.6 donne l'allure de η , soit celle de la puissance P reçue par la thermopile à un facteur près. Sur l'étendue de mesure, l'expression de η est approchée avec une erreur relative maximale inférieure à 0,5 % par le polynôme suivant d'ordre 7 en T_{cn} (exprimée en kelvin) :

$$\eta \approx 9,269 \cdot 10^{-18} T_{cn}^7 - 5,102 \cdot 10^{-14} T_{cn}^6 + 1,163 \cdot 10^{-10} T_{cn}^5 - 1,386 \cdot 10^{-7} T_{cn}^4 + 8,555 \cdot 10^{-5} T_{cn}^3 - 0,015 T_{cn}^2 - 0,294 T_{cn} + 210,396 \quad (23.3)$$

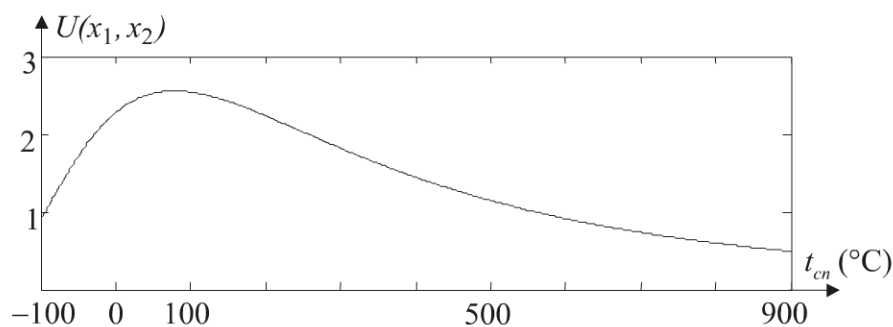


Figure 23.5 – Évolution de la valeur de l'intégrale $U(x_1, x_2)$ avec la température

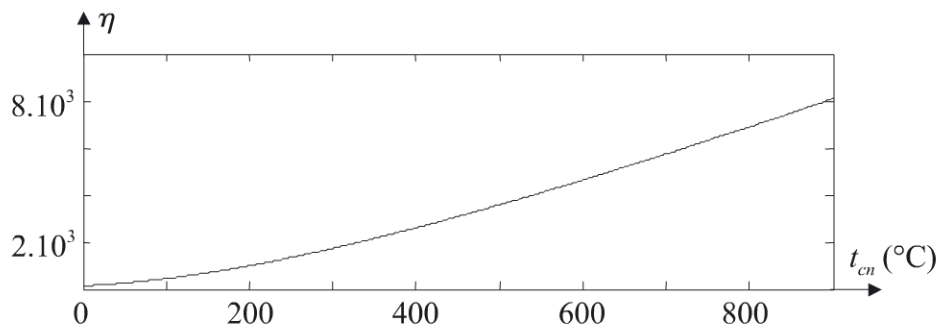


Figure 23.6 - Évolution de $15\sigma T_{cn}^4 U(x_1, x_2)/\pi^4$ avec la température

La relation (23.3) peut être inversée pour donner :

$$T_{cn} \approx 9,530 \cdot 10^{-24} \eta^7 - 2,981 \cdot 10^{-19} \eta^6 + 3,799 \cdot 10^{-15} \eta^5 \quad (23.4)$$

$$-2,546 \cdot 10^{-11} \eta^4 + 9,686 \cdot 10^{-8} \eta^3 - 2,151 \cdot 10^{-4} \eta^2 - 0,377 \eta + 241,800$$

Calculer la puissance reçue pour une température du corps noir de 400 °C. On donne le diamètre de la lentille d'entrée du pyromètre $\varnothing = 2$ cm et la surface active de la thermopile $\Sigma = 1$ mm.

23.16 Établir le bilan thermique à l'équilibre de la surface active de la thermopile. La température t des jonctions de mesure restant proche de la température ambiante t_a , on négligera les échanges radiatifs entre la membrane supportant les jonctions de mesure et le reste du pyromètre. On donne K_r le coefficient d'échange radiatif entre le corps noir et la surface active de la thermopile, K_c celui d'échange par conduction entre la surface active et le reste du pyromètre (échange passant par les bras de suspension de la membrane et les conducteurs des thermocouples) et MC la capacité calorifique de la membrane.

Calculer K_r .

La température des jonctions de mesure n'étant pas très différente de la température ambiante, donner à l'équilibre l'expression du bilan thermique au premier ordre en $\Delta t = t - t_a$.

23.17 Pour déterminer la valeur de K_c de façon plus précise, la même mesure avec le corps noir à la température de 400 °C est réitérée pour deux valeurs de température ambiante différentes, t_{a1} et t_{a2} . Pour celles-ci, les tensions de mesure V_0 sont respectivement $V_{01} = 3,22$ V et $V_{02} = 7,12$ V et les tensions V_c , $V_{c1} = -29,5$ mV et $V_{c2} = -68,9$ mV. Calculer la valeur du coefficient d'échange thermique K_c .

23.18 On considère maintenant un autre objet à la température t_c . Pointé sur cet objet, le pyromètre indique $V_c = -49,2$ mV et $V_0 = 5,09$ V. En déduire, la température t_c de la cible en supposant qu'elle peut être considérée comme un corps noir.

23.19 En fait, la cible n'est pas un corps noir. On suppose que c'est un corps gris dont l'émissivité peut être considérée comme constante dans le domaine de température étudié, $\varepsilon = 0,95$.

Calculer l'erreur sur l'évaluation de la température de la cible si on traite celle-ci comme un corps noir.

Corrigé détaillé

I. Thermocouple

23.1 L'amplificateur opérationnel AOP1 étant idéal, on a :

$$e_1^+ = E_{A/B}^{t_c; t_a} = E_{A/B}^{t_c; 0} - E_{A/B}^{t_a; 0} \quad \text{et} \quad e_1^- = \frac{R_4 V_c + R_3 V_0}{R_4 + R_3} \quad (23.5)$$

Compte tenu de (23.5), la contre-réaction amène :

$$V_0 = \frac{(R_3 + R_4)(E_{A/B}^{t_c; 0} - E_{A/B}^{t_a; 0}) - R_4 V_c}{R_3} \quad (23.6)$$

23.2 Pour que V_0 soit proportionnel à $E_{A/B}^{t_c; 0}$, il suffit que :

$$V_c = -\frac{(R_3 + R_4)E_{A/B}^{t_a; 0}}{R_4} \quad (23.7)$$

Le pouvoir thermoélectrique $s_{A/B}$ d'un thermocouple correspond à sa sensibilité $dE_{A/B}^{t; 0}/dt$ calculée à la température t . La fem du thermocouple étant supposée varier linéairement avec la température, on peut écrire (23.7) sous la forme :

$$V_c(t_a) = -\frac{(R_3 + R_4)s_{A/B} \cdot t_a}{R_4} \quad (23.8)$$

Une régression linéaire sur les données du tableau 23.1 permet d'estimer le pouvoir thermoélectrique du thermocouple entre 0 °C et 49 °C. Calcul fait, on trouve $s_{A/B} = 60,9$ $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$.

23.3 L'amplificateur opérationnel idéal AOP2 est monté en suiveur, on a donc :

$$\begin{aligned}
 V_c(t_a) &= -E + (R(t) + R_2) \frac{2E}{R(t) + R_1 + R_2} \\
 &= \frac{R(t) + R_2 - R_1}{R(t) + R_1 + R_2} E = \frac{R_0 + R_2 - R_1 + R_0 \alpha_R t_a}{R_0 + R_1 + R_2 + R_0 \alpha_R t_a} E
 \end{aligned}$$

Avec $\alpha_R t \ll 1$, on peut se contenter d'un développement au premier ordre en t_a de $V_c(t_a)$, soit :

$$\begin{aligned}
 V_c(t_a) &= \frac{(R_0 + R_2 - R_1) \left(1 + \frac{R_0 \alpha_R t_a}{R_0 + R_2 - R_1} \right)}{(R_0 + R_2 + R_1) \left(1 + \frac{R_0 \alpha_R t_a}{R_0 + R_2 + R_1} \right)} E \\
 &\simeq \frac{R_0 + R_2 - R_1}{R_0 + R_2 + R_1} \left(1 + R_0 \alpha_R t_a \frac{2R_1}{(R_0 + R_2)^2 - R_1^2} \right) E
 \end{aligned} \tag{23.9}$$

23.4 Pour effectuer la compensation de soudure froide, d'après (23.8), V_c doit être proportionnel à t_a , soit $R_0 + R_2 = R_1$. Dans ce cas, l'expression (23.9) de $V_c(t_a)$ devient :

$$V_c(t_a) \simeq R_0 \alpha_R t_a \frac{2R_1 E}{(R_0 + R_2 + R_1)^2} = \frac{R_0 \alpha_R t_a E}{2(R_0 + R_2)} \tag{23.10}$$

En identifiant (23.8) et (23.10), il vient :

$$\alpha_R = -\frac{R_3 + R_4}{R_4} \cdot \frac{2(R_0 + R_2)}{R_0} \cdot \frac{s_{A/B}}{E} \tag{23.11}$$

23.5 D'après (23.1), les couples de points $(1/T ; \ln(R'(T)))$ sont situés sur une droite de pente B . À partir des données du tableau 23.2, en effectuant une régression linéaire sur les couples $(1/T ; \ln(R'(T)))$, on obtient $B = 3\,407$ K.

23.6 La thermistance et la résistance étant en parallèle, on a $R(t_a) = R_l R'(T_a) / (R_l + R'(T_a))$. Pour linéariser autour de \bar{t}_a , il faut que la courbe $R(t_a)$ présente un point d'inflexion en \bar{t}_a , soit :

$$\left. \frac{d^2 R(t_a)}{dt_a^2} \right|_{\bar{t}_a} = 0$$

On aboutit à la condition :

$$R_l = \frac{2 \left(\frac{dR'(T_a)}{dT_a} \right)^2 \Big|_{\bar{T}_a}}{\frac{d^2 R'(T_a)}{dT_a^2} \Big|_{\bar{T}_a}} - R'(\bar{T}_a) = R'(\bar{T}_a) \frac{B - 2\bar{T}_a}{B + 2\bar{T}_a} = 3\,486 \, \Omega$$

23 • Thermocouple, thermopile et pyromètre optique

Les courbes de la figure 23.7 présentent l'évolution de $R'(t_a)$ et $R(t_a)$ avec la température t_a .

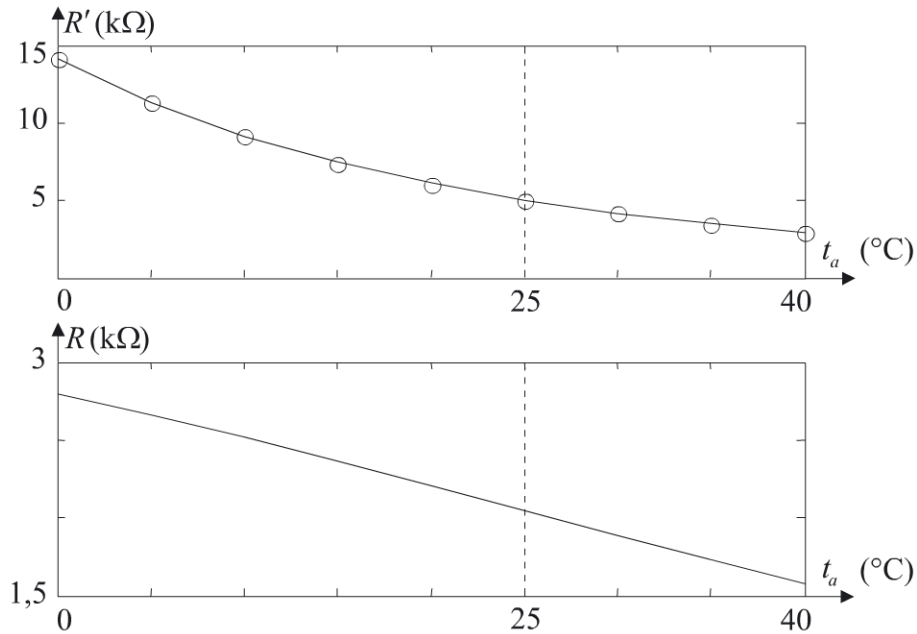


Figure 23.7- Évolution de R' et R avec la température t_a .

23.7 La valeur R_0 de $R(t)$ est donnée par $R_l R'(0 \text{ °C}) / (R_l + R'(0 \text{ °C})) = 2796 \Omega$. Le coefficient thermique du dipôle réalisé par l'association des deux résistances est donné tous calculs faits par :

$$\alpha_R(\bar{t}_a) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \Big|_{\bar{t}_a} = -\frac{B}{\bar{T}_a^2} \cdot \frac{R_l}{R_l + R'(\bar{T}_a)} = -15,8 \cdot 10^{-3}$$

23.8 Avec $R_4 = 99R_3$ et $E = 2,5 \text{ V}$, à partir de (23.11) et en utilisant les valeurs de R_0 , α_R et $s_{A/B}$ précédemment calculées, on obtient :

$$R_2 = -R_0 \frac{\alpha_R R_4 E + 2(R_3 + R_4) s_{A/B}}{2(R_3 + R_4) s_{A/B}} = 895 \text{ k}\Omega \quad (23.12)$$

On en déduit d'après la question I.4, $R_1 = R_0 + R_2 = 898 \text{ k}\Omega$.

23.9 D'après (23.6), (23.7) et la valeur de $s_{A/B}$ calculée à la question I.2, la tension de mesure et la sensibilité de la mesure s'écrivent après la compensation de soudure froide :

$$V_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_3} s_{A/B} t \quad \text{et} \quad S = \frac{\Delta V_0}{\Delta t} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} s_{A/B} \approx 6,1 \text{ mV/°C}$$

II. Thermopile

23.10 La force électromotrice totale s'écrit simplement :

$$V = NE_{A/B}^{t_c; t_a} = N(E_{A/B}^{t_c; 0} - E_{A/B}^{t_a; 0})$$

23.11 La problématique est identique à celle de la partie I si ce n'est que la fem de Seebeck $E_{A/B}^{t_c; t_a}$ et par conséquent le pouvoir thermoélectrique $s_{A/B}$ sont à multiplier par N . (23.12) devient donc :

$$R_2 = -R_0 \frac{\alpha_R R_4 E + 2(R_3 + R_4) N s_{A/B}}{2(R_3 + R_4) N s_{A/B}} = 25,3 \text{ k}\Omega$$

Pour R_1 , il vient $R_1 = R_0 + R_2 = 28,1 \text{ k}\Omega$.

L'équation (23.8) devient :

$$V_c(t_a) = -\frac{(R_3 + R_4) N s_{A/B} \cdot t_a}{R_4} = -1,97 \cdot 10^{-3} \cdot t_a \quad (23.13)$$

La tension de mesure et la sensibilité se recalculent de manière analogue, il vient :

$$V_0 = \frac{R_3 + R_4}{R_3} N s_{A/B} t \quad \text{et} \quad S = \frac{\Delta V_0}{\Delta t} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} N s_{A/B} \simeq 195 \text{ mV}/^\circ\text{C} \quad (23.14)$$

III. Pyromètre optique

23.12 La figure 23.8 schématise la situation.

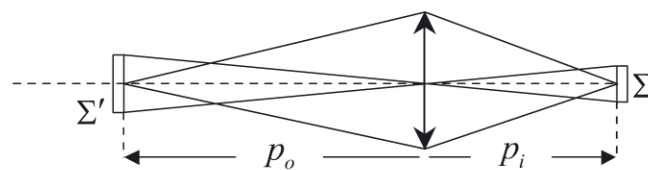


Figure 23.8 - Surface-cible et distance au pyromètre

Dans la représentation de Descartes, la formule de conjugaison et le grandissement transversal sont donnés par :

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad G_t = \frac{p_i}{p_o}$$

Dans le cas où la position de la cible est telle que son image couvre exactement la surface Σ , on a donc :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma'} = \left(\frac{p_i}{p_o}\right)^2 \quad (23.15)$$

23 • Thermocouple, thermopile et pyromètre optique

Soit L la luminance de la cible supposée uniforme (hypothèse de Lambert). Le flux F émis par la cible en direction de la lentille et reçu par la thermopile s'écrit comme le produit de la luminance par l'étendue géométrique G du faisceau, soit :

$$F = L \frac{\Sigma' \Sigma_l}{p_o^2}$$

où Σ_l représente la surface de la pupille d'entrée, c'est-à-dire de la surface $\Sigma_l = \pi \varnothing^2/4$ de la lentille.

Avec (23.15), il vient :

$$F = L \frac{\pi \varnothing^2 \Sigma}{4 p_i^2} \quad (23.16)$$

Le flux reçu par la thermopile ne dépend que de la luminance de la cible et des caractéristiques du système.

23.13 D'après ce qui précède le rayonnement focalisé sur la thermopile provient toujours d'une surface de cible Σ' située à la distance $|p_o|$ vérifiant la condition (23.15). Le problème étant à symétrie de révolution, on note $\varnothing' = \sqrt{4\Sigma'/\pi}$ le diamètre de la cible scrutée par le pyromètre. Avec (23.15), il vient :

$$\frac{|p_o|}{\varnothing'} = \sqrt{\frac{\pi p_i^2}{4\Sigma}} = 57,6.$$

23.14 La cible étant un corps noir lambertien, sa luminance L est uniforme et égale à son émittance divisée par π et son émissivité est $\varepsilon(T, \lambda) = 1$. D'après (23.2) et (23.16), la puissance reçue par la thermopile s'écrit donc en tenant compte de l'effet filtrage en longueur d'onde et du coefficient de réflexion r :

$$P = (1 - r) \frac{\varnothing^2 \Sigma}{4 p_i^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda(T_c, \lambda) d\lambda = (1 - r) \frac{\varnothing^2 \Sigma}{4 p_i^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T_c}\right) - 1 \right]} d\lambda \quad (23.17)$$

En effectuant le changement de variable $x = hc/kT_{cn}\lambda$, (23.17) devient :

$$\begin{aligned} P &= (1 - r) \frac{\varnothing^2 \Sigma}{4 p_i^2} \cdot \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} \cdot T_{cn}^4 \cdot \int_{x_2}^{x_1} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= (1 - r) \frac{\varnothing^2 \Sigma}{4 p_i^2} \cdot \frac{15}{\pi^4} \cdot \sigma T_{cn}^4 \cdot \int_{x_2}^{x_1} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = (1 - r) \frac{\varnothing^2 \Sigma}{4 p_i^2} \cdot \eta \end{aligned} \quad (23.18)$$

23.15 Pour une température du corps noir $T_{cn} = 673,15$ K, (23.3) donne $\eta = 2590$ W.m⁻² soit une puissance $P = 46$ μW d'après (23.18).

23.16 Sur la durée $d\tau$ le bilan thermique s'écrit :

$$K_r(T_{cn}^4 - T^4)d\tau - K_c(T - T_a)d\tau = MCdT \quad (23.19)$$

À l'équilibre et au premier ordre en $\Delta t = t - t_a$, (23.19) devient :

$$K_r(T_{cn}^4 - T_a^4) = (K_c + 4K_r T_a^3) \Delta t \quad (23.20)$$

Le terme $K_r T_{cn}^4$ n'est rien d'autre que la puissance P calculée à la question précédente. On en déduit la valeur de $K_r = P/T_{cn}^4 = 2,24 \cdot 10^{-16} \text{ W.K}^{-4}$. (23.20) peut alors s'écrire :

$$P - K_r T_a^4 = P \left(1 - \frac{T_a^4}{T_{cn}^4} \right) = (K_c + 4K_r T_a^3) \Delta t \quad (23.21)$$

23.17 La température ambiante ou température de soudure froide des thermocouples de la thermopile est déterminée à partir de la relation (23.13). Des deux valeurs de V_c données, on en déduit $t_{a1} = 15,00 \text{ }^\circ\text{C}$ et $t_{a2} = 35,00 \text{ }^\circ\text{C}$.

De même, en utilisant la relation (23.14), on en déduit les valeurs $t_1 = 16,53 \text{ }^\circ\text{C}$ et $t_2 = 36,51 \text{ }^\circ\text{C}$, puis les différences de température $t_1 - t_{a1} = \Delta t_1 = 1,53 \text{ }^\circ\text{C}$ et $t_2 - t_{a2} = \Delta t_2 = 1,51 \text{ }^\circ\text{C}$.

Pour déterminer K_c , on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} P \left(1 - \frac{T_{a1}^4}{T_{cn}^4} \right) = P_1 = (K_c + 4K_r T_{a1}^3) \Delta t_1 \\ P \left(1 - \frac{T_{a2}^4}{T_{cn}^4} \right) = P_2 = (K_c + 4K_r T_{a2}^3) \Delta t_2 \end{cases}$$

Il vient :

$$K_c = \frac{P_1 T_{a2}^3 \Delta t_2 - P_2 T_{a1}^3 \Delta t_1}{\Delta t_1 \Delta t_2 (T_{a2}^3 - T_{a1}^3)} = 29,35 \cdot 10^{-6} \text{ W.K}^{-1}$$

Vu la méthode utilisée, la détermination de K_r peut être peu précise mais comme on a $K_c \gg K_r T_a^3$, l'erreur engendrée reste faible.

23.18 La température ambiante est donnée par (23.13), soit $t_a = 25,00 \text{ }^\circ\text{C}$, et la température des jonctions de mesure est donnée par (23.14), soit $t = 26,10 \text{ }^\circ\text{C}$ donc $\Delta t = 1,10 \text{ }^\circ\text{C}$. D'après (23.21), on a :

$$P = (K_c + 4K_r T_a^3) \Delta t + K_r T_a^4 = 34 \text{ } \mu\text{W}.$$

D'après (23.18), il vient $\eta = 1923 \text{ W.m}^{-2}$ qui reporté dans (23.4) donne $t_c = 324,17 \text{ }^\circ\text{C}$.

23 • Thermocouple, thermopile et pyromètre optique

23.19 Pour un corps gris d'émissivité constante ε , à puissance rayonnée constante, pour obtenir la température du corps gris il suffit de diviser la valeur η calculée pour le corps noir par ε , ce qui donne une nouvelle valeur de η de $2\,024\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. En utilisant de nouveau (23.4), il vient $t_c = 335,82\text{ }^\circ\text{C}$. Considérer la cible comme un corps noir sous-estime sa température. L'erreur engendrée est ici de $11,65\text{ }^\circ\text{C}$ soit environ $3,5\%$.

ENCART 23.1

La connaissance peu précise de l'émissivité des corps dont on cherche à mesurer la température par pyrométrie optique reste la principale source d'erreur d'évaluation de la valeur de la température. Plusieurs méthodes permettent de pallier le problème.

Les pyromètres bichromatiques évaluent les puissances émises dans deux fenêtres spectrales étroites et proches. Sous l'hypothèse que l'émissivité du corps reste identique dans ces deux fenêtres, les valeurs des deux puissances permettent de calculer la température du corps indépendamment de la connaissance de son émissivité.

Les pyromètres à fenêtre spectrale unique possèdent une fonction qui permet de régler la valeur de l'émissivité du matériau. Une méthode pour déterminer celle-ci consiste à placer une pastille autocollante sur le matériau dont on ignore l'émissivité. La pastille est à la même température que le matériau et son émissivité est parfaitement connue. On mesure la température de la pastille au pyromètre et on joue ensuite sur le réglage de l'émissivité jusqu'à ce qu'en visant le matériau, la température affichée soit identique à celle relevée sur la pastille. La valeur de l'émissivité peut éventuellement être archivée pour de nouvelles mesures sur ce type de matériau.

La plupart des pyromètres portables à fenêtre spectrale unique possèdent en mémoire l'émissivité de matériaux types. Ils se présentent comme un pistolet avec lequel on vise la cible, la gâchette déclenchant la mesure.



Figure 23.9 - Pyromètre portable (documentation Raytek)

PROBLÈME : Photodiode à effet latéral unidirectionnelle

Les capteurs à triangulation sont très couramment utilisés dans l'industrie. Le principe de base est simple : émettre un faisceau lumineux en direction d'une cible (généralement une diode laser est utilisée), collecter la lumière réfléchie par la cible sur un récepteur photosensible et en déduire la position du point d'impact du faisceau sur la cible c'est-à-dire la distance cible-détecteur.

L'utilisation de ces capteurs couvre un large domaine dépendant de leur résolution.

Dans le cas où c'est la réflexion diffuse qui est collectée et focalisée sur l'élément photosensible, la résolution peut atteindre $1\ \mu\text{m}$ et l'erreur de linéarité peut être faible (0,1 % de la pleine échelle est une valeur classique). La distance de la cible classiquement de quelques centimètres a été portée à quelque 75 cm par certains fabricants.

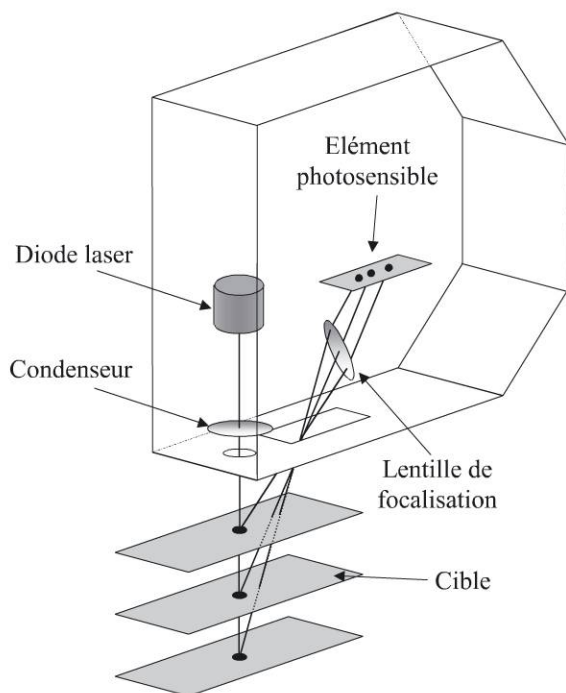


Figure 24.1 - Principe du capteur à triangulation

Ces capteurs sont couramment utilisés pour vérifier la présence, le positionnement, le contrôle dimensionnel de pièces sur des chaînes d'assemblage.

Dans le cas où c'est la réflexion spéculaire qui est focalisée sur l'élément sensible (lorsque cette dernière est suffisante comme c'est le cas pour les matériaux lisses et non diffusants), la résolution est fortement accrue et peut atteindre $0,01\ \mu\text{m}$ pour une erreur de linéarité de 0,05 % de la pleine échelle. L'utilisation est alors plutôt de type profilomètre.

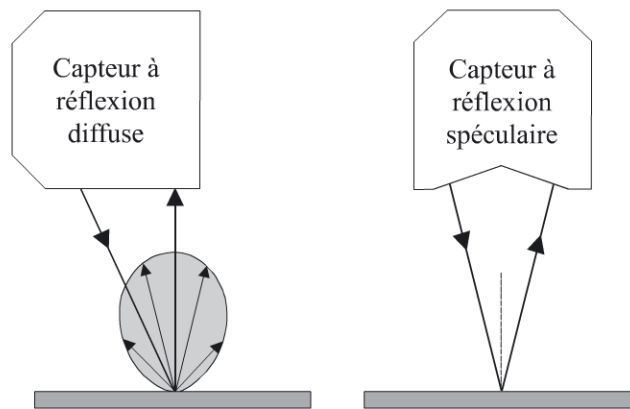


Figure 24.2 - Principe du capteur à triangulation

Ces capteurs qu'ils soient à réflexion diffuse ou spéculaire permettent, s'ils sont montés en push-pull, de contrôler des épaisseurs.

Ce problème présente l'étude d'un capteur à triangulation utilisant comme photo-détecteur une photodiode à effet latéral ou PSD (*Position Sensing Detector*).

Énoncé

I. La photodiode – sensibilité

Une photodiode à effet latéral est un détecteur de la position d'un faisceau lumineux. Elle permet, une fois correctement conditionnée, de déterminer la position en x et en y (pour les détecteurs bidirectionnels) sur le plan d'entrée de la photodiode du point d'incidence d'un faisceau lumineux suffisamment fin comme celui émis par un laser ou une diode laser. Ce type de photodiode, également dénommée PSD (pour *Position Sensing Detector*) est couramment utilisé dans les capteurs de position dits à triangulation.

Pour simplifier l'étude, on se contentera ici d'une photodiode unidirectionnelle.

Considérons une photodiode PIN polarisée en inverse comme schématisée figure 24.3.

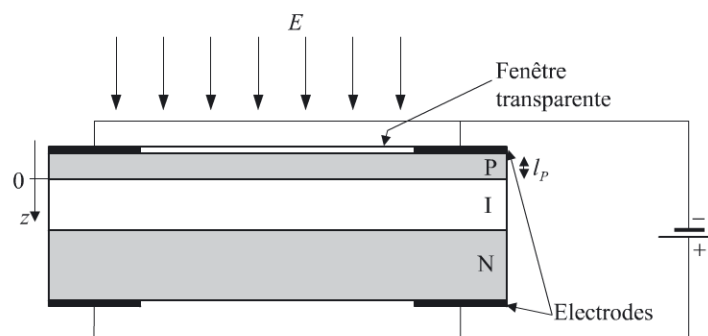


Figure 24.3 - Photodiode PIN

Considérons la diode dans l'obscurité. Seul un courant très faible peut circuler, c'est le courant inverse de la diode donné par :

$$I_r = I_s \left[1 - \exp(-eV_j/kT) \right]$$

I_s est le courant de saturation donné par $I_s = AT^3 \exp(-W_g/kT)$, W_g étant la largeur de la bande interdite du semiconducteur et V_j la tension aux bornes de la jonction PN. Dans la suite, comme $V_j \gg kT/e$, soit $kT/e = 25 \text{ mV}$ à 20°C , on considérera que $I_r \simeq I_s$.

Un faisceau lumineux éclaire la zone de déplétion (région isolante I) au travers de la région P. On suppose que l'énergie des photons est suffisante pour faire passer un électron de la bande de valence à la bande de conduction. La région P est de très faible épaisseur pour ne pas trop absorber le rayonnement et pour que la probabilité d'y créer une paire électron-trou y soit faible.

La zone de déplétion est suffisamment épaisse pour y arrêter la majorité des photons tout en restant suffisamment mince pour que le temps de transit des porteurs de charge au travers de celle-ci et la probabilité de recombinaison restent faibles.

La région de type N est assez épaisse pour qu'une éventuelle dissociation électron-trou par un photon ait toutes les chances de s'y recombiner.

Compte tenu de ce qui précède, seul le photocourant I_{phot} à prendre en compte est le courant de génération lié à la création de paires électrons-trous dans la région isolante I.

Le courant inverse total est donc donné par $I_r \simeq I_s + I_{phot}$.

Le faisceau lumineux donne dans le plan d'entrée de la photodiode un éclairement E . Ce faisceau couvre totalement la surface S de la fenêtre transparente. Soit ϕ_0 , le flux lumineux incident reçu par la photodiode. On considère qu'à une profondeur z dans le matériau de la zone isolante, la puissance du rayonnement est donnée par la loi de Beer-Lambert :

$$\phi(z) = (1 - R)\phi_0 \exp(-\alpha l_P) \exp(-\beta z)$$

Le facteur $(1 - R)$ tient compte des réflexions en énergie aux différentes interfaces (R étant le coefficient de réflexion énergétique), le facteur $\exp(-\alpha l_P)$ de l'absorption du rayonnement au travers de la région P (l_P étant l'épaisseur de ce matériau) et le facteur $\exp(-\beta z)$ de l'absorption en fonction de la profondeur de pénétration z dans la zone de déplétion (voir schéma précédent).

24.1 Donner l'expression de la puissance ϕ_0 reçue en fonction de E et S .

24.2 Soit une tranche élémentaire d'épaisseur dz à l'abscisse z dans la zone de déplétion. Calculer la puissance $d\phi(z)$ absorbée par cette tranche.

24.3 En considérant que le rayonnement est monochromatique de fréquence ν , calculer le nombre dn de photons absorbés par cette tranche par unité de temps (on rappelle que l'énergie d'un photon est $h\nu$ où h est la constante de Planck).

24.4 En prenant en compte l'efficacité quantique η du matériau semiconducteur (nombre de photoélectrons créés par photon absorbé), donner le nombre dn_{phot} de photoélectrons créés par unité de temps dans la tranche élémentaire.

24.5 Calculer le nombre total n_{phot} de photoélectrons créés par unité de temps dans la zone de déplétion entière d'épaisseur l_{ZD} .

24.6 Que devient cette expression si l'épaisseur de la zone de déplétion est grande ? On restera dans cette hypothèse pour la suite.

24.7 En considérant que le courant dû aux trous est égal au courant dû aux électrons, calculer le photocourant total I_{phot} (on notera e la charge de l'électron).

24.8 Montrer que le courant inverse total s'écrit :

$$I_r = I_{phot} + I_s = \frac{2e\eta}{hc} \lambda \phi_0 (1 - R) \exp(-\alpha l_p) + AT^3 \exp(-W_g/kT) \quad (24.1)$$

24.9 La température maximale de fonctionnement nominal de la photodiode est $T = T_{max} = 330$ K. Calculer le courant d'obscurité de la photodiode pour cette température. On donne $W_g = 1,12$ eV, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹ et $A = 343$ A.K⁻³.

24.10 Donner l'expression de la sensibilité S_{phot} de la photodiode et conclure quant à la caractéristique de ce capteur. On donne $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s, $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹, $\eta = 0,49$, $\lambda = 670$ nm, $\exp(-\alpha l_p) = 0,8$ et $R = 0,05$.

II. La photodiode – puissance lumineuse maximale et effet thermique

24.11 La température extérieure est de $T_{ext} = 300$ K. Le coefficient d'échange thermique de la photodiode avec le milieu extérieur est $K = 0,24$ μ W.K⁻¹. Établir, en faisant un bilan thermique en régime permanent, la relation entre la puissance maximale P_{max} dissipée par effet Joule et K , T_{ext} et T_{max} , température maximale de fonctionnement. Calculer P_{max} .

24.12 En considérant qu'en première approximation la photodiode présente entre ses bornes une résistance inter-électrodes $R = 50$ k Ω , calculer le courant maximal I_{max} qu'elle peut délivrer pour que sa température de fonctionnement reste inférieure à T_{max} .

24.13 En utilisant les résultats des questions I.9 et I.10, déduire la puissance lumineuse maximale ϕ_{\max} que peut recevoir la photodiode.

24.14 À quel éclairement E_{\max} cette puissance correspond si l'ensemble de la surface active S de la photodiode est éclairée ? On donne :

$$S = 3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$$

III. Réponse spectrale

24.15 En reprenant le résultat de la question I.10 et les explications du paragraphe I, décrire le comportement de la photodiode avec la longueur d'onde. Evaluer la sensibilité S_{phot} à $\lambda = 1\,000 \text{ nm}$.

24.16 Estimer la longueur d'onde maximale pouvant être utilisée avec cette photodiode.

24.17 Tracer l'allure du comportement de la sensibilité S_{phot} de la photodiode en fonction de la longueur d'onde pour λ comprise entre 400 nm et 1200 nm .

IV. Principe de fonctionnement du détecteur de position (PSD)

La photodiode recevant le faisceau lumineux peut être modélisée selon le schéma de la figure 24.4. Sur ce schéma, on a représenté le faisceau lumineux et la source de courant modélisant le courant I_r , superposition du courant d'obscurité et du photocourant.

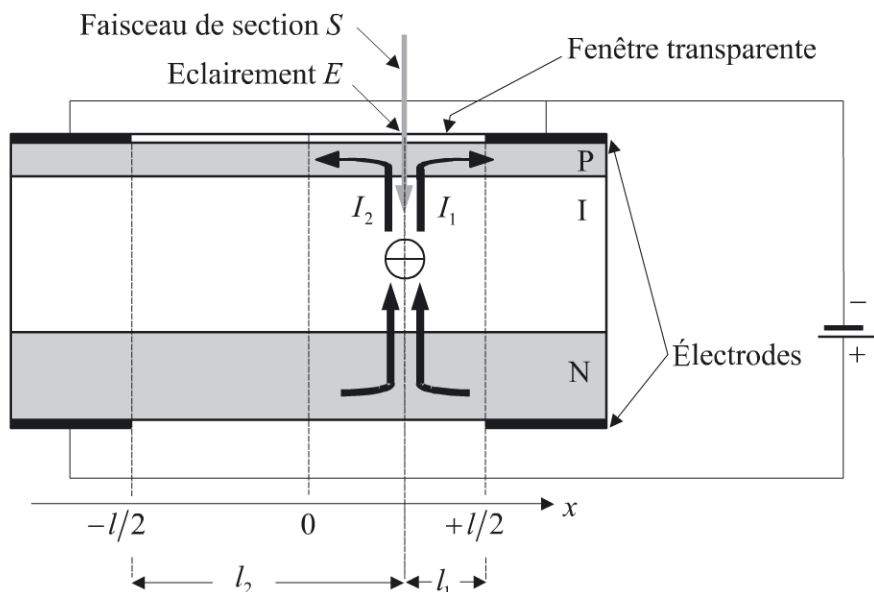


Figure 24.4 - Détecteur de position

24 • Photodiode à effet latéral unidirectionnelle

D'un point de vue électrique, ceci, peut être modélisé en première approximation comme représenté figure 24.5 où D représente une diode parfaite, C_j la capacité de la jonction, R_{sh} la résistance shunt prenant en compte les pertes ohmiques au niveau de la région isolante, R_1 et R_2 les pertes ohmiques dues à la résistivité résiduelle des régions P et N liées respectivement aux longueurs l_1 et l_2 .

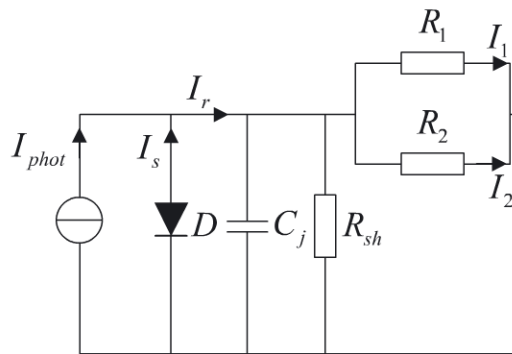


Figure 24.5 - Schéma électrique équivalent

La source de tension n'est pas représentée car elle ne sert qu'à polariser la photodiode et donc à rendre actives les deux sources de courant I_{phot} et I_s . Dans toute la suite du problème, compte tenu des résultats des questions I.9 et II.2, on négligera le courant d'obscurité devant le photocourant.

24.18 En considérant que les différents matériaux sont parfaitement homogènes, donner la relation existant entre les courants I_1 et I_2 et les résistances R_1 et R_2 puis entre les courants I_1 et I_2 et les longueurs l_1 et l_2 .

24.19 Avec $R_1 + R_2 = 200 \text{ k}\Omega$, $R_{sh} \gg R_1 + R_2$ et $C_j = 5 \text{ pF}$, estimer la constante de temps τ de la photodiode pour un faisceau tombant au milieu de la surface active et sa fréquence de coupure f_c . On fera l'hypothèse que le système constitue un premier ordre.

24.20 On suppose que l'on peut mesurer les courants sans introduire la moindre perturbation et que l'on est capable de réaliser analogiquement l'opération $V_{mes} = a(I_1 - I_2)/(I_1 + I_2)$. Montrer en posant $l_1 = l/2 - x$ et $l_2 = l/2 + x$ que V_{mes} est une mesure de l'écart x par rapport au centre de la photodiode.

24.21 En déduire l'expression de la sensibilité S_c de ce capteur.

V. Électronique de conditionnement

Le conditionnement électronique est réalisé selon le schéma de la figure 24.6 où l'on suppose que les composants utilisés sont idéaux.

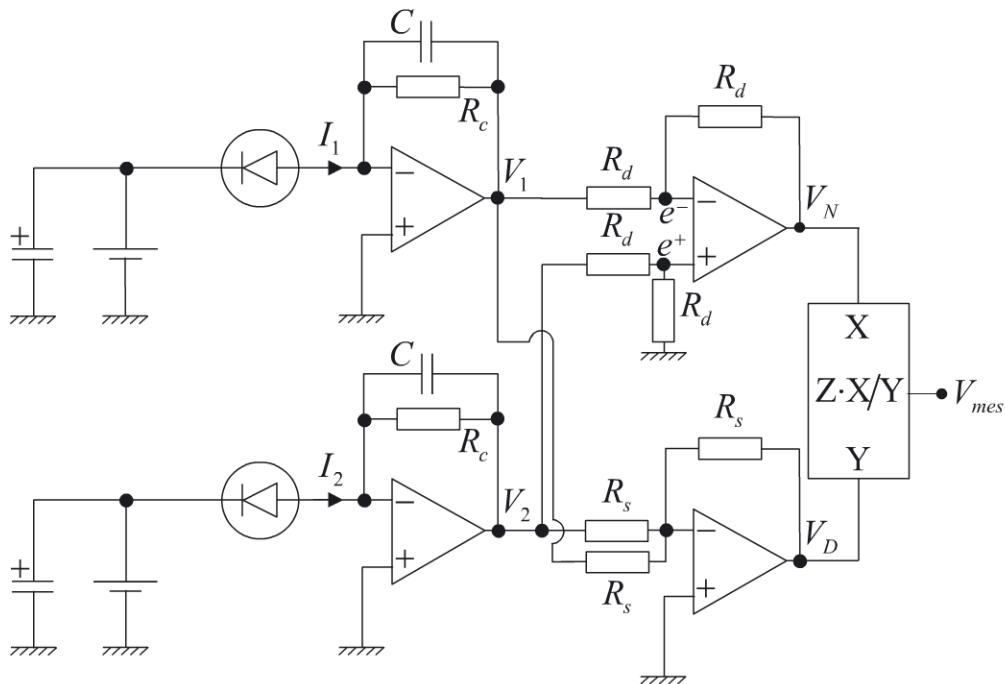


Figure 24.6 - Électronique de conditionnement

24.22 Déterminer les expressions de V_1 et V_2 en fonction de I_1 , I_2 et R_c . Que réalise chacune des voies du premier étage du montage de la figure 24.6 ?

24.23 Quelle est l'impédance d'entrée de chacune des voies de cet étage ? Conclure quant à l'hypothèse faite à la question 24.20.

24.24 Donner les expressions de V_N et V_D en fonction de I_1 , I_2 et R_c .

24.25 Le diviseur, étage de sortie du montage de la figure 24.6, possède une sortie de la forme $Z \cdot X/Y$ où $Z = 10 \text{ V}$. Déterminer l'expression de la tension de sortie V_{mes} en fonction de x , l et V .

24.26 En déduire l'expression de la sensibilité S_c du capteur. On rappelle que $l = 3 \text{ mm}$.

VI. Principe de fonctionnement du détecteur de position à triangulation

On utilise la PSD précédente pour la réalisation d'un capteur à triangulation permettant de suivre l'évolution de la position d'une surface-cible à détecter. Ce capteur, sans contact, est réalisé suivant le schéma de principe de la figure 24.7.

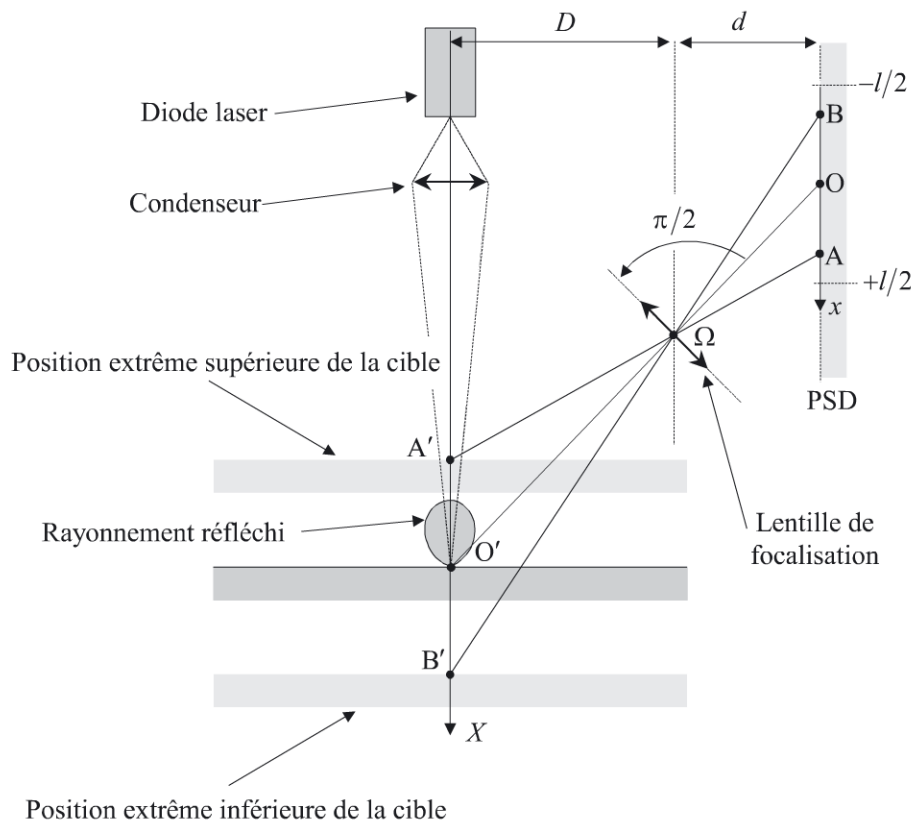


Figure 24.7 - Principe du capteur à triangulation

La position de la surface à détecter peut évoluer entre les positions extrêmes matérialisées par les points A' et B' .

Un condenseur focalise sur la surface à détecter le rayonnement issu de la source (diode laser). Une partie du rayonnement réfléchi n'étant pas de nature spéculaire n'obéit pas à la loi de la réflexion de Descartes. Une partie de ce rayonnement est collecté par la lentille de focalisation et focalisé sur la PSD.

Pour simplifier, on considère que la direction du déplacement de la cible à détecter (direction définie par $A'B'$) est parallèle à la surface de la PSD (direction définie par AB).

24.27 Par des considérations géométriques simples, déterminer la loi donnant le point d'impact x du faisceau lumineux sur la PSD en fonction de la position X de la surface à détecter, de D et d . L'origine de X est prise en O' .

24.28 En utilisant les résultats précédents, déterminer la sensibilité S_{mes} de la mesure, rapport des variations de la tension de mesure V_{mes} aux variations de la position X de la surface à détecter.

24.29 On suppose que la résolution de l'électronique utilisée, compte tenu du bruit de l'électronique et des autres facteurs d'erreur est $\delta V_{mes} = 2 \text{ mV}$. Déterminer le rapport d/D pour que la résolution du capteur soit $\delta X = 2 \text{ }\mu\text{m}$.

24.30 Dans ce cas, calculer numériquement la sensibilité S_{mes} de la mesure.

24.31 Déterminer l'étendue de mesure $E.M.(X)$ du capteur réalisé.

VII. Optimisation de la géométrie du capteur à triangulation

24.32 Commenter à l'aide des résultats précédents les possibilités d'augmentation de la résolution du capteur.

24.33 Le plan de la PSD et le plan contenant l'axe $O'X$ perpendiculaire au plan de la figure 24.7 ne sont plus a priori parallèles mais forment entre eux un angle $\varphi = \alpha + \beta$ (voir figure 24.8). Quel en est l'effet sur la résolution ?

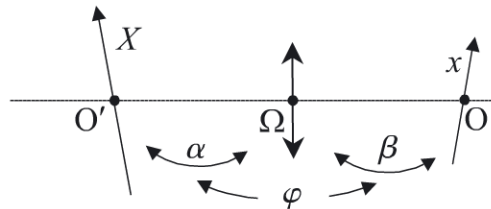


Figure 24.8 - Inclinaison de la PSD

24.34 Montrer qu'en contre-partie, en raison du problème de focalisation, la relation entre x et X devient non linéaire, ce qui entraîne une non-linéarité de la mesure. On s'appuiera pour cela sur une démonstration graphique des règles de Scheimpflug ou de Hinge (formation de l'image d'un objet incliné par rapport au plan de la lentille). On posera $d_o = O'\Omega$ et $d_i = \Omega O$.

24.35 Calculer l'angle β puis la nouvelle expression de la sensibilité pour un capteur à triangulation respectant strictement la règle de Scheimpflug. On donne $\alpha = 35^\circ$, $d_o = 10 \text{ cm}$ et $f = 3 \text{ cm}$, valeurs classiques pour un capteur à triangulation. Représenter graphiquement le comportement de la tension de mesure V_{mes} en fonction de la position X .

24.36 Évaluer l'erreur de linéarité (en % de l'étendue de mesure) engendrée par le respect de la règle de Scheimpflug.

24 • Photodiode à effet latéral unidirectionnelle

On rappelle que les coefficients de la meilleure droite au sens des moindres carrés, d'équation $y = Ax + B$, passant par N couples de points de mesure (x_i, y_i) sont donnés par :

$$A = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (24.2)$$
$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

Corrigé détaillé

Complément en ligne

Le corrigé est téléchargeable gratuitement sur :

La page web de l'auteur : www.esiee-amiens.fr/dassonville

Le site de Dunod, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/contenus-complementaires/9782100701674

PROBLÈME : Capteur de proximité capacitif

Les capteurs capacitifs de proximité présentent l'avantage sur les capteurs inductifs de ne pas nécessiter une cible métallique. Tout type de matériau peut être détecté pour peu que sa permittivité diffère suffisamment de celle du vide. Le changement du matériau de la cible ne fait qu'affecter la sensibilité de la mesure.

Énoncé

I. Étude du transducteur capacitif

On considère le capteur capacitif de proximité de la figure 25.1. Le but de la mesure est de détecter la distance x entre la tête de mesure et la cible.

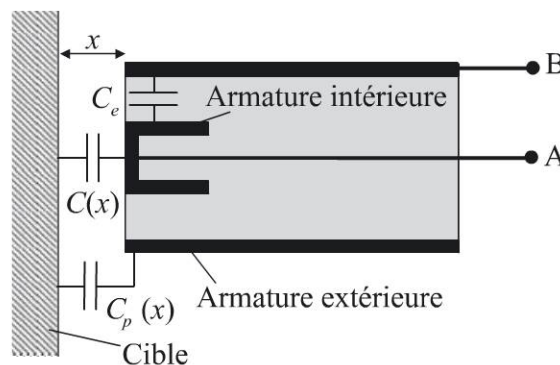


Figure 25.1- Principe de la détection de proximité capacitive

25.1 Donner la capacité C_{AB} présentée par la tête de mesure entre ses bornes A et B, capacité constituée des capacités de mesure $C(x)$, inter-électrodes C_e et capacité parasite $C_p(x)$.

25.2 Montrer que la mise à la masse de l'armature extérieure et de la cible simplifie le problème. On se placera sous cette hypothèse pour la suite du problème.

25.3 Soit Σ la surface de l'électrode active en regard de la cible et $\Sigma' = 2\pi rh$ la surface en regard de l'électrode intérieure et de l'électrode extérieure (voir figure 25.2). Le milieu ambiant est supposé de permittivité égale à celle du vide soit ϵ_0 . Donner en première approximation l'expression de la capacité C_{AB} . Dans cette expression on se contentera d'un développement au premier ordre en e/r pour $C_e(x)$.

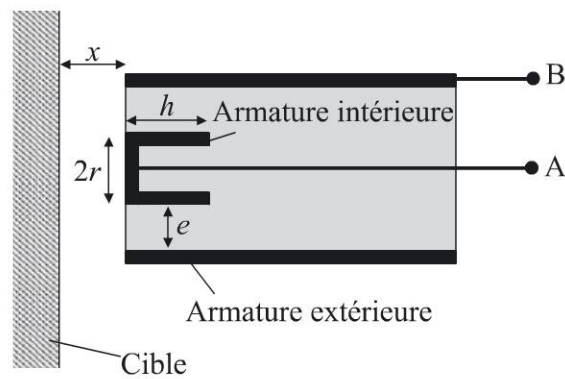


Figure 25.2 - Géométrie du capteur

25.4 Le capteur est réalisé de façon à fonctionner pour une distance tête de mesure-cible évoluant de Δx à partir de la valeur de référence $x_0 = 2 \text{ mm}$.

Donner l'expression de C_{AB} au premier ordre en $\Delta x/x_0$ et la mettre sous la forme $C_{AB} = C_0(1 + k\Delta x/x_0)$.

On donne $r = 1 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$, $e = 1 \text{ mm}$ et $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

II. Conditionnement du transducteur

25.5 Le capteur de capacité C_{AB} est utilisé dans le circuit de la figure 25.3, constitué des deux blocs amplificateur et filtre.

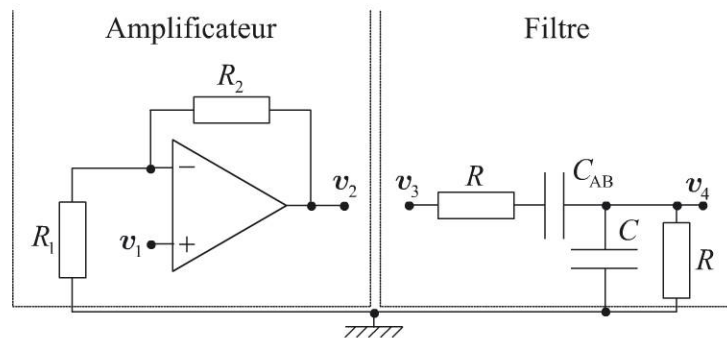


Figure 25.3 - Schéma de principe de la mesure

Calculer les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_1(p) = V_2(p)/V_1(p) \text{ et } H_2(p) = V_4(p)/V_3(p)$$

l'amplificateur opérationnel étant considéré idéal.

25.6 On relie la borne de sortie de l'amplificateur à l'entrée du filtre et la borne de sortie du filtre à la borne non-inverseuse de l'amplificateur opérationnel de façon à réaliser $v_2 = v_3$ et $v_1 = v_4$. Montrer que ceci entraîne deux conditions dites d'amplitude et de phase sur la fonction de transfert $H(p) = H_1(p)H_2(p)$.

25.7 En admettant que le fonctionnement du système sera celui d'un oscillateur sinusoïdal de pulsation ω , calculer les relations dérivant des conditions de phase et d'amplitude à tenir entre les valeurs des composants.

25.8 On fixe $C = C_0$ et $R = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ et on suppose que $\Delta x = 0$. Déterminer les valeurs de la résistance R_1 et de la pulsation de l'oscillateur que l'on notera ω_0 .

Lorsque l'on déplace la tête du capteur par rapport à la cible, la capacité C_{AB} varie. La condition d'amplitude ne peut plus être vérifiée à chaque instant par une résistance fixe puisque cette condition s'écrit en fonction de C_{AB} . La résistance R_1 est remplacée par un système de façon à ce que la condition d'amplitude soit toujours vérifiée (ce système ne sera pas étudié ici).

25.9 Donner alors l'expression de la pulsation au premier ordre en $\Delta x/x_0$.

25.10 Δx pouvant éventuellement dépendre de la fréquence, donner l'expression de la tension instantanée v_1 de l'oscillateur. On notera V_0 son amplitude sans chercher à la calculer. On notera :

$$F(t) = \int k\omega_0 \frac{\Delta x}{2x_0} dt \quad (25.1)$$

III. Conditionnement du signal

Le signal précédent est utilisé en entrée du circuit de démodulation de la figure 25.4 où les composants sont supposés idéaux.

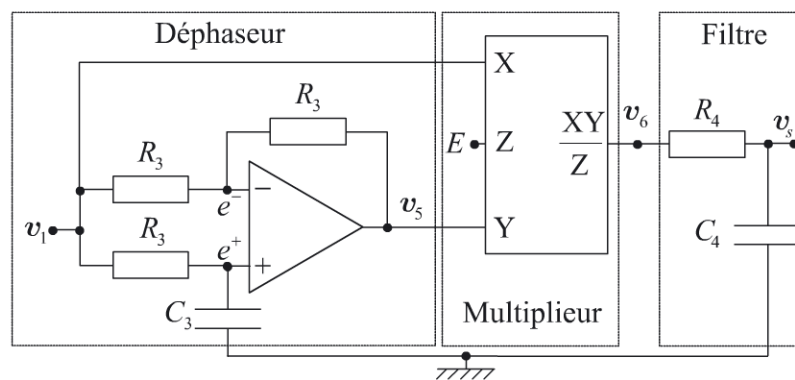


Figure 25.4 - Schéma de principe de la mesure

25.11 Montrer que le premier étage du circuit de la figure 25.4 entraîne un simple déphasage entre les tensions instantanées v_1 et v_5 . Calculer ce déphasage $\Delta\phi$.

25.12 Donner l'expression de la tension instantanée v_6 en sortie du multiplieur.

25.13 Donner l'expression de la tension de sortie instantanée v_s pour $\omega \ll 1/R_4C_4$.

25.14 Montrer qu'en choisissant correctement R_3C_3 , la tension de sortie v_s est, au premier ordre non nul en $\Delta x/x_0$, proportionnelle à Δx . Donner l'expression de la sensibilité. On donne $V_0 = 5 \text{ V}$, $E = 0,5 \text{ V}$ et on rappelle que :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (25.2)$$

Corrigé détaillé

I. Principe du transducteur capacitif

25.1 La capacité de la tête de mesure est donnée par :

$$C_{AB} = C_e + \frac{C(x)C_p(x)}{C(x) + C_p(x)} \quad (25.3)$$

25.2 Si la cible et l'armature extérieure sont au même potentiel, la capacité parasite $C_p(x)$ se trouve court-circuitée (25.3) devient :

$$C_{AB} = C_e + C(x)$$

25.3 En première approximation, on peut négliger tout effet de bord et on peut considérer que la capacité $C(x)$ est celle d'un condensateur plan et que la capacité $C_e(x)$ est celle d'un condensateur cylindrique. Il vient alors :

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x} = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{x} \quad \text{et} \quad C_e = \frac{\varepsilon_0 2\pi h}{\ln((r+e)/r)} \simeq \frac{\varepsilon_0 2\pi h r}{e}$$

C_{AB} peut donc s'écrire :

$$C_{AB} \simeq \frac{\varepsilon_0 2\pi h r}{e} + \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{x}$$

25.4 Avec $x = x_0 + \Delta x$, il vient au premier ordre en $\Delta x/x_0$:

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \frac{\varepsilon_0 2\pi h r}{e} + \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{x_0 (1 + \Delta x/x_0)} \simeq \frac{\varepsilon_0 2\pi h r}{e} + \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{x_0} \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \pi r}{x_0 e} (2hx_0 + re) \left[1 - \frac{re}{(2hx_0 + re)} \frac{\Delta x}{x_0}\right] = C_0 \left[1 + k \frac{\Delta x}{x_0}\right] \end{aligned}$$

L'application numérique donne $C_0 = 6,951 \text{ pF}$ et $k = -0,200$.

II. Conditionnement du transducteur

25.5 L'amplificateur étant supposé idéal, on a immédiatement dans le domaine de Laplace :

$$H_1(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (25.4)$$

Pour le filtre, on obtient :

$$V_4(p) = \frac{\frac{R}{1 + RCp}}{\frac{R}{1 + RCp} + \frac{1 + RC_{AB}p}{C_{AB}p}} V_3(p)$$

Calcul fait, il vient :

$$H_2(p) = \frac{V_4(p)}{V_3(p)} = \frac{RC_{AB}p}{1 + R(2C_{AB} + C)p + R^2CC_{AB}p^2} \quad (25.5)$$

Ce filtre est un filtre passe-bas d'ordre 2.

25.6 Si on impose $v_2 = v_3$ et $v_1 = v_4$ en connectant ensemble les deux éléments du montage de la figure 25.3, on doit avoir :

$$H_1(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{V_3(p)}{V_4(p)} = \frac{1}{H_2(p)} \quad \text{soit} \quad H_1(p)H_2(p) = H(p) = 1 \quad (25.6)$$

Les fonctions de transfert étant complexes (domaine de Laplace), on doit donc avoir :

$$|H(p)| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(H(p)) = 0$$

Ceci constitue les deux conditions dites respectivement d'amplitude et de phase.

25.7 Le système étant un oscillateur sinusoïdal de pulsation ω , la condition de phase s'écrit d'après (25.4) et (25.5) :

$$\arg(H(j\omega)) = \arg(H_2(j\omega)) = \arctan\left(\frac{RC_{AB}\omega(1 - R^2CC_{AB}\omega^2)}{R^2C_{AB}(2C_{AB} + C)\omega^2}\right) = 0$$

La pulsation de l'oscillateur est donc :

$$\omega = \frac{1}{R\sqrt{CC_{AB}}} \quad (25.7)$$

25 • Capteur de proximité capacitif

La condition d'amplitude s'écrit d'après (25.4), (25.5) et (25.6) :

$$\frac{RC_{AB} \omega}{\sqrt{(1 - R^2 C C_{AB} \omega^2)^2 + (R(2C_{AB} + C)\omega)^2}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (25.8)$$

En utilisant le résultat (25.7), à partir de (25.8) on obtient :

$$(R_1 + R_2)C_{AB} = R_1(2C_{AB} + C) \quad (25.9)$$

25.8 D'après (25.7), on a $\omega_0 = 1/RC_0 = 1,439 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ soit une fréquence $f_0 = 229,0 \text{ kHz}$. D'après (25.9), on tire $R_1 = R_2/2$.

25.9 La pulsation est toujours donnée par (25.7) puisque cette relation est indépendante de R_1 . Elle s'écrit maintenant pour $\Delta x \neq 0$:

$$\omega = \frac{1}{R \sqrt{C_0 C_{AB}}} = \frac{1}{R \sqrt{C_0^2 \left(1 + k \frac{\Delta x}{x_0}\right)}} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + k \frac{\Delta x}{x_0}}} \approx \omega_0 \left(1 - k \frac{\Delta x}{2x_0}\right) \quad (25.10)$$

25.10 La tension v_1 est sinusoïdale de pulsation instantanée donnée par (25.10). Sa phase instantanée s'écrit donc en utilisant (25.1) :

$$\varphi(t) = \int \omega dt \approx \omega_0 t - \int k \omega_0 \frac{\Delta x}{2x_0} dt = \omega_0 t - F(t)$$

La tension instantanée v_1 est de la forme $v_1 = V_0 \sin(\omega_0 t - F(t))$.

III. Conditionnement du signal

25.11 Dans le domaine de Laplace, on peut écrire :

$$e^+ = \frac{1}{1 + R_3 C_3 p} V_1 \quad \text{et} \quad e^- = \frac{V_5 + V_1}{2}$$

La contre-réaction amène tous calculs faits :

$$V_5 = \frac{1 - R_3 C_3 p}{1 + R_3 C_3 p} V_1$$

La tension instantanée v_1 étant sinusoïdale de pulsation ω , la transmittance T du premier étage du circuit de la figure 25.4 est donnée par :

$$T(j\omega) = \frac{1 - jR_3 C_3 \omega}{1 + jR_3 C_3 \omega}$$

Cet étage entraîne donc un simple déphasage $\Delta\phi$ entre $v_1 = V_0 \sin(\omega_0 t - F(t))$ et $v_5 = V_0 \sin(\omega_0 t - F(t) + \Delta\phi)$, déphasage donné par :

$$\Delta\phi = -2\arctan(R_3 C_3 \omega) \quad (25.11)$$

25.12 En sortie du multiplieur, on a simplement :

$$\begin{aligned} v_6 &= \frac{v_1 v_5}{E} = \frac{V_0^2}{E} \sin(\omega_0 t - F(t)) \sin(\omega_0 t - F(t) + \Delta\phi) \\ &= \frac{V_0^2}{2E} [\cos(\Delta\phi) - \cos(2\omega_0 t - 2F(t) + \Delta\phi)] \end{aligned}$$

25.13 L'étage de sortie du circuit de la figure 25-4 est un simple filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\frac{V_s}{V_6} = \frac{1}{1 + R_4 C_4 p}$$

La fréquence de coupure de ce filtre est donnée par $\omega_c = 1/R_4 C_4$. Si $\omega \ll \omega_c$ sans pour autant que le montage filtre l'évolution temporelle de $\Delta\phi$, on obtient :

$$v_s \simeq \frac{V_0^2}{2E} \cos(\Delta\phi)$$

25.14 Avec (25.2), (25.11), (25.10) la tension de sortie v_s s'écrit :

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{V_0^2}{2E} \frac{1 - \left[R_3 C_3 \omega_0 \left(1 - \frac{k\Delta x}{2x_0} \right) \right]^2}{1 + \left[R_3 C_3 \omega_0 \left(1 - \frac{k\Delta x}{2x_0} \right) \right]^2} \\ &= \frac{V_0^2}{2E} \frac{1 - (R_3 C_3 \omega_0)^2 + R_3 C_3 \omega_0 \frac{k\Delta x}{x_0} - \left(R_3 C_3 \omega_0 \frac{k\Delta x}{2x_0} \right)^2}{1 + (R_3 C_3 \omega_0)^2 - R_3 C_3 \omega_0 \frac{k\Delta x}{x_0} + \left(R_3 C_3 \omega_0 \frac{k\Delta x}{2x_0} \right)^2} \end{aligned} \quad (25.12)$$

En choisissant $R_3 C_3 = 1/\omega_0$, (25.12) devient au premier ordre en $\Delta x/x_0$:

$$v_s = \frac{V_0^2}{2E} \frac{\frac{k\Delta x}{x_0} \left(1 - \frac{k\Delta x}{4x_0} \right)}{2 - \frac{k\Delta x}{x_0} \left(1 - \frac{k\Delta x}{4x_0} \right)} \simeq \frac{kV_0^2}{2E} \frac{\Delta x}{x_0} \quad (25.13)$$

La sensibilité est donnée à partir de (25.13) par :

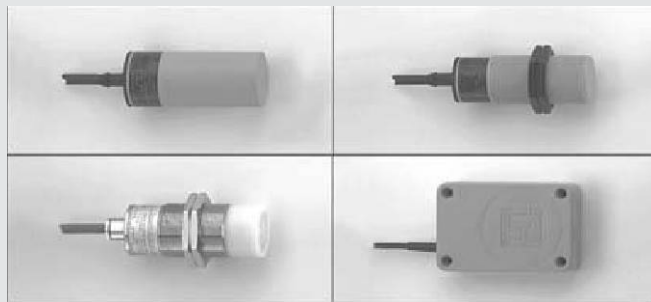
$$S = \frac{kV_0^2}{2Ex_0} = -2,5 \text{ V/mm}$$

 ENCART 25.1

Les conditionnements des transducteurs capacitifs peuvent être de nature très différente selon le type d'utilisation.

Le capteur de proximité peut être à sortie analogique si l'objet est la mesure de la distance capteur-cible en vue d'un asservissement par exemple. Dans ce cas le conditionnement peut être du type étudié ici ou encore à boucle à verrouillage de phase et le signal de sortie peut être une tension ou encore un courant dans le cas du standard 4–20 mA.

Ce type de capteur peut aussi être à sortie binaire si le but est de disposer d'un signal informant du dépassement d'une valeur limite de la distance capteur-cible, on les appelle alors des détecteurs. Cette valeur limite peut ou non être réglée par l'utilisateur selon les modèles. Ce dernier type de capteurs est très couramment utilisé dans l'industrie dans les automatismes tout ou rien et dans les problèmes de sécurité des biens et des personnes en milieux industriels.



**Figure 25.5 – Différents types de détecteurs capacitifs
(documentation ifm-electronic)**