جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

حل السلسلة رقم 02

التمرين الأول:

(1) من اجل كل $x \in E$، $y = Tx \in F$، لدينا

$$\|x\|_E = \|T^{-1}y\|_F \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)}\|Tx\|_F.$$

اذن $\|Tx\|_F \geq \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(F,E)}\|x\|_E$.

(2) لتكن $(y_n) = (Tx_n)$ متتالية متقاربة نحو y. لبرهن ان $y \in Im(T)$، المتتالية (Tx_n) متقاربة اذن فهي كوشية، اي ان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0, \|T(x_n - x_m)\|_F = \|Tx_n - Tx_m\|_F \leq \varepsilon.$$

باستعمال السؤال السابق نجد ان

$$\|x_n - x_m\|_E \leq \|T^{-1}\|\|T(x_n - x_m)\|_F \leq \varepsilon,$$

اي ان (x_n) كوشية في E وهو تام اذن فهي متقاربة نحو x، لان T مستمر، ومنه $y_n = Tx_n \to y = Tx \in Im(T)$.

التمرين الثاني:

بمان T مستمر و $\ker T = T^{-1}(\{0\})$، اذن $KerT$ مغلقة.

طريقة ثانية

لتكن

$(x_n) \subset \ker T$ جيث $x_n \to x$، بمان T مستمر فان

$Tx_n \to Tx$. وبالتالي $Tx = 0$، ومنه $x \in \ker T$.

التمرين الثالث:

(1) يمكن التاكد من خطية I بسهولة، بالنسبة للاستمرار لدينا

$$\|x\|_1 = \|Ix\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt \leq \sup_{0\leq t\leq 1}|x| \int_0^1 dt = \|x\|_\infty$$

اذن $\|I\|_{\mathcal{L}} \leq 1$.

من اجل $x(t) = 1$، لدينا

$$\frac{\|Ix\|_1}{\|x\|_\infty} = 1 \leq \|I\|_{\mathcal{L}}.$$

(2) $x_n = t^n \Rightarrow \|x\|_\infty = 1$
من جهة ثانية $\|x\|_1 = \frac{1}{n+1}$.

نبرهن بالخلف، انفرض ان I^-1 مستمر، اذن يوجد $C > 0$ يحقق

$$\|x\|_\infty = \|I^{-1}x\|_\infty \leq \frac{C}{n+1},$$

اي انه يوجد C، يكون $C \geq n+1$، من اجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$، وهذا مستحيل، لان مجموعة الاعداد الطبيعية ليست محدودة.

(3) بمان X فضاءا بناخيا، فاذت كان Y بناخيا ايضا، بامكاننا تطبيق مبرهنة بناخ للتشاكل، اي انه بكون I^{-1} مستمرا وهذا لم يكن. وبالتالي Y ليس تاما.

.

التمرين الرابع:

(1) $Tx(t) = x(\frac{t+1}{2})$،

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 x(\frac{t+1}{2})\overline{y(t)}dt$$

بوضع $s = \frac{t+1}{2} \Rightarrow t = 2s-1;\;\; dt = 2ds$ نجد ان

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(s)\overline{2y(2s-1)}ds = \langle x, T^*y\rangle$$

ومنه

$$T^*y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 2y(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(2)

$$\langle Tx; y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\overline{\alpha_n} y_n}$$

ومنه $T^*y(t) = (\overline{\alpha_1}y_1, \overline{\alpha_2}y_2, ..., \overline{\alpha_n}y_n; ...)$.

(3) $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} a(t)x(t+h)\overline{y(t)}dt$$

بوضع $s = t+h$ نجد ان

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(s)\overline{a(s-h)y(s-h)}ds = \langle x, T^*y\rangle$$

ومنه $T^*y(t) = a(t-h)y(t-h)$.

(4)

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \int_0^1 \Big(\int_0^t x(s)ds\Big)\overline{y(t)}dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t x(s)\overline{y(t)}dsdt\end{aligned}$$

باستعمال الخاصية

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_x^b f(x,y)dx$$

نجد ان

$$\int_0^1 \int_0^t x(s)\overline{y(t)}dsdt = \int_0^1 x(t)\overline{\Big(\int_t^1 y(s)ds\Big)}dt$$

$$\Rightarrow T^*y(t) = \int_t^1 y(s)ds.$$

التمرين الخامس:

(1) اذا كان T قابلا للقلب فان

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I_H \Rightarrow T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$$

اذن $T*$ قابل للقلب، ومقلوبه هو قرين مقلوب T اي ان: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(2) اذا كان T^* قابلا للقلب فان

$$\|x\| = \|(T^*)^{-1}T^*x\| \leq \|(T^*)^{-1}\|\|T^*x\|$$

$$\Rightarrow \|T^*x\| \geq c\|x\|$$

جيث $c = \|(T^*)^{-1}\|^{-1}$.
بنفس الطريقة نجد

$$\|Tx\| \geq c\|x\|$$

لان قابلية القلب لـ T^* تستلزم قابلية للقلب لـ T وذلك بتعويض T بـــ $T*$ في الاستلزام من (1) الى (2).

(3) لنبين ان T متباين، من اجل ذلك نبرهن $\ker T = \{0\}$.

$$x \in \ker T \Leftrightarrow 0 = \|Tx\| \geq c\|x\| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0$$

$$\leftrightarrow \ker T = \{0\}.$$

لاثبات ان T غامر سوف نبين ان $Im(T) = H$.
من اجل ذلك نثبت ان $Im(T)$ مغلقة و كثيفة، اي

$$Im(T) = \overline{Im(T)} = H$$

نبدا باثبات ان $Im(T)$ مغلقة،

لتكن $(y_n) \subset Im(T)$ متقاربة نحو y، لنبين ان $y \in Im(T)$. لدينا

$$y_n \in Im(T) \Rightarrow \exists x_n \in H, y_n = Tx_n$$

(y_n) متقاربة اذن فهي كوشية، اي ان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow c\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| < \varepsilon$$

اذن (x_n) كوشية في H فهي متقاربة، ولتكن x نهايتها.

بمان T مستمر فان $y_n = Tx_n \to Tx$ ومنه $y = Tx \in Im(T)$.

اذن بمان $Im(T)$ مغلقة فانه يمكننا كتابة $H = Im(T) \oplus (Im(T))^{\perp}$

فاذا بينا ان $(Im(T))^{\perp} = \{0\}$ فان $Im(T) = H$ لان $H = \{0\}^{\perp}$, $H^{\perp} = \{0\}$.

لدينا

$$(Im(T))^{\perp} = \ker T^* = \{0\} \Rightarrow Im(T) = H$$

لان T^* متباين.اذن T متباين وغامر وبالتالي فهو يقبل مؤثرا عكسيا.

ملاحظة ١ (1)

$$T \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow T* \in \mathcal{L}(H).$$

لان

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle \leq \|x\| \|T(T^*x)\|$$
$$\leq \|x\|(c\|T^*x\|)$$
$$\Rightarrow \|T^*x\| \leq c\|x\|.$$

(2) تباين المؤثر T^* يأتي من

$$0 = \|T^*x\| \geq c\|x\| \Rightarrow x = 0$$
$$\Rightarrow \ker T^* = \{0\}.$$

(3) من اجل مؤثر $T \in \mathcal{L}(H)$ يكون T غامرا اذا وفقط $Im(T)$ مغلقة وكثيفة.

(١). اذا كان H فضاءا هيلبرتيا وكان F فضاءا شعاعيا جزئيا منه. يكون F كثيفا في H اذا وفقط اذا كان $F^{\perp} = \{0\}$.

التمرين السادس:

(1) باستعمال مبرهنة كوشي شوارتز نحصل على

$$\int_0^1 t^2 x^2(t) dt \leq \|t^2\|_{L^2} \|x^2\|_{L^2}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \int_0^1 x^2(t) dt < \infty$$
$$\Rightarrow Tx \in L^2([0,1]).$$

(2)

$$|Tx|^2 \leq t^2|x|^2 \Rightarrow \|Tx\|_{L^2}^2 \leq \|x\|^2 \int_0^1 t^2 dt$$
$$\Rightarrow \|Tx\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{3}\|x\|^2$$
$$\Rightarrow \|Tx\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|x\|.$$

من اجل $x_0 = 1$ لدينا $\|Tx\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\|Tx\|_{L^2} = 1$ ومنه

$$\frac{\|Tx\|_{L^2}}{\|x\|_{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\|Tx\|_{L^2}}{\|x\|_{L^2}} = \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

ومنه $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(3) **اذا كانت λ قيمة ذاتية لـ T فانه يوجد x غير معدوم يحقق المعادلة**

$$tx(t) = \lambda x(t) \Rrightarrow (t-\lambda)x(t) = 0, \forall t \in [0,1] \Rightarrow x = 0$$

وهذا تناقض كون الحل غير معدوم.

(4) **بين انه اذا كان $\lambda \notin [0,1]$ فان المؤثر $(T-\lambda I)$ يقبل مقلوبا مستمرا على E. استنتج ان $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.**
لنفرض ان $\lambda \notin [0,1]$ اذن

$$d(\lambda,[0,1]) = \inf_{t\in[0,1]} d(\lambda,t) = m > 0$$

لنبين ان $(T-\lambda I)$ قابل للقلب ومستمر على $L^2([0,1],\mathbb{R}$

$$y = (T-\lambda I)x = (\lambda - t)x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda - t}y$$

اذن المؤثر $(T-\lambda I)^{-1}$ خطي و معرف على $L^2([0,1],\mathbb{C})$ ولنبين انه مستمر

$$\|(T-\lambda I)^{-1}x\|_{L^2} = \|\frac{1}{\lambda - \alpha_n}x\|_{L^2} \leq \frac{1}{m}\|x\|_{L^2}$$
$$\Rightarrow (T-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2)$$
$$\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \Rrightarrow \lambda \notin [0,1] \Rrightarrow \lambda \notin \sigma(T)$$

باخذ العكس النقيض لهذا الاستلزام نجد .$\sigma(T) \subseteq [0,1]$

التمرين السابع:

(1) **تكون λ قيمة ذاتية لـ T اذا وفقط اذا قبلت المعادلة**

$$Tx = \lambda x, \qquad (١)$$

حلا غير معدوم في ℓ^2.
المعادلة ١ تكافىء

$$(x_2, x_3, ..., x_n, ...) = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \lambda^n x_1; \forall n \geq 1$$

اذا كان $|\lambda| < 1$ فان السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n|^2 < \infty$ ومنه من اجل $x_1 \neq 0 \in \ell^2$ $x = x_1(\lambda 1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...) \in \ell^2$
وهو حل غير معدوم للمعادلة ١ اي ان λ قيمة ذاتية، اي ان

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma_p(T).$$

بمان $|T| = 1$ ونعلم ان

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < \|T\| = 1\}$$

$$\sigma(T) = \overline{\sigma(T)} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$$

لكن حسب السؤال السابق لدينا

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$$

$$\Rightarrow \overline{\{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\}} \subseteq \overline{\sigma_(T)} = \sigma(T)$$

لان الطيف جزء مغلق من $\mathbb{C}$. ومنه المساواة

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} = \overline{\mathbb{D}}.$$

(2) نبرهن بالخلف، نفرض ان S يقبل قيم ذاتية. اولا نبدا بالقيمة الذاتية المعدومة وهذا غير ممكن لان S متباين، وبالتالي الصفر ليس قيمة ذاتية.
اذا كانت $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية فان

$$(0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \lambda x_{n+1} = x_n$$

$$\Rightarrow x_n = 0, \forall n \geq 1$$

وهذا يناقض كون الحل يجب ان يكون غير معدوم. وبالتالي المؤثر لايملك اية قيمة ذاتية، اي ان $\sigma_p(S) = \emptyset$. بمان $T^* = S$ فان

$$\sigma(S) = \sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\overline{\lambda}| \leq 1\} = \overline{\mathbb{D}}.$$