جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

السلسلة رقم 02

التمرين الأول: ليكن E و F فضائين شعاعين نظيمين و $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) أثبت أنه اذا كان T قابل للقلب و $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ فإنه من أجل كل $x \in E$ لدينا $\|Tx\|_F \geq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{-1}\|x\|_E$.

2) برهن أنه اذا كان E فضاء بناخي بحيث $\|T\| \geq \|x\|$، فإن $R(T) = Im(T)$ مغلق.

التمرين الثاني: ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

أثبت أنه اذا كان T مستمر فإن $KerT$ مجموعة مغلقة.

التمرين الثالث:

ليكن $E = C([0,1])$ فضاء التوابع العقدية المستمرة. نعتبر الفضائين النظيمين التاليين $X = (E, \|.\|_\infty)$ و $Y = (E, \|.\|_1$ حيث $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$. نرمز ب I للتطبيق المطابق ل X في Y.

1) أثبت أن I تقابل ومستمر ثم أحسب نظيمه.

2) أثبت أن I^{-1} ليس مستمر (مساعدة: استعمل المتتالية $0 < t < 1$,$x_n(t) = t^n$).

3) استنتج أن Y ليس فضاء تام.

التمرين الرابع: اجسب T^* في كل جالة من الجالات التالية:

(1) $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$، $Tx(t) = x(\frac{t+1}{2}$.

(2) $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$، $Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...)$، $(\alpha_n) \subset \ell^\infty$.

(3) $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$، $Tx(t) = a(t)x(t+h), h \in \mathbb{R}$ دالة محدودة على $\mathbb{R}$) و تاخذ فيمها غي $\mathbb{R}$).

(4) $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$، $Tx(t) = \int_a^t x(sds$.

التمرين الخامس: ليكن H فضاءا هيلبرتيا، بين انه اذا كان $T \in \mathcal{L}(H)$ فان القضايا التالية متكافئة:

(1) T قابل للقلب.

(2) T^* قابل للقلب.

(3) $\exists c > 0, \|Tx\| \geq c\|x\|$ و $\|T^*x\| \geq c\|x\|$.

التمرين السادس: ليكن $E = L^2([0,1],\mathbb{C})$، ومن اجل كل $x \in E$. نعتبر المؤثر $Tx(t) = tx(t)$

(1) تحقق ان $Tx \in E$.

(2) بين ان $T \in \mathcal{L}(L^2)$ ثم اجسب $\|T\|_{\mathcal{L}}$.

(3) بين ان T لايملك اية قيمة ذاتية.

(4) بين انه اذا كان $\lambda \notin [0,1]$ فان المؤثر $(T - \lambda I)$ يقبل مقلوبا مستمرا على E.
استنتج ان $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.

التمرين السابع:

(1) ليكن $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$، حيث $T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

- بين انه من اجل كل $\lambda \in \mathbb{C}$، تحقق $|\lambda| \leq 1$ هي قيمة ذاتية لـ T.
- عين طيف المؤثر T.

(2) ليكن $S : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$، حيث $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$

- بين ان S لا يملك اية قيمة ذاتية.
- بين ان طيف المؤثر S هو قرص الوحدة المغلق
$\overline{\mathbb{D}} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$.