جذع مشترك علوم وتقنيات	جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي – كلية التكنولوجيا	مقياس: رياضيات 2
السلسلة رقم 2		

التمرين 1: تأكد أن المعادلات التالية ذات متغيرات منفصلة ثم حلها:

$(1-y)y' = x+3$	$e^y \cdot y' = e^x$	$\frac{y}{1+y^2} \cdot y' = \frac{1}{x^2-1}$
$(1-x^2)y' = y^2$	$x^2 y' = y - xy$	$y' \cos y = \sin x$
$y' = e^{3x+2y}$	$y' y = e^{x-y}$	$(x^2 - x^2 y)y' = y^2 + x y^2$
$\frac{dy}{dx} - y(2+\sin x) = 0$	$\frac{dy}{dx} = 4(y^2+1)$	$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$
$\sqrt{y} - xy' = 0$	$y' = (2x+3x^2)(1+y)$	$y'(x^2-1) = 2xy$
$(1+e^x)\, y\, y' = e^x$	$\sqrt{y^2+1}\, dx = xy\, dy$	$(2+x)dy = y\,dx.$

التمرين 2: تأكد أن المعادلات التالية متجانسة ثم حلها:

$y' = \frac{3y+x}{3x+y}$	$y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$	$y' = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$
$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$	$(y - xy^2)dx = (x + x^2 y)dy$	$(y - \sqrt{x^2+y^2})dx = x\,dy$
$\frac{dx}{dy} = \frac{x-5y}{5x-y}$	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	$(x + \sqrt{xy})dy = y\,dx.$
$y\,dx + (2x+3y)dy = 0$	$y^2 dx + (x^2+xy)dy = 0$	$y\,dx = (x - 2\sqrt{xy})dy$
$y'(y-3x) = x+y$	$xy^2 y' = y^3 - x^3$	$(5v-u)du = (3v-7u)dv$
$y\frac{dx}{dy} = x + 4y\, e^{(-2x/y)}$	$x^2 y' = 4xy + y^2$	$x^2 y' = 3x^2 - 2xy + y^2$

التمرين 3: حل المعادلات الخطية التالية:

$2y' + 10y = 1$	$y' - y = e^{3x}$	$y' + 3x^2 y = x^2$
$xy' - y = (1+x^2)$	$(1+e^x)y' + e^x y = 0$	$xy' - 2y = \ln x.$
$xy' + (1+x)y = e^x.$	$y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = x.$	$2xy' + y = \frac{1}{1-x}.$
$y' + \frac{6}{x+2}y = \frac{1}{(1+x)^2}$	$y' = \frac{y}{x} + x.$	$y' - 2y = 2x \;;\; y(0) = 1/4$
$y'x = y+1 \;;\; y(1) = 0$	$(x^2+1)dy + xy\,dx = 0$	$x^2 y' - (2x-1)y = x^2 - x$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

شكل هذه المعادلات هو: $ay''+by'+cy=f(x) \cdots (E)$ حيث a, b, c ثوابت و $(a \neq 0)$

الحل العام لها هو: $y = y_s + y_p$

حيث y_s هو الحل العام للمعادلة (E) من دون الطرف الثاني و y_p هو الحل الخاص لـ (E)

كيفية إيجاد y_s :

نعين المعادلة المرافقة $ar^2+br+c=0$ ونحسب المميز $\Delta = b^2-4ac$

المميز	الحلول r	الحل العام y_s
$\Delta > 0$	$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_s = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.
$\Delta = 0$	$r_0 = -b/2a$.	$y_s = (c_1 x + c_2) e^{r_0 x}$.
$\Delta < 0$	$r = \alpha \pm i\beta$.	$y_s = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$.

بعض الأشكال للحلول الخاصة:

1) إذا كان: $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ فإن $y_p = x^m Q_n(x) e^{\alpha x}$ حيث P_n و Q_n كثيرا حدود من الدرجة n

✓ $m=0$ إذا كان α ليس حلا للمعادلة المرافقة.

✓ $m=1$ إذا كان α حلا بسيطا للمعادلة المرافقة

✓ $m=2$ اذا كان α حلا مضاعفا للمعادلة المرافقة.

2) إذا كان: $f(x)=c_1\cos\gamma x + c_2\sin\gamma x$ فإن $y_p = x^m(d_1\cos\gamma x + d_2\sin\gamma x)$.

✓ $m=0$ في حالة $(i\beta)$ ليس حلا للمعادلة المرافقة.

✓ $m=1$ في حالة $(i\beta)$ حلا للمعادلة المرافقة.

3) إذا كانت $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ فإن $y_p = y_{p_1}+y_{p_2}$

حيث y_{p_i} هو الحل الخاص للمعادلة، $ay''+by'+cy=f_i(x)$. $(i=1,2)$

التمرين 4: حل المعادلات التفاضلية التالية:

$y''-2y'+y=xe^{-x}$.	$y''-2y'+y=e^{x}$	$y''-3y'+2y=xe^{2x}$
$y''+4y=\sin 3x$	$y''+4y=\cos 2x$.	$y''-y=e^{x}+x$.

التمرين 5: عين الحل الوحيد y للمعادلة التفاضلية التالية $y''+2y'+4y=xe^{x}$

والذي يحقق: $y(0)=1$ و $y(1)=0$