جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي.

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير.

** قسم العلوم الاقتصادية **

محاضرات:

اقتصاد قياسي 2 -

موجهة: لطلبة سنة ثالثة اقتصاد كمي.

من إعداد: الدكتورة وفاء رمضاني.

السنة الجامعية: 2021 - 2022.

المحور الثاني: الانحدار الخطي المتعدد.

Le modèle de régression multiple

في المحور السابق تم التعرض إلى نموذج الانحدار الخطي البسيط والذي يعتمد على متغير مستقل واحد لتفسير التغير الحاصل في المتغير التابع، ولكن وكما هو معلوم ففي الواقع الاقتصادي لا يمكن الاعتماد في تفسير أي ظاهرة اقتصادية أو اجتماعية على متغير مستقل واحد، فعلى سبيل المثال: لا يمكن القول أن الاستهلاك لا يتحدد فقط بالدخل، وإنما يتحدد بالعديد من المتغيرات الأخرى على غرار الدخل، مثلا العادات والتقاليد، أذواق المستهلكين، الثروة، المستوى الثقافي..... الخ.

ومن هنا يمكن القول أن نموذج الانحدار الخطي المتعدد هو امتداد لنموذج الانحدار الخطي البسيط بإضافة على الأقل متغير مستقل إضافي، أي أن نموذج الانحدار الخطي المتعدد يهتم بدراسة أثر عدة متغيرات مستقلة كمية على متغير تابع كمي.

1- الصياغة الرياضية للنموذج الخطي المتعدد:

بإفتراض وجود علاقة خطية بين المتغير التابع y وعدد المتغيرات المستقلة X_{kt} فإن الصيغة الرياضية سوف تكتب على النحو التالي:

$$y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + \dots\dots b_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

حيث:

$$t = 1, 2, \dots n$$

y_t = المتغير التابع في الفترة t.

X_{1t} = المتغير المستقل الأول في الفترة t.

X_{kt} = المتغير المستقل k في الفترة t.

$b_0, b_1, b_2 \dots b_k$ = معلمات النموذج.

ε_t = حد الخطأ (المتغير العشوائي). n: عدد المشاهدات.

- بناء على المعادلة أعلاه يمكن كتابة نظام المعادلات التالية لكل مشاهدة على النحو التالي:

$$t = 1 \Rightarrow y_1 = b_0 + b_1 X_{11} + b_2 X_{21} + \dots\dots + b_{k1} + \varepsilon_1 .$$

$$t = 2 \Rightarrow y_2 = b_0 + b_1 X_{12} + b_2 X_{22} + \dots\dots + b_{k2} + \varepsilon_2 .$$

$$\vdots$$

$$t = n \Rightarrow y_n = b_0 + b_1 X_{1n} + b_2 X_{2n} + \dots\dots + b_{kn} + \varepsilon_n .$$

يمكن كتابة هذا النظام على شكل المصفوفات المصفوفي التالي:

$$Y = Xb + \varepsilon_t$$

حيث:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{(n,1)} \quad و \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & & X_{kn} \end{bmatrix}_{(n,k+1)} , \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}_{(k+1,1)}$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{(n,1)}$$

ملاحظة: الأرقام بين الأقواس تمثل أبعاد المصفوفة، حيث يمثل العدد الأول عدد الأسطر والعدد الثاني عدد الأعمدة.

مثلا: بعد المصفوفة Y هو $(n,1)$: يمثل n عدد الأسطر و العدد 1 عدد الأعمدة.

حيث:

Y: يعبر عن متجه (شعاع) المتغير التابع وهو من الشكل $(n,1)$.

X: مصفوفة قيم المتغيرات المستقلة وهي من الشكل (n,k)، حيث يدل الرقم 1 في العمود الأول على الحد الثابت.

b: شعاع معلمات النموذج وهو من الشكل $(n,1)$.

ε_t: شعاع قيم المتغير العشوائي وهو من الشكل $(n,1)$.

2- الفرضيات الأساسية لنموذج الانحدار الخطي المتعدد:

- يستند نموذج الانحدار الخطي المتعدد على غرار نموذج الانحدار الخطي البسيط على عدد من الفرضيات التي يجب أخذها بعين الاعتبار من أجل الحصول على مقدرات صالحة للتنبؤ بالمتغير التابع وتفسيره، بحيث تكون قريبة للواقع بالقدر الممكن، وتشير إلى أن هذه الفرضيات تخص الحدود العشوائية (الخطأ العشوائي ε_t) والمتغيرات المفسرة (X_k).

1- الأمل الرياضي (التوقع الرياضي) للأخطاء العشوائية معدوم، ويكتب: $E(\varepsilon_t)=0$

أي:

$$E(\varepsilon_t) = E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- تباين الأخطاء العشوائية ثابت، [أي لا يختلف من فترة زمنية إلى أخرى].

ويكتب: $V(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$.

3 - استقلالية الأخطاء عن بعضها البعض ، أي : التباينات المشتركة بين قيمه معدومة . ونكتب :

$$cov(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0$$

حيث : $(i \neq j)$ [خطأ الفترة i لا يرتبط بتباين الخطأ خلال الفترة j].

- الفرضية (2) و الفرضية (3) يمكن التعبير عنها من خلال مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء ، كالتالي :

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon \varepsilon') = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \dots & \dots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & & & \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_n^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & cov(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \dots & cov(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & & & \\ cov(\varepsilon_n \cdot \varepsilon_1) & \dots & \dots & \sigma^2_{\varepsilon_n} \end{bmatrix}$$

حيث :

$$E(\varepsilon_1^2) = E(\varepsilon_2^2) = \dots E(\varepsilon_n^2) = \sigma^2$$

$$cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) = cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) = \dots cov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$$

ومنه :

حيث :

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon \varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} , \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 . I_n$$

وتسمى المصفوفة Ω_ε بمصفوفة التباين والتباين المشترك لحد الخطأ ε_i.
حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة ، تباين قيم ε وهو ثابت (σ^2).
بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر وهو ما يعني أن التباين المشترك والترابط بين قيم ε_i مساوي للصفر.

4 - من خلال الفرضية (1) و (2) نستنتج أن قيم الأخطاء العشوائية تتخذ التوزيع الطبيعي ، ونكتب : $\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$ ، حيث لابد أن يكون الخطأ العشوائي ذو توزيع طبيعي له متوسط مساوي $0 = E(\varepsilon_t)$ وتباينه $\sigma^2_{\varepsilon_t} = \sigma^2$ ثابت .

5- غياب الارتباط بين المتغيرات المستقلة، يحقق وجود المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

3- تقدير معالم النموذج المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية:

- بنفس طريقة نموذج الانحدار الخطي البسيط وبنفس المنهجية، لدينا نموذج الانحدار المتعدد التالي:

$$Y = Xb + \varepsilon$$

حيث: b، ε هي معاميل النموذج، أما المصفوفتين Y و X هما معطيات التقدير، وكما في الانحدار الخطي البسيط سوف نعمد إلى تدنية مجموع مربعات البواقي $\sum_{i=1} e_i^2$، وذلك كالتالي:

نعلم أن: معادلة النموذج قبل التقدير تعطى وفق التالي:

$$Y_i = Xb + \varepsilon_i$$

وبعد التقدير تعطى وفق التالي:

$$\hat{Y} = X\hat{b}$$

حيث: ε_i قبل التقدير ← وبعد التقدير يصبح e_i حيث: $e_i = (y_i - \hat{y})$

نعلم أن:

$$Y_i = Xb + \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_i = Y_i - Xb$$

ومنه فإن تدنية مجموع مربعات البواقي يكون كالتالي:

$$Min \sum_{i=1} e_i^2 = Min(y_i - \hat{y}) = Min\, e_i e'$$

حيث تمثل: e' منقول المصفوفة e.

$$Min\, ee' = Min(y_i - \hat{y})(y_i - \hat{y})'$$

بالتعويض $\hat{y} = X\hat{b}$ بما يساويها في العلاقة أعلاه نجد:

$$Min\, ee' = (y_i - X\hat{b})(y_i - X\hat{b})'$$
$$= (y_i - X\hat{b})(y_i' - X'\hat{b}')$$
$$= y_i y' - y_i X'\hat{b}' - X\hat{b}y' + XX'\hat{b}\hat{b}'$$
$$= y_i y' - X'\hat{b}'y_i - X\hat{b}y' + (XX')\hat{b}\hat{b}'$$

بما أن: $Y'X\hat{b} = X'\hat{b}'y_i$ يصبح لدينا:

$$Min\, ee' = y_i y' - 2\hat{b}'X'y + \hat{b}'X'X\hat{b}$$

وحتى يكون المقدار $e'e$ أصغر ما يمكن نأخذ المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمعلمات المقدرة:

- الاشتقاق الجزئي لـ $e'e$ بالنسبة لـ $\hat{b}$، كالتالي:

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{b}} = 0$$

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{b}} = 0 - 2X'y + 2(X'X)\hat{b} = 0$$

$$= (X'X).\hat{b} = X'y$$

⇐ نضرب طرفي المعادلات أعلاه في $(X'X)^{-1}$ نحصل على:

$$(X'X)^{-1}.(X'X).\hat{b} = (X'X)^{-1}.X'y$$

نعلم أن: $I_n = (X'X)^{-1}.(X'X)$ [تساوي مصفوفة الوحدة I_n].

ومنه:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}.X'y$$

حيث: $\hat{b}$: تمثل شعاع المعلمات المقدرة وفق طريقة المربعات الصغرى العادية.

* وبعد احتساب المتجه $(X'X)$ و محدد المصفوفة $|X'X|$ الذي ينبغي أن لا يساوي الصفر، نوجد مقلوب (معكوس) المصفوفة وهو عبارة عن: $(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|}.Adj(X'X)$، ومن ثم تطبيق القانون أعلاه.

المحاضرة (2) : 15 / 02 / 2022م.

التمرين (04) :

تمثل بيانات الجدول الموالي تغيرات كل من الاستهلاك والدخل وسعر الفائدة لبلد ما خلال عقد من الزمن:

الاستهلاك y	الدخل x_1	سعر الفائدة x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	$x_1 \cdot y$	$x_2 \cdot y$
12	7	4	49	16	28	84	48
11	12	3	144	9	36	132	33
10	6	8	36	64	48	60	80
9	9	3	81	9	27	81	27
8	6	3	36	9	18	48	24
9	6	6	36	36	36	54	54
9	8	5	64	25	40	72	45
15	13	6	169	36	78	195	90
10	11	5	121	25	55	110	50
7	6	7	36	49	42	42	49
$\Sigma =$ 100	84	50	772	278	408	878	500

1- تقدير معالم النموذج التي تفسر الاستهلاك y :

نعلم أن:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} \cdot X'y$$

1-1: تشكيل المصفوفة $(X'X)^{-1}$ [معكوس المصفوفة].

أ- تشكيل $(X'X)$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 12 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 12 & \cdots & 6 \\ 4 & 3 & \cdots & 7 \end{bmatrix}$$

حيث: X' هي مقلوب (منقول) المصفوفة X.

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 12 & \cdots & 6 \\ 4 & 3 & \cdots & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 12 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_1X_2 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 84 & 50 \\ 84 & 772 & 408 \\ 50 & 408 & 278 \end{bmatrix}$$

ب- حساب المحدد $|X'X|$:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} +10 & -84 & +50 \\ -84 & +772 & -408 \\ +50 & -408 & +278 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 10 \begin{vmatrix} 772 & 408 \\ 408 & 278 \end{vmatrix} - 84 \begin{vmatrix} 84 & 408 \\ 50 & 278 \end{vmatrix} + 50 \begin{vmatrix} 84 & 772 \\ 50 & 408 \end{vmatrix}$$

$$|X'X| = 10(48152) - 84(2952) + 50(-4328) = \boxed{17152}$$

إذن:

$$|X'X| = 17152 \neq 0$$

إذن: المصفوفة $(X'X)$ تقبل معكوس

ج- حساب المحددات الجزئية

[حساب $Adj(x'x)$].

$$Adj(x'x)=\begin{bmatrix} 48152 & 2952 & -4328 \\ 2952 & \begin{vmatrix}10&50\\50&278\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}10&84\\50&408\end{vmatrix} \\ -4328 & \cdots & \begin{vmatrix}10&84\\84&772\end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj(x'x)=\begin{bmatrix} +48152 & -2952 & \pm 4328 \\ -2952 & +280 & \mp 120 \\ +-4328 & \mp 120 & +664 \end{bmatrix}$$

$$Adj(x'x)=\begin{bmatrix} 48152 & -2952 & -4328 \\ -2952 & 280 & +120 \\ -4328 & +120 & 664 \end{bmatrix}$$

د- حساب معكوس المصفوفة $(x'x)^{-1}$:

$$(x'x)^{-1}=\frac{1}{|x'x|}\cdot Adj(x'x)$$

$$(x'x)^{-1}=\frac{1}{17152}\begin{bmatrix} 48152 & -2952 & -4328 \\ -2952 & 280 & 120 \\ -4328 & 120 & 664 \end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1}=\begin{bmatrix} 2,8073 & -0,1721 & -0,2523 \\ -0,1721 & 0,0163 & 0,0069 \\ -0,2523 & +0,0069 & 0,0387 \end{bmatrix}$$

1-2: حساب المصفوفة $(x'.y)$

$$(x'y)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 7 & 12 & \cdots & 6 \\ 4 & 3 & \cdots & 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ \vdots \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

$$(x'.y)=\begin{bmatrix} 100 \\ 878 \\ 500 \end{bmatrix}$$

1-3: حساب شعاع المعلمات المقدرة $\hat{b}_0$

نعلم أن:

$$\hat{b}=(x'x)^{-1}\cdot x'y$$

$$\hat{b}=\begin{bmatrix} 2,8073 & -0,1721 & -0,2523 \\ -0,1721 & 0,0163 & 0,0069 \\ -0,2523 & +0,0069 & 0,0387 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 878 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b}=\begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3,4598 \\ 0,6203 \\ 0,2658 \end{bmatrix}$$

إذن: صيغة النموذج المقدر تكون كالتالي:

$$\boxed{y=3,4598+0,6203X_1+0,2658X_2}$$

* التفسير الاقتصادي: من خلال المعادلة أعلاه نلاحظ أن المتغير التابع y (الاستهلاك) له علاقة طردية مع المتغير X_1 (الدخل) حيث كلما ارتفع X_1 بوحدة واحدة ارتفع معها y (الاستهلاك) بـ 0,6203 وحدة مع ثبات X_2، كما نلاحظ وجود علاقة طردية بين y (الاستهلاك) و X_2 (سعر الفائدة) حيث كلما ارتفع X_2 بوحدة واحدة ارتفع معها y بـ 0,2658 وحدة مع ثبات X_1.

4 - الخواص الأساسية للمقدرات وفق طريقة المربعات الصغرى العادية

- يتميز تقدير مقدرات الانحدار الخطي المتعدد وفق طريقة المربعات الصغرى العادية بخصائص إحصائية معينة مرغوب فيها وعلى وجه التحديد نذكر:

أ- خاصية الخطية:

إن المقدرة $\hat{b}$ لـ b المتحصل عليها وفق طريقة المربعات الصغرى العادية هي على شكل خطي مع المتغير التابع Y، بحيث تكتب:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} \cdot X'Y$$

ب- خاصية عدم التحيز:

لدينا العلاقات التالية:

$Y = Xb + \varepsilon$ ، قبل التقدير = ε

$\hat{Y} = X\hat{b}$ ، بعد التقدير = e

$e = Y - \hat{Y}$

- لدينا العلاقة التي تسمح بتقدير $\hat{b}$ على النحو التالي:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} \cdot X'Y \quad \text{....(1)}$$

- بتعويض قيمة Y في المعادلة (1) نجد:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} \cdot X'(Xb + \varepsilon)$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}(X'X)b + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \quad \text{....(2)}$$

نعلم أن: $(X'X)^{-1} \cdot (X'X) = 1$

ومنه تصبح المعادلة (2) كالتالي:

$$\hat{b} = b + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

وبإدخال التوقع (الأمل) الرياضي على كلا طرفي المعادلة نحصل على:

$$E(\hat{b}) = E[b + (X'X)^{-1} \cdot X'\varepsilon]$$

تذكير: خصائص الأمل الرياضي:
إذا كان X متغير عشوائي و K عدد حقيقي فإن:
1/ $E(K) = K$
2/ $E(K+X) = E(X) + K$
3/ $E(K \cdot X) = K \cdot E(X)$
4/ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

إذن:

$$E(\hat{b}) = E[b + (X'X)^{-1} \cdot X'\varepsilon]$$

$$= E(b) + E((X'X)^{-1} \cdot X'\varepsilon)$$

$$E(\hat{b}) = b + (X'X)^{-1} \cdot X' \overset{0}{\cancel{E(\varepsilon)}}$$

- من فرضيات الانحدار الخطي المتعدد أن: $E(\varepsilon) = 0$

إذن:

ومنه نستنتج أن المقدرة $\hat{b}$ $\boxed{E(\hat{b}) = b}$ لـ b المتحصل عليها وفق طريقة المربعات الصغرى العادية غير متحيزة.

أي: $E(\hat{b} - b) = 0 \Leftrightarrow E(\hat{b}) = b$

ج- خاصية التقارب:

بداية لابد من حساب مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة لمعلمات التقدير $\hat{b}$، والتي ستكون وفق التالي:

نعلم أن: $V(\hat{b}) = E(\hat{b} - E(\hat{b}))^2$

حيث: $V(\hat{b})$ = تباين $\hat{b}$

تكتب المعادلة أعلاه في الشكل المصفوفي كالتالي:

$$V(\hat{b}) = E(\hat{b} - E(\hat{b}))(\hat{b} - E(\hat{b}))'$$

من خاصية عدم التحيز لدينا: $E(\hat{b}) = b$

إذن:

$$V(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)(\hat{b} - b)'$$

- أيضاً من خاصية عدم التحيز تم التوصل إلى:

$$\hat{b} = b + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{b} - b = (X'X)^{-1}X'\varepsilon}$$

وبالتعويض في العلاقة أعلاه نجد:

$$V(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)(\hat{b} - b)'$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]'$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X (X'X)^{-1}\right]$$

تذكير:
$$\boxed{(A.B)' = A'.B'}$$

$$= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon').X.(X'X)^{-1}$$

تذكير:
$$\boxed{E(\varepsilon\varepsilon') = Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2_\varepsilon I_n \quad \text{حيث} \quad i \neq j}$$

$$V(\hat{b}) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2_\varepsilon I_n . X(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2_\varepsilon(X'X)^{-1}\underbrace{(X'X).(X'X)^{-1}}_{I_K}$$

$$\boxed{V(\hat{b}) = \sigma^2_\varepsilon(X'X)^{-1}}$$

وهي مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المقدرة

وبعد حساب تباين المقدرات نستعين على إثبات خاصية التقارب (أقل تباين) كمايلي: بعد إدخال n:

$$V(\hat{b}) = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{n}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V(\hat{b}) = 0$$

وهذا ما يدل على أن المقدرة في هذه الحالة متقاربة أي تمتاز بخاصية التقارب.

ملاحظة: نلاحظ أن خصائص المقدرات بطريقة المربعات الصغرى العادية تعطي مقدرات خطية وغير متحيزة ولديها أقل تباين.

* **تقدير تباين الأخطاء (تباين المتغير العشوائي ε)**

يعطى وفق العلاقة التالية:

$$\sigma^2_\varepsilon = \frac{\sum e^2}{n-K} = \frac{e'e}{n-K} = \frac{RSS}{n-K}$$

واجب منزلي 1: أثبت أن:
$$\sigma^2_{\varepsilon} = \frac{e'e}{n-K}$$

لحساب المقدار $e'e$ يكفي تطبيق العلاقة التالية:

$$y = X\hat{b} + e$$

نضرب كل عنصر بمنقوله في المعادلة نجد:

$$y'y = X'X\hat{b}\hat{b}' + e'e$$

$$e'e = y'y - (X'X)\hat{b}\hat{b}'$$

ونعلم أن: $(X'X)\hat{b} = X'y$ وبالتعويض نجد

$$\boxed{e'e = y'y - \hat{b}'X'y}$$

حيث:

$$e'e = RSS$$

وهو يمثل مجموع مربعات البواقي أي:

$$\sum(y_i - \hat{y})^2 = \sum e^2 = e'e = RSS$$

مثال: نفس معطيات التمرين الأول من السلسلة رقم (2)

1- أحسب تباين الأخطاء σ^2_ε.

2- أحسب تباين المعلمات المقدرة.
$V(\hat{b}_0)$ ، $V(\hat{b}_1)$ ، $V(\hat{b}_2)$

الحل:

1- حساب تباين الأخطاء σ^2_ε:

نعلم أن:
$$\sigma^2_\varepsilon = \frac{e'e}{n-k}$$

حيث:
$$e'e = RSS$$
$$n = 10$$
$$k = 3$$

ونعلم أن:
$$RSS = y'y - \hat{B}'x'y$$

حيث:
$$y'y = [12\ 11 \ldots 7]\begin{bmatrix}12\\11\\ \vdots \\7\end{bmatrix} = \boxed{1046}$$

$$\hat{b}'.x'y = [3,4598\ \ 0,6203\ \ 0,2658]\begin{bmatrix}100\\878\\500\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{b}'x'y = 1023,56274}$$

إذن:
$$RSS = e'e = y'y - \hat{b}'.x'y$$
$$= 1046 - 1023,56274$$
$$\boxed{e'e = 22,4372}$$

إذن: تباين الأخطاء يكون كالتالي:
$$\sigma^2_\varepsilon = \frac{e'e}{n-k} \Rightarrow \sigma^2_\varepsilon = \frac{22,4372}{10-3}$$
$$\boxed{\sigma^2_\varepsilon = 3,2053}$$

2- حساب تباين المعلمات المقدرة
$V(\hat{b}_2)$ ، $V(\hat{b}_1)$ ، $V(\hat{b}_0)$

نعلم أن:
$$V(\hat{b}) = \sigma^2_\varepsilon.(x'x)^{-1}$$
$$= 3,2053\begin{bmatrix}2,8073 & -0,1721 & -0,2523\\ -0,1721 & 0,0163 & 0,0069\\ -0,2523 & +0,0069 & 0,0387\end{bmatrix}$$

• $V(\hat{b}_0) = 3,2053.(2,8073) = \boxed{8,9982}$

$$SD_{\hat{b}_0} = \sqrt{V(\hat{b}_0)} = \sqrt{8,9982}$$
$$\boxed{SD_{\hat{b}_0} = 2,9997}$$

• $V(\hat{b}_1) = 3,2053.(0,0163) = \boxed{0,0522}$

$$SD_{\hat{b}_1} = \sqrt{V(\hat{b}_1)} = \sqrt{0,0522}$$
$$\boxed{SD_{\hat{b}_1} = 0,2285}$$

• $V(\hat{b}_2) = 3,2053.(0,0387)$

$$\boxed{V(\hat{b}_2) = 0,1240}$$
$$\boxed{SD_{\hat{b}_2} = 0,3522}$$

ملاحظة:
مصفوفة التباينات المقدرات والتباينات المشتركة هي:

$$V(\hat{b}) = \begin{bmatrix}8,9982 & -0,5516 & -0,8086\\ -0,5516 & 0,0522 & 0,0221\\ -0,8086 & 0,0221 & 0,1240\end{bmatrix}$$

حيث:

$V(\hat{b}_0) = 8,9982$ ، $cov(\hat{b}_0,\hat{b}_1) = -0,5516$

$V(\hat{b}_1) = 0,0522$ ، $cov(\hat{b}_0,\hat{b}_2) = -0,8086$

$V(\hat{b}_2) = 0,1240$ ، $cov(\hat{b}_1,\hat{b}_2) = 0,0221$

5: دراسة صلاحية النموذج القياسي [نموذج الانحدار الخطي المتعدد]

لدراسة صلاحية النموذج نتبع الخطوات التالية:

5 - 1: دراسة القدرة التفسيرية للنموذج:

أ - معامل التحديد:

نعبر عنه بمجموع المربعات المفسرة ESS إلى مجموع المربعات الكلية TSS.

ونرمز له بالرمز R^2

حيث يعطى بالعلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

لدينا:

$$y = X\hat{b} + e$$

نضرب طرفي المعادلة في منقوله نجد:

$$y'y = X'X\hat{b}'\hat{b} + e'e$$

ونعلم أن: $(X'X)\hat{b} = X'y$

بالتعويض نجد:

$$y'y = \underbrace{X'X\hat{b}}\hat{b}' + e'e$$

$$y'y = X'y\hat{b}' + e'e$$

- نطرح مقدار $(n\bar{y}^2)$ من طرفي المعادلة نجد:

$$\underbrace{y'y - n(\bar{y})^2}_{TSS} = \underbrace{\hat{b}'X'y - n(\bar{y})^2}_{ESS} + \underbrace{e'e}_{RSS}$$

$$TSS = ESS + RSS$$

وبالتالي، بالتعويض في علاقة معامل التحديد نجد:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{b}'X'y - n(\bar{y})^2}{y'y - n(\bar{y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{e'e}{y'y - n(\bar{y})^2}$$

ب - معامل التحديد المصحح:

لأن بمجرد إضافة متغير مفسر في النموذج سيؤدي إلى ارتفاع فقط معامل التحديد بغض النظر عن معنوية هذه المتغيرة بحيث يوافق ارتفاع قيمة مجموع المربعات المفسرة ESS، وبالتالي فإن R^2 في النماذج المتعددة لا يعتبر مؤشرًا جيدًا للتعبير عن جودة النموذج.

ولهذا نلجأ لمعامل التحديد المصحح والذي يأخذ درجة الحرية بعين الاعتبار ونرمز له بالرمز $\bar{R}^2$، ونعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{e'e / n-K}{TSS / n-1} \quad / \; e'e = RSS$$

سؤال

ما هي العلاقة بين $\bar{R}^2$, R^2

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \frac{ESS}{TSS} \quad \text{--- } (1)$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \cdot \frac{n-1}{n-K} \quad \text{--- } (2)$$

من (1) نجد:

$$(1 - R^2) = \frac{RSS}{TSS}$$

وبالتعويض في (2) نجد:

$$\boxed{\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-K}}$$

مثال: نفس معطيات التمرين (1) من السلسلة رقم (2).

- أحسب معامل التحديد R^2، ومعامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$.

الحل:

- حساب R^2:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$RSS = e'e = 22,4372$$

$$TSS = y'y - n(\bar{y})^2$$

$$y'y = [12\ 11 \dots 7]\begin{bmatrix}12\\11\\ \vdots\\7\end{bmatrix} = 1046$$

لدينا: $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \Rightarrow \bar{y} = \frac{100}{10} = 10$

إذن:

$$TSS = y'y - n(\bar{y})^2$$
$$= 1046 - 10(10)^2$$
$$\boxed{TSS = 46}$$

ومنه:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$
$$= 1 - \frac{22,4372}{46} \boxed{= 0,5122}$$
$$\boxed{R^2 = 51,22}$$

التفسير:
المتغيرات المستقلة تفسر ما نسبته 51,22% من التغيرات الحاصلة في المتغير (y)، أما النسبة الباقية والمقدرة بـ (48,78%) تفسرها عوامل أخرى غير مدرجة في النموذج.

- حساب $\bar{R}^2$ (معامل التحديد المصحح)

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\cdot\frac{n-1}{n-k}$$
$$= 1 - (1 - 0,5122)\cdot\frac{10-1}{10-3}$$
$$\boxed{\bar{R}^2 = 0,3728} \Rightarrow \boxed{\bar{R}^2 = 37,28\%}$$

2-5: اختبار فرضيات نموذج الانحدار المتعدد:

أ- اختبار معنوية المعلمات أو (اختبار T):

- يستخدم اختبار T لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \dots X_k$ في المتغير التابع y في نموذج الانحدار المتعدد ويعتمد على نوعين من الفروض:

- تحديد الفرضيات

- فرضية العدم: $H_0: \hat{b}_k = b = 0$
- الفرضية البديلة: $H_1: \hat{b}_k \neq b \neq 0$

- حساب قيمة T:

بعد احتساب قيمة (T) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر. حيث:

$$T_{cal} = \frac{|\hat{b}_k - b|}{SD_{\hat{b}_i}} = \frac{|\hat{b}_k - 0|}{SD_{\hat{b}_i}}$$

أما: $T_{tab(n-k)}^{\alpha/2\%}$

- اتخاذ القرار:

- إذا كان: $T_{cal} > T_{tab}$ قبول H_1 ورفض H_0
- وإذا كانت: $T_{cal} < T_{tab}$ قبول H_0 ورفض H_1.

ب- اختبار المعنوية الكلية للنموذج. [اختبار فيشر].

يستخدم اختبار F (فيشر) لتقييم معنوية النموذج ككل (المتغيرات المستقلة مجتمعة). وهو يتبع الخطوات التالية:

- تحديد الفرضيات:

فرضية العدم: $H_0: \hat{b}_1 = \hat{b}_2 = \dots \hat{b}_k = 0$
الفرضية البديلة: $H_1: \hat{b}_1 \neq \hat{b}_2 \neq \dots \neq \hat{b}_k \neq 0$

- حساب قيمة F:

$$F_{cal} = \frac{R^2/(k-1)}{1-R^2/(n-k)} = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)}$$

- القيمة الجدولية:

$$F_{tab(k-1,\,n-k)}^{\alpha\%} = \dots$$

- القرار:

إذا كانت: $F_{cal} > F_{tab}$ فنقبل H_1 ورفض H_0. أي: النموذج مقبول.

- إذا كانت $F_{cal} < F_{tab}$ قبول H_0 ورفض H_1 أي: النموذج مرفوض.

مثال: لنفس معطيات التمرين (01) من السلسلة رقم (02):

1 - اختبر معنوية المعلمات المقدرة عند مستوى معنوية 5% .

2 - اختبر المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5% .

الحل:

1 - اختبار معنوية المعلمات المقدرة عند مستوى معنوية 5% [اختبار T]:

• تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : b_0 = 0 \\ H_1 : b_0 \neq 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} H_0 = b_1 = 0 \\ H_1 = b_1 \neq 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} H_0 = b_2 = 0 \\ H_1 = \hat{b}_2 \neq 0 \end{cases}$$

•• حساب القيمة الاحصائية لـ T.

••• القرار. } ملاحظة تمت في الجدول الموالي:

اتخاذ القرار	T الجدولية T_{Tab}	T المحسوبة (القيمة الاحصائية لـ T) T_{cal}	المعلمات المقدرة
$T_{cal} < T_{Tab}$ اذن قبول H_0 ورفض H_1	$T^{\alpha\%}_{Tab(n-k)}$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_0 - b_0}{SD_{\hat{b}_0}} = \frac{3,4598-0}{2,9997} = \boxed{1,153}$	$\hat{b}_0$
$T_{cal} > T_{Tab}$ <= قبول H_1 ورفض H_0.	$= T^{0,025}_{(10-3)}$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_1 - b_1}{SD_{\hat{b}_1}} = \frac{0,6203-0}{0,2285} = \boxed{2,7146}$	$\hat{b}_1$
$T_{cal} < T_{Tab}$ <= قبول H_1 ورفض H_0.	$= 2,365$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_2 - b_2}{SD_{\hat{b}_2}} = \frac{0,2658-0}{0,3522} = \boxed{0,7546}$	$\hat{b}_2$

2 - اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5% [اختبار F]:

• تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : b_0 = \hat{b}_1 = b_2 = 0 \\ H_1 = b_0 \neq \hat{b}_1 \neq b_2 \neq 0 \end{cases}$$

•• حساب القيمة الإحصائية لـ F:

$R^2 = 0,5122$

$1 - R^2 = 0,4878$

$n-k = 10-3 = 7$

$k = 3 \; , n = 10$

$$F_{cal} = \frac{R^2/(K-1)}{1-R^2/(n-K)} \quad \text{أو} \quad F_{cal} = \frac{ESS/(K-1)}{RSS/(n-K)}$$

$$F_{cal} = \frac{0,5122/(3-1)}{1-0,5122/(10-3)} = \frac{0,2561}{0,0696} \Rightarrow \boxed{F_{cal} = 3,6795}$$

$$F^{\alpha\%}_{Tab(K-1,\, n-K)} = F^{5\%}_{Tab((3-1),(10-3))} = F^{5\%}_{Tab(2,7)} = \boxed{4,737}$$

••• القرار: بما أن: $F_{cal} < F_{Tab}$ فإننا نرفض H_1 ونقبل H_0، أي المعلمات مجتمعة مع بعضها لا تؤثر في المتغير التابع، [بعبارة أخرى النموذج ككل غير معنوي أو غير مناسب].

حل التمرين (03) من السلسلة رقم (02)

- توضح المعادلة أدناه نموذجا خطيا لسلوك y التالي:

$$y_t = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \varepsilon_t \quad (1)$$

وبعد التقدير تم الحصول على النتائج المصفوفية التالية:

$y'y = 3{,}5$, $n = 50$

$$x'x = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} , \quad x'y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

1- تقدير y كدالة لكل من المتغيرات x_1, x_2, x_3 وفق المعادلة (1) ثم تقدير تفسير المعلمات المقدرة:

1-1- تقدير معلمات النموذج b_1, b_2, b_3:

نعلم أن: $\hat{b} = (x'x)^{-1} \cdot x'y$

1-1-1 حساب $(x'x)^{-1}$:

أ- حساب المحدد $|x'x|$:

$$(x'x) = \begin{bmatrix} +20 & -5 & +2 \\ -5 & +5 & -4 \\ +2 & -4 & +5 \end{bmatrix}$$

$$|x'x| = 20\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 20(9) - 5(17) + 2(10)$$

$$\boxed{|x'x| = 115} \neq 0$$

ب- لحساب المصفوفة المساعدة Adj:

$$Adj(x'x) = \begin{bmatrix} 9 & 17 & 10 \\ 17 & \begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ 10 & \begin{vmatrix} 20 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Adj(x'x) = \begin{bmatrix} +9 & -17 & +10 \\ -17 & +96 & -70 \\ +10 & -70 & +75 \end{bmatrix}$$

ج- حساب $(x'x)^{-1}$:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{|x'x|} Adj(x'x)$$

$$= \frac{1}{115}\begin{bmatrix} +9 & -17 & +10 \\ -17 & +96 & -70 \\ +10 & -70 & +75 \end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0782 & -0{,}1478 & 0{,}0869 \\ -0{,}1478 & 0{,}8347 & -0{,}6086 \\ 0{,}0869 & -0{,}6086 & 0{,}6521 \end{bmatrix}$$

1-1-2- حساب $\hat{b}$:

$$\hat{b} = (x'x)^{-1} \cdot x'y$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0{,}0782 & -0{,}1478 & 0{,}0869 \\ -0{,}1478 & 0{,}8347 & -0{,}6086 \\ 0{,}0869 & -0{,}6086 & 0{,}6521 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0{,}1824 \\ -0{,}6781 \\ 0{,}8694 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

إذن: الصيغة النهائية للدالة y هي:

$$y = 0{,}1824x_1 - 0{,}6781x_2 + 0{,}8694x_2$$

1-2-1- تفسير المعلمات المقدرة:

بالنسبة للمعلمة $\hat{b}$: ($\hat{b}_1 = 0{,}1824$) وهي تمثل معلمة الانحدار للمتغير x_1: هناك علاقة طردية بين x_1 و y وهي ما تدل عليه الإشارة الموجبة ($+0{,}1824$)، وهو ما يعني أن كل زيادة في المتغير x_1 بوحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة في y بـ $0{,}1824$ وحدة مع ثبات باقي المتغيرات.

($\hat{b}_2 = -0{,}6781$) وهي تمثل معلمة الانحدار للمتغير x_2: هناك علاقة عكسية بين x_2 و y وهي ما تدل عليه الإشارة السالبة ($-0{,}6781$)،

وهو ما يعني أن عند زيادة X_2 بوحدة واحدة سيؤدي تراجع (انخفاض) المتغير y ب (0,6781) وحدة مع ثبات باقي المتغيرات.

و ($\hat{b}_3 = 0,8694$) نلاحظ أن معامل المتغير X_3 إشارته موجبة، مما يدل على وجود علاقة طردية بين X_3 و y، حيث عند زيادة X_3 بوحدة واحدة سيؤدي إلى زيادة y ب 0,8694 وحدة مع ثبات باقي المتغيرات.

2- إيجاد قيمة تباين الأخطاء σ^2_ε وكذا الانحراف المعياري لحدود الأخطاء:

2-1- إيجاد قيمة تباين الأخطاء σ^2_ε:

نعلم أن:

$$\sigma^2_\varepsilon = \frac{e'e}{n-k} = \frac{RSS}{n-k}$$

ونعلم أن:

$$e'e = RSS = y'y - \hat{b}'.x'y$$

$$RSS = 3,5 - \begin{bmatrix} 0,1824 & -0,6781 & 0,8694 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3,5 - 1,4255$$

$$\boxed{RSS = 2,0745}$$

إذن:

$$\sigma^2_\varepsilon = \frac{RSS}{n-k} = \frac{2,0745}{50-3}$$

$$\boxed{\sigma^2_\varepsilon = 0,0441}$$

2-2- الانحراف المعياري لـ ε:

$$SD_\varepsilon = \sigma_\varepsilon = \sqrt{\sigma^2_\varepsilon} = \sqrt{0,0441}$$

$$\boxed{\sigma_\varepsilon = 0,2100}$$

3- إيجاد تباينات معلمات النموذج $\sigma^2_{\hat{b}_1}$، $\sigma^2_{\hat{b}_2}$، $\sigma^2_{\hat{b}_3}$ ثم الانحرافات المعيارية لكل منها.

3-1- إيجاد تباين $\hat{b}_1$، $\hat{b}_2$، $\hat{b}_3$.

نعلم أن:

$$V(\hat{b}) = \sigma^2(\hat{b}) = (X'X)^{-1} . \sigma^2_\varepsilon$$

$$= \sigma^2_\varepsilon . (X'X)^{-1}$$

$$\sigma^2(\hat{b}) = \begin{cases} \sigma^2_{\hat{b}_1} \\ \sigma^2_{\hat{b}_2} \\ \sigma^2_{\hat{b}_3} \end{cases} = \frac{RSS}{n-k} . (X'X)^{-1}$$ قطر المصفوفة

وعليه: تباين $\hat{b}_1$:

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = 0,0441 . 0,0782$$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{b}_1} = 0,0034}$$

أما الانحراف المعياري لـ $\hat{b}_1$:

$$SD_{\hat{b}_1} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{b}_1}} = \sqrt{0,0034} = \boxed{0,0587}$$

تباين $\hat{b}_2$:

$$\sigma^2_{\hat{b}_2} = 0,0441 . 0,8347$$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{b}_2} = 0,0368}$$

أما الانحراف المعياري لـ $\hat{b}_2$ هو:

$$SD_{\hat{b}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{b}_2}} = \sqrt{0,0368} = \boxed{0,1918}$$

تباين $\hat{b}_3$:

$$\sigma^2_{\hat{b}_3} = 0,0441 . 0,6521$$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{b}_3} = 0,0287}$$

أما الانحراف المعياري لـ $\hat{b}_3$ هو:

$$SD_{\hat{b}_3} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{b}_3}} = \sqrt{0,0287} = \boxed{0,1695}$$

4- اختبار المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج فرديا عند مستوى معنوية 5%.

- تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: b_1 = 0 \\ H_1: b_1 \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} H_0: b_2 = 0 \\ H_1: b_2 \neq 0 \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} H_0: b_3 = 0 \\ H_1: b_3 = 0 \end{cases}$$

- حساب القيمة الإحصائية لـ T ثم اتخاذ القرار: ملخصة في الجدول الموالي:

المعلمات المقدرة	القيمة الإحصائية لـ T [T المحسوبة] T_{cal}	T المجدولة T_{tab}	اتخاذ القرار
$\hat{b}_1$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_1 - b}{SD_{\hat{b}_1}} = \frac{0,1824-0}{0,0587} = \boxed{3,1073}$	$T_{tab(n-k)}$	$T_{cal} > T_{tab}$ ⟸ قبول H_1 ورفض H_0 [X_1 له تأثير معنوي على y]
$\hat{b}_2$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_2 - b}{SD_{\hat{b}_2}} = \frac{-0,6781-0}{0,1918} = -3,535$; $\lvert T_{cal}\rvert = \boxed{+3,535}$	$= T_{Tab(50-3)}$	$T_{cal} > T_{tab}$ ⟸ قبول H_1 ورفض H_0 [X_2 له تأثير معنوي على y]
$\hat{b}_3$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_3 - b}{SD_{\hat{b}_3}} = \frac{0,8694-0}{0,1695} = \boxed{5,129}$	$= 2,0126$	$T_{cal} > T_{tab}$ ⟸ قبول H_1 ورفض H_0 [X_3 له تأثير معنوي على y]

- كيفية استخراج قيمة T_{tab} عند درجة الحرية $T_{\alpha/2 = 5\%/2 = 0,025}$ أي البحث عن:

$n - K = 50 - 3$

$n - K = 47$.

$T_{Tab(n-K)} = (50-3) = (47)$

من جدول T وعند مستوى معنوية 0,025.

$$\text{الفرق}\begin{cases} n = 40 \longrightarrow T = 2,021 \\ n = 50 \longrightarrow T = 2,009 \end{cases} \downarrow - \text{(القيمة متناقصة)}$$

$10 \longrightarrow 0,012$

$7 \longrightarrow X = ?$ $\Rightarrow X = \frac{0,012 \times 7}{10} = \boxed{0,0084}$

$n = 47 \longrightarrow T_{(47)} = T_{(40)} - T_{(7)}$

$T_{(47)} = 2,021 - 0,0084 = \boxed{2,0126}$

5- إيجاد قيمة معامل التحديد R^2 ومعامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

5-1: إيجاد R^2: نعلم أن:

$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$ أو $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$ / $RSS = 2,0745$; $TSS = 3,49$

$R^2 = 1 - \frac{2,0745}{3,49} \Rightarrow \boxed{R^2 = 0,4055}$

$\boxed{R^2 = 40,55\%}$

5-2: إيجاد $\bar{R}^2$: نعلم أن:

$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-k}$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{(n-1)}{(n-K)}$$

$R^2 = 0,4055$; $n = 50$, $K = 3$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0,4055) \cdot \frac{(50-1)}{(50-3)} \Rightarrow \boxed{\bar{R}^2 = 0,3802}$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = 38,02\%}$$

6- إيجاد قيمة إحصائية فيشر F :

$$F_{cal} = \frac{R^2/(K-1)}{1-R^2/(n-K)} \quad \text{أو} \quad F_{cal} = \frac{ESS/(K-1)}{RSS/(n-K)}$$

$$F_{cal} = \frac{0,4055/(3-1)}{0,5945/(50-3)} \Rightarrow F_{cal} = \frac{0,20275}{0,0126} \Rightarrow \boxed{F_{cal} = 16,091}$$

الاستنتاج :

عند المقارنة بين القيمة المحسوبة لـ F (F_{cal}) والقيمة المجدولة أي (F_{tab}) : نلاحظ أن : $F_{cal} > F_{tab}$ وهو ما يعني أن النموذج ككل ذو دلالة احصائية عند مستوى معنوية 5% [النموذج مقبول] .

6- جدول تحليل التباين ANOVA الإنحدار الخطي المتعدد:

يلخص جدول تحليل التباين ANOVA معادلة تحليل التباين، أي: المعادلة التالية:

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2=\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2+\Sigma(y_i-\hat{y})^2$$
$$TSS = ESS + RSS$$

- ومن خلال معطيات المعادلة أعلاه يمكننا إستخراج وتحديد معامل التحديد (R^2)، وكذا إختبار معنوية النموذج المقدر عند مستوى معنوية ما، من أجل الحكم على قبول النموذج المقدر إحصائياً، وذلك من إختبار فيشر (F)، حيث يكون الجدول على النحو التالي:

* جدول تحليل التباين للإنحدار الخطي المتعدد:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	إحصائية F
الانحدار	$ESS=\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2$ $ESS=\hat{b}'.X'y-n(\bar{y})^2$	$K-1$	$ESS/K-1$	$F=\dfrac{ESS/K-1}{RSS/n-K}$
البواقي	$RSS=\Sigma(y_i-\hat{y})^2$ $RSS=y'y-\hat{b}'.X'y$	$n-K$	$RSS/n-K$	
المجموع	$TSS=\Sigma(y_i-\bar{y})^2$ $TSS=y'y-n(\bar{y})^2$	$n-1$	/	

حيث: K عدد معالم النموذج، n = حجم العينة (عدد المشاهدات).

* بعد حساب إحصائية F_{cal} $\left[F_{cal}=\dfrac{ESS/K-1}{RSS/n-K}\right]$ نقوم بمقارنتها مع قيمة فيشر الجدولية لـ ($n-K$) درجات حرية. عند مستوى معنوية ($\alpha\%$)، حيث يتم القرار على النحو التالي:

* إذا كانت: $F_{cal}<F_{tab}$: نقبل فرضية العدم (H_0) وهو ما يعني أن النموذج ككل غير معنوية، أو بعبارة أخرى عدم جودة النموذج المقدر عند مستوى معنوية ($\alpha\%$).

* إذا كانت $F_{cal}>F_{tab}$: نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) وهو ما يعني أن النموذج ككل له معنوية إحصائية، أو بعبارة أخرى أن النموذج المقدر ذو جودة عند مستوى معنوية $\alpha\%$.

مثال: لتكن لديك المعطيات التالية: $y = 11,4794 + 0,8916X_1 - 0,3018X_2$

$RSS = 23,9648$, $TSS = 76,1$, $n = 10$

المطلوب: * كوّن جدول تحليل التباين ANOVA.

الحل:

1- تكوين جدول تحليل التباين ANOVA:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات	إحصائية فيشر F
الانحدار	$ESS = 52,1352$	$K-1$ $3-1=2$	$\frac{ESS}{K-1} = 26,0676$	$F = \frac{ESS/K-1}{RSS/n-K}$
البواقي	$RSS = 23,9648$	$n-K$ $10-3=7$	$\frac{RSS}{n-K} = 3,4235$	$F = \frac{26,0676}{3,4235}$
المجموع	$TSS = 76,1$	$n-1$ $10-1=9$	/	$F = 7,6143$

* حساب مجموع المربعات المفسرة ESS:

نعلم أن: $TSS = ESS + RSS \Rightarrow ESS = TSS - RSS$

$$\Rightarrow ESS = 76,1 - 23,9648$$

$$\boxed{ESS = 52,1352}$$

7- مجال الثقة لمعالم النموذج: [بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج]:

والمقصود به تكوين مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية معين، حيث احتمال أن تنتمي معلمة النموذج إلى مجال الثقة يساوي الواحد مطروحا منه مستوى المعنوية، ويمكن تحديد مجالات الثقة لمعلمات النموذج كالتالي:

- لدينا كثافة الاحتمال التالية:

$$Pr = \left[-T_{(n-k)}^{\alpha/2} \leq \frac{\hat{b}_i - b}{SD_{\hat{b}_i}} \leq T_{(n-k)}^{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

وبعد تبسيط المتراجحة: [بعد ضربها في $SD_{\hat{b}_i}$، ثم طرح $\hat{b}_i$ ثم ضرب (1-)]

نجد:

$$\hat{b}_i - SD_{\hat{b}_i} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2} \leq b \leq \hat{b}_i + SD_{\hat{b}_i} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2}$$

وبالتالي يكون مجال الثقة كالتالي:

$$b_i \in \left[\hat{b}_i \pm SD_{\hat{b}_i} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2} \right], \forall i = 0, 1, \dots K$$

ملاحظة: كلما كان مجال الثقة ضيقا (صغيرا) كلما كان المقدر أحسن نظرا لصغر الانحراف المعياري لكل مقدرة.

مثال: لتكن لديك المعطيات التالية:

$$y = 0,1824X_1 - 0,6781X_2 + 0,8694X_3$$
$$SD: \quad (0,0587) \qquad (0,1918) \qquad (0,1695)$$
$$T_{47}^{\alpha/2} = 2,0126$$

المطلوب: - أوجد مجال الثقة للمعلمات b_1، b_2، b_3 عند مستوى ثقة 95%.

الحل:

نعلم أن: $b_i \in [\hat{b}_i \pm SD_{\hat{b}_i} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2}], \forall i = 0, 1, 2 \ldots k.$

أي: $b_i \in [\hat{b}_i - SD_{\hat{b}_i} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2} , \hat{b}_i + SD_{\hat{b}_i} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2}]$

1 - تحديد مجال الثقة بالنسبة لـ b_1:

$$b_1 \in [\hat{b}_1 \pm SD_{\hat{b}_1} \cdot T_{(47)}^{\alpha/2}] \Leftrightarrow b_1 \in [0,1824 \pm 0,0587 \cdot 2,0126]$$

أي:

$$b_1 \in [0,1824 - 0,0587 \cdot 2,0126 , 0,1824 + 0,0587 \cdot 2,0126]$$
$$b_1 \in [0,1824 - 0,1181 , 0,1824 + 0,1181]$$
$$b_1 \in [0,0643 , 0,3009] \Leftrightarrow \boxed{0,064 < b_1 < 0,3007}$$

* التفسير: احتمال ثقة 95% أن تقع المعلمة الحقيقية b_1 بين أدنى قيمة وهي (0,064) و أقصى قيمة وهي (0,3007)، وباحتمال 5% أن تقع القيمة الحقيقية b_1 خارج هذا المجال.

2 - تحديد مجال الثقة بالنسبة لـ b_2:

$$b_2 \in [\hat{b}_2 \pm SD_{\hat{b}_2} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2}]$$
$$b_2 \in [-0,6781 \pm 0,1918 \cdot 2,0126]$$
$$b_2 \in [-0,6781 \pm 0,3860] \Leftrightarrow b_2 \in [-1,0641 , -0,292]$$

* التفسير: إحتمال ثقة 95% أن تقع القيمة الحقيقية b_2 بين أدنى قيمة (-1,0641) وأقصى قيمة (-0,292)، وباحتمال 5% أن تقع b_2 خارج هذا المجال.

3 - تحديد مجال الثقة بالنسبة لـ b_3:

$$b_3 \in [\hat{b}_3 \pm SD_{\hat{b}_3} \cdot T_{(n-k)}^{\alpha/2}]$$
$$b_3 \in [0,8694 \pm 0,1695 \cdot 2,0126] \Leftrightarrow b_3 \in [0,5283 , 1,2105]$$

* التفسير: احتمال 95% أن تقع b_3 بين أدنى قيمة (0,5283) وأقصى قيمة (1,2105)، وباحتمال 5% أن تقع b_3 خارج هذا المجال.

حل التمرين الرابع من السلسلة رقم (02):

لدينا نموذج خطي متعدد يحتوي على ثابت ومتغيرين مستقلين حيث:

$$y_t = b_0 - b_1 x_1 + b_2 x_2 + e_t$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 & 0 \\ \cdots & 0,1428 & -0,0607 \\ \cdots & \cdots & 0,1046 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ \cdots & 9,3 & 5,4 \\ \cdots & \cdots & 12,7 \end{bmatrix}$$

$$y_t = -1,11 + 0,61 X_1 + 0,46 X_2$$

$RSS = 0,3$, $y'y = 73,48$, $\bar{y} = -1,6$

1- تحديد حجم العينة n:

من المصفوفة $(X'X)$ حجم العينة $n = 25$

2- تحديد العلاقة الرياضية بين R^2 و $\bar{R}^2$

في حالة عدد معلمات النموذج $k=1$:

نعلم أن:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-k}$$

إذا كانت $k = 1$ فإن:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-1}}$$

$$\bar{R}^2 = \cancel{1} - (\cancel{1} - R^2)$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = R^2}$$

3- تكملة المعطيات الناقصة في المصفوفتين $(X'X)$ و $(X'X)^{-1}$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1428 & -0,0607 \\ 0 & -0,0607 & 0,1046 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9,3 & 5,4 \\ 0 & 5,4 & 12,7 \end{bmatrix}$$

4- إيجاد قيم ESS و TSS:

4-1- إيجاد قيمة TSS

نعلم أن:
$$TSS = y'y - n(\bar{y})^2$$
$$= 73,48 - 25(-1,6)^2$$

$$\boxed{TSS = 9,48}$$

4-2- إيجاد قيمة ESS:

نعلم أن: $TSS = ESS + RSS$

$$\Rightarrow ESS = TSS - RSS$$

$$ESS = 9,48 - 0,3 = \boxed{ESS = 9,18}$$

5- إيجاد قيم تباينات معلمات النموذج

$$Var(\hat{b}) \begin{cases} \to V(\hat{b}_0) \\ \to V(\hat{b}_1) \\ \to V(\hat{b}_2) \end{cases}$$

نعلم أن:
$$Var(\hat{b}) = \hat{\sigma}^2_{e_t} \cdot (X'X)^{-1}$$
$$Var(\hat{b}) = \frac{RSS}{n-k} \cdot (X'X)^{-1}$$ / $\hat{\sigma}^2_e = ?$

* إيجاد $\hat{\sigma}^2_e$:

$$\hat{\sigma}^2_e = \frac{RSS}{n-k} \Rightarrow \hat{\sigma}^2_e = \frac{0,3}{25-3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_e = 0,0136}$$

5-1- إيجاد $Var(\hat{b}_0)$:

$$Var(\hat{b}_0) = \hat{\sigma}^2_e \cdot (X'X)^{-1}$$
$$= 0,0136 \cdot (0,04) = \boxed{0,00054}$$

5-2- إيجاد $Var(\hat{b}_1)$:

$$Var(\hat{b}_1) = \hat{\sigma}^2_e \cdot (X'X)^{-1}$$
$$= 0,0136 \cdot 0,1427 = \boxed{0,0019}$$

5-3- إيجاد $Var(\hat{b}_2)$:

$$Var(\hat{b}_2) = \hat{\sigma}^2_{e_t} \cdot (X'X)^{-1}$$
$$= 0,0136 \cdot 0,1046 = \boxed{0,0014}$$

6- دراسة صلاحية النموذج: دراسة جزئية وكلية عند مستوى معنوية 5%

6-1- دراسة صلاحية النموذج دراسة جزئية: [اختبار T].

* حساب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة:

$SD_{\hat{b}_0} = \sqrt{Var(\hat{b}_0)} = \sqrt{0,00054} = 0,0232$ | $SD_{\hat{b}_1} = \sqrt{0,0019} = 0,0435$ | $SD_{\hat{b}_2} = \sqrt{0,0014} = 0,0374$

المعلمات	الفرضيات	إحصائية T المحسوبة T_{cal}	T الجدولية T_{Tab}	القرار
$\hat{b}_0$	$\begin{cases} H_0: b_0 = 0 \\ H_1: b_0 \neq 0 \end{cases}$	$T_{cal} = \frac{\hat{b}_0 - b}{SD_{\hat{b}_0}} = \frac{-1,61-0}{0,0232} = -69,39$ $\lvert T_{cal} \rvert = 69,39$	$T^{\alpha/2}_{Tab(n-k)}$	$T_{cal} > T_{Tab}$: قبول H_1 ورفض H_0، وهو ما يعني أن $\hat{b}_0$ تختلف عن 0 ($\hat{b}_0$ معنوية عند مستوى 5%)
$\hat{b}_1$	$\begin{cases} H_0: b_1 = 0 \\ H_1: b_1 \neq 0 \end{cases}$	$T_{cal} = \frac{0,61-0}{0,0435}$ $T_{cal} = 14,02$	$T^{5\%/2}_{Tab(25-3)} = 2,074$	$T_{cal} > T_{Tab}$: قبول H_1 ورفض H_0، أي أن المعلمة b_1 تختلف عن 0 (أي b_1 معنوية = X_1 تؤثر في Y)
$\hat{b}_2$	$\begin{cases} H_0: b_2 = 0 \\ H_1: b_2 \neq 0 \end{cases}$	$T_{cal} = \frac{0,46-0}{0,0374}$ $T_{cal} = 12,29$		$T_{cal} > T_{Tab}$: قبول H_1 ورفض H_0، أي أن المعلمة b_2 تختلف عن 0 (أي X_2 تؤثر في Y).

6-2- دراسة صلاحية النموذج دراسة كلية: [معامل التحديد + اختبار F].

أ* حساب معامل التحديد R^2: نعلم أن: $R^2 = \frac{ESS}{TSS} \Leftrightarrow R^2 = \frac{9,18}{9,48}$

$\Leftrightarrow \boxed{R^2 = 0,9683}$ أي $\boxed{R^2 = 96,83\%}$

التفسير: المتغيرات المستقلة (X_1، X_2) والحد الثابت) تفسر ما نسبته 96,83% من التغيرات الحاصلة في المتغير التابع (Y)، أما النسبة الباقية والمقدرة بـ 3,17% تفسرها متغيرات أخرى غير مدرجة في النموذج.

ب- اختبار فيشر (F):

* تحديد الفرضيات: $\begin{cases} H_0: b_0 = b_1 = b_2 = 0 \\ H_1: b_0 \neq b_1 \neq b_2 \neq 0 \end{cases}$

* حساب F_{cal}: نعلم أن: $F_{cal} = \frac{R^2/(K-1)}{1-R^2/n-K}$

$F_{cal} = \frac{0,9683/2}{0,0317/22} = \boxed{336,003}$ ، $F^{\alpha}_{Tab\,(K-1=2)\,(n-K)=22} = 4,30$

* * * القرار:

بما أن: $F_{cal} > F_{Tab}$ فإننا نقبل H_1 ونرفض H_0، وهو ما يعني أن النموذج ككل له دلالة إحصائية (مقبول) (معنوي) عند مستوى معنوية 5%.

حل التمارين الثالث من مسابقة الدكتوراه LMD لجامعة الوادي.

شعبة علوم اقتصادية - تخصص اقتصاد كمي - 2021 - 2022 -

لدينا النموذج التالي:

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

علما أن:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ & 5 & 2 \\ & & 4 \end{pmatrix} \quad . \; Tc_{a_0} = 15,03 \; , \; Tc_{a_1} = 11,34$$

$$Tc_{a_2} = 4,59$$

* جدول تحليل التباين ANOVA:

المربعات المتوسطة.	درجة الحرية	مجموع المربعات	مصدر التباين
$\frac{ESS}{K-1}$ 50,06 ? e	$K-1$ 2 ? c	a = ? ESS 100,12	المتغيرات المستقلة
$\frac{RSS}{n-K}$ 0,19	52 ? $n-K$ d	b = ? RSS 9,88	البواقي
/	$n-1$ 54	TSS 110	المجموع.

المطلوب:

1 - تكملة جدول تحليل التباين:

1 - 1 - إيجاد c: حيث: $c = K - 1$

وفق معادلة النموذج المعطاة نتبين أن عدد معالم النموذج: $K = 3$.

وعليه فإن: $C = K - 1 \Leftrightarrow C = 3 - 1 \Rightarrow \boxed{C = 2}$

1 - 2 - إيجاد d: لدينا: $n - 1 = 54 \Rightarrow \boxed{n = 55}$

إيجاد d: حيث: $d = n - K$

نعلم أن: $n = 55 \, / \, K = 3$

وعليه فإن: $d = n - K \Leftrightarrow d = 55 - 3 \Rightarrow \boxed{d = 52}$

1 - 3 - إيجاد b: حيث نعلم أن: $b = RSS$

لدينا:

$$\frac{RSS}{n-K} = 0,19 \Rightarrow RSS = (n-K) \cdot 0,19$$

$$RSS = (55-3) \cdot 0,19$$

$$RSS = 52 \cdot 0,19 \Rightarrow \boxed{RSS = 9,88}$$

1-4- إيجاد a حيث: $a = ESS$

نعلم أن:

$$TSS = ESS + RSS$$

$$\Rightarrow ESS = TSS - RSS$$

$$ESS = 110 - 9,88$$

$$\boxed{ESS = 100,12}$$

1-5- إيجاد e حيث: $e = \frac{ESS}{K-1}$

$$e = \frac{110,12}{3-1} \Rightarrow \boxed{e = 50,06}$$

2- إيجاد المعالم المقدرة للنموذج:

نعلم أن: $T_{cal} = \frac{\hat{a}_i}{SD_{\hat{a}_i}}$

$$\Rightarrow \hat{a}_i = T_c \cdot SD_{\hat{a}_i} \quad / \; SD_{\hat{a}_i} ?$$

2-1- إيجاد تباين المعالم المقدرة:

نعلم أن: $Var(\hat{a}_i) = \sigma^2_{e_i} \cdot (X'X)^{-1}$

$$/ \; \sigma^2_{e_i} = ?$$

* إيجاد تباين الخطأ $\sigma^2_{e_i}$:

نعلم أن: $\sigma^2_{e_i} = \frac{RSS}{n-k}$

$$\sigma^2_{e_i} = 0,19$$

إذن:

* تباين $\hat{a}_0$:

$$Var(\hat{a}_0) = \sigma^2_{e_i} (X'X)^{-1} = 0,19 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{Var(\hat{a}) = 1,14}$$

أما الانحراف المعياري لـ $\hat{a}_0$:

$$SD_{\hat{a}_0} = \sqrt{Var(\hat{a}_0)} = \sqrt{1,14}$$

$$\boxed{SD_{\hat{a}_0} = 1,0677}$$

* تباين $\hat{a}_1$:

$$Var(\hat{a}_1) = \sigma^2_{e_i} \cdot (X'X)^{-1} = 0,19 \cdot (5)$$

$$\boxed{= 0,95}$$

- أما الانحراف المعياري لـ $\hat{a}_1$:

$$SD_{\hat{a}_1} = \sqrt{Var(\hat{a}_1)} = \sqrt{0,95}$$

$$\boxed{SD_{\hat{a}_1} = 0,9746}$$

* تباين $\hat{a}_2$:

$$Var(\hat{a}_2) = \sigma^2_{e_i} \cdot (X'X)^{-1} = 0,19 \cdot 4$$

$$\boxed{Var(\hat{a}_2) = 0,76}$$

- أما الانحراف المعياري لـ $\hat{a}_2$:

$$SD_{\hat{a}_2} = \sqrt{Var(\hat{a}_2)} = \sqrt{0,76}$$

$$\boxed{SD_{\hat{a}_2} = 0,8717}$$

وعليه فإن معالم يمكن حسابها كالتالي:

نعلم أن: $T_c = \frac{\hat{a}_i}{SD_{\hat{a}_i}}$

$$\Rightarrow \hat{a}_i = T_c \cdot SD_{\hat{a}_i}$$

* حساب المعلمة $\hat{a}_0$:

$$\hat{a}_0 = T_{c_{\hat{a}_0}} \cdot SD_{\hat{a}_0} = 15,03 \cdot 1,0677$$

$$\boxed{\hat{a}_0 = 16,0475}$$

* حساب المعلمة $\hat{a}_1$:

$$\hat{a}_1 = T_{c_{\hat{a}_1}} \cdot SD_{\hat{a}_1} = 11,34 \cdot 0,9746$$

$$\boxed{\hat{a}_1 = 11,0519}$$

* حساب المعلمة $\hat{a}_2$:

$$\hat{a}_2 = T_{c_{\hat{a}_2}} \cdot SD_{\hat{a}_2} = 4,59 \cdot 0,8717$$

$$\boxed{\hat{a}_2 = 4,0011}$$

أشارت معطيات التمرين على أن $\hat{a}_2$ بإشارة سالبة وعليه فإن

$$\boxed{\hat{a}_2 = -4{,}0011}$$

وعليه فإن الشكل النهائي للنموذج هو :

$$y = 16{,}0475 + 11{,}0519 X_1 - 4{,}0011 X_2$$

3 - حساب قيمة معامل التحديد R^2 :

نعلم أن : $R^2 = \frac{ESS}{TSS}$ ، $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{100{,}12}{110} \Rightarrow \boxed{R^2 = 0{,}9101}$$

أي :

$$\boxed{R^2 = 91{,}01\%}$$

4 - حساب قيمة معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

نعلم أن :

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-k}$$

حيث :

$n = 55$, $K = 3$, $R^2 = 0{,}9101$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0{,}9101) \cdot \frac{55-1}{55-3}$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = 0{,}9066} \quad \boxed{\bar{R}^2 = 90{,}66}\%$$

التفسير : نلاحظ أن المتغيرات المستقلة تفسر ما نسبته (90,66%) من التغيرات الحاصلة في المتغير التابع أما النسبة الباقية والمقدرة بـ 0,0934 (9,34%) تفسرها متغيرات أخرى غير مدرجة في النموذج. [القدرة التفسيرية للنموذج عالية $\bar{R}^2 = 90{,}66$]

5 - اختبار المعنوية الإحصائية لمعالم النموذج عند مستوى معنوية 5% .

5 - 1 : بالنسبة للمعلمة $\hat{a}_0$ والمعلمة $\hat{a}_1$ و المعلمة $\hat{a}_2$:

* تحديد الفرضيات :

$$\begin{cases} H_0 : a_2 = 0 \\ H_1 : a_2 \neq 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} H_0 : a_1 = 0 \\ H_1 : a_1 \neq 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} H_0 : a_0 = 0 \\ H_1 : a_0 \neq 0 \end{cases}$$

المعلمات	T المحسوبة T_{cal}	T الجدولية T_{tab}	القرار
$\hat{a}_0$	$Tc_{a_0} = 15{,}03$	$T_{tab(55-3)}^{\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{2} = 0{,}025}$ $T_{tab(52)}^{0{,}025} = 2{,}0072$	بما أن : $T_{cal} > T_{tab}$ فإننا نقبل H_1 الفرضية البديلة ونرفض H_0 (فرضية العدم) وهو ما يعني أن المعلمة a_0 تختلف عن الصفر عند $\alpha = 5\%$
$\hat{a}_1$	$Tc_{a_1} = 11{,}34$		بما أن $T_{cal} > T_{tab}$ فإننا نقبل H_1 الفرضية البديلة . ونرفض H_0 (فرضية العدم) وهو ما يعني أن a_1 تختلف عن الصفر
$\hat{a}_2$	$Tc_{a_2} = 4{,}59$		بما أن : $T_{cal} > T_{tab}$ فإننا نقبل H_1 ونرفض H_0 ، وهو ما يعني أن المعلمة a_2 تختلف عن الصفر عند م م 5%

كيفية حساب T_{tab}

لدينا من جدول T :

$$T_{50} = 2{,}009$$
$$T_{60} = 2{,}000$$

الفرق بينهما ($-$)

الفرق بينهما

$10 \longrightarrow 0{,}009$

المطلوب : إيجاد T_{52} :

الفرق بين
$n = 50$
$n' = 52$
$\Rightarrow 2 \longrightarrow X\ ?$

$$\Rightarrow X = \frac{2 \times 0{,}009}{10} = 0{,}0018$$

إذن :

$$T_{52} = T_{50} - T_2$$
$$= 2{,}009 - 0{,}0018 \Rightarrow \boxed{T_{52} = 2{,}0072}$$

6 - اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5% حيث: $F_{cal} = 3,18$

- تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : a_0 = a_1 = a_2 = 0 \\ H_1 : a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq 0 \end{cases}$$

- حساب F_{cal}:

نعلم أن: $F_{cal} = \dfrac{ESS / K-1}{RSS / n-K} \Leftrightarrow F_{cal} = \dfrac{50,06}{0,19} = 263,47$

- القرار: بما أن: $F_{cal}(263,47) > F_{tab}(3,18)$ فإننا نقبل H_1 (الفرضية البديلة) ونرفض فرضية العدم (H_0)، وهو ما يعني أن النموذج ككل له دلالة إحصائية عند مستوى معنوية 5% (النموذج المقدر مقبول احصائياً عند $\alpha = 5\%$)

المحور الثالث : المشاكل القياسية للانحدار
- اختراق فرضيات النموذج -

أولا :- مشكلة التعدد الخطي.

ثانيا :- مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء.

ثالثا :- مشكلة عدم ثبات التباين (عدم التجانس).

أولاً: مشكلة التعدد الخطي:

1- تعريف (طبيعة) مشكلة التعدد الخطي: يقصد بالتعدد الخطي إلى وجود علاقة خطية تامة بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة المتضمنة في النموذج الانحدار المراد دراسته لـ K من متغيرات الانحدار المتضمنة في النموذج ($X_1, X_2, \ldots, X_K$)، فإذا كانت هذه العلاقة الخطية تامة، أي: $r_{X_1X_2} = 1$ معنى ذلك أن معامل الارتباط يساوي واحد. ففي هذه الحالة لا يمكن فصل أثر X_1 و X_2 عن بعضها البعض.

- إن وجود ارتباط تام أو قوي بين المتغيرات المستقلة يتنافى مع أحد الافتراضات التي يستند عليها نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفق طريقة المربعات الصغرى العادية، وهو افتراض عدم وجود ارتباط بين المتغيرات المستقلة أي عدم وجود علاقة خطية محددة بين قيم مشاهدات المتغيرات المستقلة.

2- أنواع التعدد الخطي:

إن مشكلة التعدد الخطي التي تواجه النماذج الخطية المتعددة قد تأخذ أحد النوعين التاليين:

أ-1: التعدد (الارتباط) الخطي التام: ويتحقق هذا النوع من الارتباط عندما يكون محدد المصفوفة $(X'X)$ يساوي الصفر، أي: $Det|X'X| = 0$ وبالتالي لا يمكن حساب معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ وتسمى في هذه الحالة بالمصفوفة الشاذة، وبالتالي لا يمكن تقدير مقدرات النموذج.

مثال: ليكن لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + \varepsilon_t \quad \ldots\ldots (1)$$

حيث:

X_1	1	2	3	4	5	6
X_2	2	4	6	8	10	12

نلاحظ أن: $X_2 = 2X_1$، وبالتالي فإن المعادلة (1) تحتوي على متغيرين تفسيريين مستقلين X_1، X_2، إلا أن المعلومات توضح أن المتغير X_2 ليس مستقلاً عن المتغير X_1 لأن X_2 دالة خطية في X_1، وفي هذه الحالة نقول أن المتغيرين X_1 و X_2 هما مرتبطان خطياً، وهذا يعني وجود ارتباط خطي تام بينهما.

2-2- التعدد الخطي الغير التام: والمقصود به وجود علاقة ارتباط بين المتغيرات المستقلة بدرجات متفاوتة، وفي هذه الحالة يمكننا ايجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ أي $(X'X)^{-1}$ طالما أن محددها غير معدوم ($Det|X'X| \neq 0$)

مثال: ليكن لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 X_{2t} + \varepsilon_t \quad \text{---- (2)}$$

حيث:

X_1	2	3	4	5	6	7
X_2	3	4	5	6	7	8

نلاحظ أن: $X_2 = X_1 + 1$ وهو ما يعني أن المتغيرين X_1 و X_2 بينهما ارتباط خطي غير تام، وبالتالي تصبح المعادلة (2) وفق الصياغة التالية

$$y_t = b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 (X_{1t} + 1) + \varepsilon_t$$

- وعليه يمكن ايجاد $(X'X)^{-1}$ لأن $Det|X'X| \neq 0$ وللتأكيد من وجود ارتباط خطي غير تام بين المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 لابد من اجراء إختبارات الكشف عن هذه المشكلة:

3- أسباب مشكلة التعدد الخطي:

من أهم الأسباب التي تؤدي إلى نشوء مشكلة التعدد الخطي نذكر ما يلي:

- اتجاه بعض المتغيرات الاقتصادية (المستقلة) سوياً مع مرور الزمن، فعلى سبيل المثال: المتغيرات الاقتصادية كالدخل والاستثمار والاستهلاك تزداد بوقت واحد في فترة الازدهار الاقتصادي، وتنخفض أو تتراجع في وقت واحد في فترة الكساد. لذلك فعند استخدام هذه المتغيرات كمتغيرات تفسيرية في النموذج ستبرز مشكلة التعدد الخطي.

- إدراج متغيرات ذات ابطاء زمني كمتغيرات مستقلة في النموذج الخطي المتعدد فمثلاً: عند استخدام الدخل الحالي ودخل الفترة السابقة كمتغيرات مستقلة في النموذج سيؤدي الى ظهور مشكلة التعدد الخطي.

$$y_t = b_0 + b_1 X_t + b_2 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث: X_t = الدخل في الفترة الحالية،

X_{t-1}: الدخل في الفترة السابقة.

4- الآثار (النتائج) المترتبة على وجود مشكلة التعدد الخطي:

- محدد المصفوفة $(X'X)$ صغير نسبيًا ويكون قريب من الصفر، وينعكس ذلك على عناصر معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$، حيث يأخذ قيم مرتفعة، مما يقود إلى ارتفاع التباين المتحصل عليه من قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك، والذي يقود بدوره إلى زيادة حجم الأخطاء المعيارية (الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة) فيؤشر بصورة خاطئة عدم معنوية بعض المتغيرات المستقلة في النموذج نتيجة تناقص قيم (T) المحسوبة بالمقارنة مع القيم الجدولية (T_{tab}) والذي يقود بالباحث خطأ إلى حذف المتغيرات غير المعنوية في النموذج، في حين أن سبب عدم معنويتها هو الارتباط الذي يجمع بين المتغيرات المستقلة والذي يؤدي إلى كبر حجم التباين ومن ثمّ الوصول إلى القياسات غير الدقيقة وبالتالي صعوبة الاعتماد على النتائج بثقة.
- ارتفاع قيمة معامل التحديد، مما يوجه الباحث إلى الاعتقاد بأن المتغيرات المستقلة لها قدرة عالية على تفسير التغيرات الحاصلة في المتغير التابع وهو ما يؤكده اختبار فيشر (fisher)، حيث أن إحصائية فيشر المحسوبة (F_{cal}) تكون عالية جداً، إلا أن عدم معنوية المعلمات المقدرة يؤكد أن اختبار معامل التحديد واختبار فيشر أعطى نتائج مضللة.

ملاحظة:

تشير بعض الدراسات التطبيقية إلى أن الارتباط الخطي يكون مشكلة غير مهمة. إذا كان: $R_{y \cdot x_1, x_2} > r_{x_1 x_2}$ ويكون مؤشر على القياس إذا كان: $R_{y \cdot x_1, x_2} < r_{x_1 \cdot x_2}$

5- اختبارات اكتشاف مشكلة التعدد الخطي:

5-1: اختبار كلاين (Teste de Klein):

ويتم هذا الاختبار وفق الخطوات التالية:

أ- نقوم بتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد وحساب معامل التحديد الخاص به R^2.

ب- حساب مربع معاملات الارتباط الخطي بين كل متغيرين مستقلين (X_j, X_i) أي: حساب $r^2_{x_j x_i}$ حيث:

$$r^2_{x_j x_i} = \frac{\left[\sum X_j X_i - n(\bar{X}_j)(\bar{X}_i)\right]^2}{\left[\sum (X_j)^2 - n(\bar{X}_j)^2\right]\left[\sum X_i^2 - n(\bar{X}_i)^2\right]}$$

ج - المقارنة :

• إذا كان : $R^2 < r^2_{X_jX_i}$ <= فإن نموذج الانحدار الخطي المتعدد يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

• وإذا كان : $R^2 > r^2_{X_jX_i}$ <= فإن نموذج الانحدار الخطي المتعدد لا يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

- مثال : قام أحد الباحثين بدراسة دالة الطلب على سلعة معينة (Y) فوجد أن هناك عاملين أساسيين يؤثران فيها وهي سعر السلعة (X_1) وسعر سلعة أخرى منافسة (X_2).

بعد تقدير دالة الطلب على السلعة المعينة تم الحصول على النتائج التالية :

$$\hat{Y}_i = 15{,}75 - 2{,}25X_1 - 0{,}75X_2$$
$$T : \quad (8{,}255) \qquad (6{,}64) \qquad (3{,}28)$$

$$R^2 = 0{,}9843 \ , \ n = 5 \ , \ \Sigma X_1 = 15 \ , \ \Sigma X_2 = 20$$
$$\Sigma X_1X_2 = 46 \ , \ \Sigma X_1^2 = 55 \ , \ \Sigma X_2^2 = 102$$

- المطلوب : اختبر وجود مشكلة التعدد الخطي للنموذج باستخدام اختبار كلاين.

* الحل :

- اختبار مشكلة التعدد الخطي للنموذج وفق اختبار كلاين Klein :

* حساب مربع معامل الارتباط الخطي البسيط بين كل المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 :

نعلم أن :

$$r^2_{X_1X_2} = \frac{\left[\Sigma X_1X_2 - n(\bar{X}_1)(\bar{X}_2)\right]^2}{\left(\Sigma X_1^2 - n(\bar{X}_1)^2\right)\left(\Sigma X_2^2 - n(\bar{X}_2)^2\right)}$$

<= حساب : $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$:

$$\bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_1}{n} \Rightarrow \bar{X}_1 = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow \boxed{\bar{X}_1 = 3}$$
$$\bar{X}_2 = \frac{\Sigma X_2}{n} \Rightarrow \bar{X}_2 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \boxed{\bar{X}_2 = 4}$$

إذن :

$$r^2_{X_1X_2} = \frac{\left[46 - 5(3)(4)\right]^2}{\left(55 - 5(3)^2\right)\left(102 - 5(4)^2\right)} = \frac{196}{202}$$

$$\boxed{r^2_{X_1X_2} = 0{,}8909}$$

- المقارنة والقرار: من المعطيات لدينا: $R^2 = 0,9843$

بما أن: معامل التحديد R^2 (0,9843) أكبر من مربع معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين X_1 و X_2 ($r^2_{X_1X_2} = 0,8909$) فإن النموذج المقدر لا يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

5-2- اختبار فرار كلوبر Farrar-Glauber: ويتم هذا الاختبار وفق الاختبار التالي:

أولاً => اختبار مربع كاي χ^2: ويتم هذا الاختبار وفق الخطوات التالية:

1- حساب مصفوفة معاملات الارتباط البسيطة لكل المتغيرات المستقلة:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1,X_3} & r_{X_1,X_4} & \cdots & r_{X_1,X_K} \\ r_{X_2,X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & \cdots & r_{X_2,X_K} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ r_{X_K,X_1} & r_{X_K,X_2} & r_{X_K,X_3} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2- حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة $|r|$:

* فإذا كان: $|r| = 0$ <= وجود مشكلة التعدد الخطي [أي وجود ارتباط تام بين المتغيرات المستقلة ونشير أن هذه الحالة توافق وجود متغيرين مستقلين X_1 و X_2 في النموذج فقط] أي:

$$|r| = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_1X_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

* وإذا كان: $|r| = 1$ <= عدم وجود مشكلة التعدد الخطي [أي عدم وجود ارتباط بين المتغيرات المستقلة ونشير أن هذه توافق وجود متغيرين مستقلين اثنين X_1، X_2 في النموذج فقط] أي:

إذا كان: $r_{X_1,X_2} = 0$ فإن:

$$|r| = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_1X_2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

* أما إذا كان $0 < |r| < 1$ <= فلابد من حساب قيمة مربع كاي χ^2 بعد تحديد فرضيات الاختبار:

- فرضية العدم: [عدم وجود تعدد خطي]
- الفرضية البديلة:

$$\begin{cases} H_0: |r| = 1 \text{ [عدم وجود تعدد خطي]} \\ H_1: |r| < 1 \text{ [وجود تعدد خطي.]} \end{cases}$$

3 - حساب القيمة الإحصائية لمربع كاي χ^2_{cal} وفق العلاقة التالية:

$$\chi^2_{cal} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2K + 5)\right] \cdot \ln|r|$$

حيث:

n = حجم العينة ، K = عدد المتغيرات المستقلة إضافةً إلى الحد الثابت.

$\ln|r|$ = اللوغاريتم النيبيري لمحدد مصفوفة معاملات الارتباطات الجزئية.

4 - قاعدة قرار الاختبار:

بعد حساب χ^2_{cal} نقارنها بالمجدولة χ^2_{tab} عند مستوى معنوية $\alpha\%$

ودرجة حرية $= \frac{1}{2}K(K-1)$

<= فإذا كانت: $\chi^2_{cal} \geq \chi^2_{tab}$ نقبل H_1 ونرفض H_0: [وجود تعدد خطي].

<= وإذا كانت: $\chi^2_{cal} < \chi^2_{tab}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 [عدم وجود تعدد خطي].

مثال: إذا كانت لدينا مصفوفة الارتباطات r التالية:

وتوفرت لدينا المعلومات التالية:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & 1 & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$r_{1,2} = 0,8811$ ، $r_{1,3} = 0,9399$

$r_{2,3} = 0,9866$ ، $K = 4$ ، $n = 15$

$\alpha = 5\%$

المطلوب: اختبر مشكلة التعدد الخطي باستخدام اختبار فرار كلوبر (كاي مربع χ^2).

الحل: * اختبار مشكلة التعدد الخطي وفق اختبار فرار كلوبر:

* تحديد الفرضيات: - فرضية العدم: [عدم وجود تعدد خطي] $H_0 : |r| = 1$

- الفرضية البديلة: [وجود تعدد خطي]. $H_1 : |r| < 1$

* حساب χ^2_{cal}:

- حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط البسيطة.

$$|r| = \begin{vmatrix} +1 & -0,8811 & +0,9399 \\ -0,8811 & +1 & -0,9866 \\ +0,9399 & -0,9866 & +1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0,9866 \\ 0,9866 & 1 \end{vmatrix} - 0,8811\begin{vmatrix} 0,8811 & 0,9866 \\ 0,9399 & 1 \end{vmatrix} + 0,9399\begin{vmatrix} 0,8811 & 1 \\ 0,9399 & 0,9866 \end{vmatrix}$$

$|R| = 0,000968$

إذن: χ^2_{cal} :

- $\chi^2_{cal} = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2K+5)\right] \cdot Ln|R|$

$\chi^2_{cal} = -\left[15 - 1 - \frac{1}{6}(2(4)+5)\right] \cdot Ln\, 0,000968$

$\boxed{\chi^2_{cal} = 82,1266}$

أما القيمة الجدولية فتحسب كالتالي:

- $\chi^2_{Tab} \begin{cases} \alpha = 5\% \\ dff = \frac{1}{2}K(K-1) = \frac{1}{2}(4)(4-1) = 6 \end{cases} = 12,6$

- المقارنة والقرار:

بما أن: $\chi^2_{cal} > \chi^2_{Tab}$ فإنه يتم رفض فرضية العدم (H_0) وقبول الفرضية البديلة (H_1) أي أن النموذج يعاني من مشكلة التعدد الخطي.

6- كيفية (الحلول) للتخلص من مشكلة التعدد الخطي:

تتمثل طرق العلاج (الحلول) فيما يلي:

- توسيع حجم العينة، مثلا تحويل البيانات السنوية إلى موسمية أو شهرية، إن أمكن ذلك.
- حذف أحد أو بعض المتغيرات المستقلة خاصة ذو الارتباط الكبير.
- إضافة معطيات جديدة إلى المعطيات الموجودة.
- تحويل شكل الدالة باستعمال النسب والفروقات عوضا عن المتغيرات الأصلية.
- تحويل النموذج إلى النماذج الجزئية البسيطة.

ثانياً => مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء.

1- التعرف بالمشكلة: تنتج هذه المشكلة في حال اختراق احدى فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية في اطار نموذج الانحدار الخطي البسيط وكذلك الانحدار الخطي المتعدد والتي تنص على أن الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض أي: $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ، حيث أن اختراق هذه الفرضية يعني أن مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة لا تحتوي على الصفر خارج القطر الأول. [أي قيم غير القطرية لا تساوي الصفر].

* بشكل مختصر: مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء يقصد بها وجود علاقة ارتباط بين القيمة الحالية والقيمة السابقة أو القيمة اللاحقة للمتغير العشوائي أي قيم المتغير ε العشوائي تكون غير مستقلة عن بعضها البعض. ويعبر عن ذلك بعدم مساواة التباين المشترك للأخطاء المتتالية بالصفر كالآتي:

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

* هناك عدة أشكال للارتباط الذاتي وهي:

* 1- من حيث الرتبة: قد يكون الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى أو الثانية أو رتبة أعلى، فالارتباط الذاتي من الرتبة الأولى يقصد به وجود ارتباط بين القيم التقديرية للخطأ العشوائي في فترة زمنية والقيمة المقدرة له في الفترة السابقة مباشرة، ويكتب وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho\, \varepsilon_{t-1} + \mu_t$$

حيث: تمثل: ρ: معلمة تقيس درجة الارتباط وقيمتها أقل من 1.

- وقد يكون الارتباط الذاتي من الرتبة الثانية والمقصود به هنا وجود ارتباط بين القيم التقديرية للخطأ العشوائي في فترة زمنية معينة والقيمة المقدرة له في الفترتين السابقتين مباشرة، ويكتب وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho\, \varepsilon_{t-2} + \mu_t$$

* 2- من حيث اتجاه الارتباط: قد يكون الارتباط الذاتي للأخطاء موجباً أو سالباً، وهو ما يعني أن: $-1 < \rho < +1$

2- أسباب نشوء مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

ينشأ الارتباط الذاتي للأخطاء من عدة أسباب منها:

• إهمال بعض المتغيرات المستقلة في النموذج المراد تقديره [مثلا عدم توفر البيانات الخاصة عنها].

• الصياغة غير الدقيقة للنموذج: بمعنى شكل العلاقة الدالية المستخدمة لا يتطابق مع الشكل الحقيقي، فإذا افترضنا علاقة خطية بين المتغيرين Y و X في حين أن العلاقة الحقيقية بينهما غير خطية.

• أخطاء التقريب وقياس البيانات، مثل تحويل البيانات من الشهرية إلى الربع السنوية.

3- طرق الكشف عن وجود ارتباط ذاتي للأخطاء:

3-1* اختبار داربن واتسون Durbin-Watson:

يستعمل هذا الاختبار للكشف عن وجود ارتباط ذاتي للأخطاء التقدير من الدرجة الأولى [يعني امكانية ارتباط الخطأ بالخطأ الذي يسبقه فقط].

أي:

$$\varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + u_t$$

أ* شروط تطبيق اختبار داربن واتسون: DW

* يستخدم إلا في حالة وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى.
* يستخدم في حالة حجم العينة لا يقل عن 15 مشاهدات.
* يجب أن تحتوي معادلة الانحدار الأصلي بالنموذج على الحد الثابت.
* لا يحتوي نموذج الانحدار الأصلي على المتغير التابع ذات الفجوات الزمنية كأحد متغيرات التفسيرية مثلا:

$$y_t = b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ب* خطوات تطبيق اختبار داربن واتسون D-W:

يقوم اختبار DW على مايلي:

* تحديد الفرضيات:

- فرضية العدم: [لا يوجد ارتباط ذاتي من الدرجة 1] $H_0: \rho = 0$
- الفرضية البديلة: [يوجد ارتباط ذاتي من الدرجة 1] $H_1: \rho \neq 0$

* حساب القيمة الإحصائية لداربن واتسون DW: تحسب وفق العلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

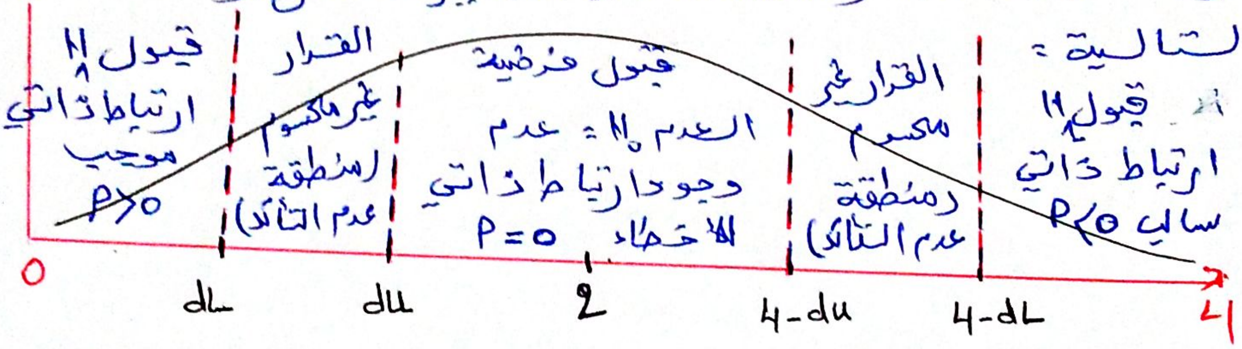
حيث: e_t: تمثل البواقي في النموذج
$e_t = (y_i - \hat{y})$

ملاحظة: (1)

نلاحظ أن البسط به $\sum_{t=2}$، حيث أن عدد الفروق أقل من عدد المشاهدات بواحد، وذلك لأن القيمة الأولى لا تسبقها قيمة.

** المقارنة والقرار:

يتم مقارنة القيمة المحسوبة للاختبار DW مع الإحصائية المجدولة له عند درجة معنوية α% و n مشاهدة و K متغير مستقل وفق الشكل والحالات التالية:



- يكون القرار وفق وقوع احصائية DW المحسوبة ضمن الشكل أعلاه:

* $dU < DW < 4 - dU$ <= عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء: قبول H_0.

* $0 < DW < dL$ <= وجود ارتباط ذاتي موجبا: قبول H_1.

* $4-dL < DW < 4$ <= وجود ارتباط ذاتي سالب للأخطاء: قبول H_1.

* $4-dU < DW < 4-dL$ ، $dL < DW < dU$ <= لا يمكن اتخاذ قرار بشأن وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء.

ملاحظة (2):

تمثل: [dU = الحد الأعلى ، dL = الحد الأدنى] لقيم DW الجدولية في الجدول الإحصائي لتوزيع داربن واتسون

ملاحظة (3):

يمكن حساب معامل الارتباط $\hat{P}$ وفق العلاقة التالية: $\hat{P} = 1 - \frac{DW}{2}$

ملاحظة (4):

إذا كان حجم العينة أقل من 15 أي $n<15$ نستعمل هذا المجال $DW \in [1,7 ، 2[$
إذا وقعت القيمة الاحصائية لـ DW ضمن هذا المجال فليس هناك ارتباط ذاتي

(8) مثال: تمثل بيانات الجدول الموالي تغيرات كرمن الأموال (X) والأرباح (y)

	y	X	$\hat{y}$	$e_t=(y_i-\hat{y})$	e_{t-1}	$(e_t-e_{t-1})^2$	e_t^2
	1	10	1,4	-0,4	-0,4	0	0,16
	3	20	2,2	0,8	1,2	0,16	0,64
	2	30	3	-1	-1,8	0,64	1
	5	40	3,8	1,2	2,2	1	1,44
	4	50	4,6	-0,6	-1,8	1,44	0,36
Σ	15	150		$\Sigma e_t=0$		3,24	3,6

- وبعد تقدير النموذج تم الحصول على النتائج التالية

$$\hat{y} = 0,6 + 0,08 X_i$$

المطلوب: اختبر وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى بين قيم المتغير العشوائي.

الحل: - اختبار مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء وفق اختبار داربن واتسون:

* تحديد الفرضيات:

- فرضية العدم: $H_0 : \rho = 0$ [لا يوجد ارتباط ذاتي من الدرجة 1]

- الفرضية البديلة: $H_1 : \rho \neq 0$ [يوجد ارتباط ذاتي من الدرجة 1]

* حساب القيمة الاحصائية DW.

نعلم أن: $e_t = (y_i - \hat{y})$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$DW = \frac{3,24}{3,6} \Rightarrow DW = 0,9$$

** المقارنة والقرار:

بما أن: n أقل من 15 فإن احصائية DW غير موجودة في الجدول الاحصائي لتوزيع داربن واتسون لذا استقنا انها وفق المجال التالي: $DW \in [1,7 ; 2[$

الملاحظ أن القيمة المحسوبة $DW_{cal} = 0,9$ لا تنتمي للمجال $[1,7 ; 2[$

وبالتالي فإنه يوجد مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة 1.

مثال 2 = بافتراض أنه لدينا بيانات لسلسلة زمنية $(n=17)$ وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) تم تقدير العلاقة بين X_1 و X_2 و Y التي تأخذ الصيغة التالية:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \varepsilon_t$$

تم الحصول على النتائج التالية:

$$Y = 1,74 + 0,098 X_1 + 0,897 X_2$$

$$SD = (0,0364) \quad (0,0399) \quad (0,04335)$$

$$R^2 = 0,977 \quad , \quad DW = 1,559$$

المطلوب = اختبر وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى عند مستوى معنوية 5%.

الحل = - اختبار مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء عند $\alpha = 5\%$.

* تحديد الفرضيات:

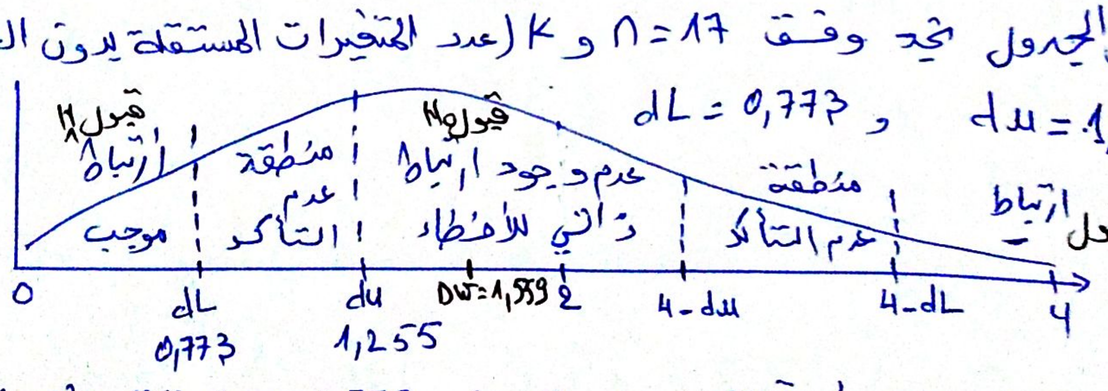
- فرضية العدم: [لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء] : $H_0 = \rho = 0$
- الفرضية البديلة: [يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء] : $H_1 : \rho \neq 0$

* القيمة الإحصائية لداربن واتسون: $DW = 1,55$

* المقارنة والقرار:

- استخراج قيمة DW الجدولية من خلال تحديد قيمة du [الحد الأعلى] وقيمة dL [الحد الأدنى]
- من الجدول نجد وفق $n=17$ و K (عدد المتغيرات المستقلة بدون الحد الثابت) = 2

$dL = 0,773$ و $du = 1,255$



- من البيان يتضح أن قيمة داربن واتسون $DW = 1,559$ تقع في منطقة قبول H_0 أي عدم وجود مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى.

4- طرق معالجة الارتباط الذاتي بين الأخطاء:

تتوقف الطريقة التي تعالج فيها مشكلة الارتباط الذاتي عموما على سبب حدوث المشكلة وهي في الآتي.

* عندما يكون السبب هو إهمال متغير مستقل أو أكثر في النموذج فيتم إضافة ذلك المتغير أو المتغيرات إلى النموذج.

* عندما يكون سبب المشكل هو الصياغة الغير الحقيقية فإن المعالجة تتم من خلال إعادة صياغة النموذج بالشكل المناسب.

* أما إذا كان سبب المشكلة هو وجود علاقة فعلية بين البواقي فيوجد عدة طرق لمعالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى منها طريقة الفرق العام وطريقة الفرق الأول وطريقة المربعات الصغرى العامة.

ملاحظة (05):

هناك اختبارات أخرى تكشف وجود أو عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأعلى (أي أكبر من الدرجة الأولى) منها اختبار Breush حيث أن هذا الاختبار مبني على أساس اختبار فيشر لاختبار معنوية المعلمات أو اختبار مضاعف لاغرونج، وهو صالح حتى مع ظهور المتغير التابع كمتغير قياسي ضمن المتغيرات المستقلة.

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مقياس: اقتصاد قياسي – السنة: ثالثة اقتصاد كمي

السنة الجامعية: 2021–2022

سلسلة تمارين رقم 02 متعلقة بمحور الانحدار الخطي المتعدد

التمرين الأول:

تمثل بيانات الجدول الموالي تغيرات كل من الاستهلاك والدخل وسعر الفائدة لبلد ما خلال عقد من الزمن.

الاستهلاكY	12	11	10	9	8	9	9	15	10	7
الدخل X1	7	12	6	9	6	6	8	13	11	6
سعر الفائدةX2	4	3	8	3	3	6	5	6	5	7

المطلوب:

1. قدر معالم النموذج التي تفسر الاستهلاك؟
2. قدّم التفسير الإحصائي والاقتصادي لمعلمات النموذج المقدرة عند مستوى معنوية 5%.
3. أحسب معامل التحديد وفسره.
4. اختبر معنوية (صلاحية) النموذج ككل (اختبار فيشر) عند مستوى معنوية 5%.
5. قدم جدول تحليل تباين معالم النموذج باستخدام جدول ANOVA.

التمرين الثاني: ليكن لدينا نموذج الانحدار الخطي المتعدد التالي $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t$ حيث:

Y	14	11	11	9	15	9	9	7	10	8
X1	7	8	6	9	7	6	8	10	9	6
X2	5	5	8	7	9	6	5	8	8	7

المطلوب: نفس أسئلة التمرين السابق.

التمرين الثالث:

توضح المعادلة أدناه نموذجاً خطياً لدالة Y كالتالي:

$$Y_t = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon_t \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبعد التقدير تم الحصول على النتائج المصفوفية التالية: Y'Y=3.5 , n=50, TSS=3.49

$$X'X=\begin{bmatrix} 20 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad X'Y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

1. قدر Y كدالة إلى كل من المتغيرات X1, X2, X3 وفق المعادلة (1)، مع تقديم تفسير للمعلمات المقدرة.
2. أوجد قيمة التباين δ_ε^2 لحدود الأخطاء وكذا الانحراف المعياري لها.
3. أوجد تباينات معلمات النموذج $\delta_{\beta 1}^2$، $\delta_{\beta 2}^2$، $\delta_{\beta 3}^2$ وكذا الانحراف المعياري لكل معلمة مقدرة.
4. اختبر المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج فردياً عند مستوى معنوية 5%.
5. أوجد قيمة معامل التحديد R^2 والمصحح $\bar{R}^2$.
6. أوجد قيمة إحصائية فيشر F، ماذا تستنتج؟
7. أوجد مجال الثقة للمعلمات المقدرة B1,B2, B3 عند مستوى ثقة 95%.

التمرين الرابع:

لنفترض نموذج خطي متعدد يحتوي على قاطع (حد ثابت) ومتغيرين مستقلين X1، X2 ومتغير تابع Y، حيث:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ \dots & 9.3 & 5.4 \\ \dots & \dots & 12.7 \end{bmatrix} \quad , \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ \dots & 0.1428 & -0.0607 \\ \dots & \dots. & 0.1046 \end{bmatrix}$$

$$Y_t = -1.61 + 0.61X_1 + 0.46X_2, \quad RSS = 0.3, \quad Y'Y = 73.48, \quad \bar{Y} = -1.6$$

المطلوب:

1. حدد حجم العينة n.
2. إذا كان عدد معلمات النموذجK=1، ما هي العلاقة الرياضية التي تربط بين معامل التحديد R^2 ومعامل التصحيح $\bar{R}^2$.
3. أكمل المعطيات الناقصة في كلا المصفوفتين أعلاه.
4. أوجد قيم ESS و TSS.
5. أوجد قيم تباينات معلمات النموذج V(B).
6. أدرس صلاحية النموذج، دراسة جزئية وكلية عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الخامس:

من أجل تقدير العلاقة القائمة بين المبيعات (Y) وكل من السعر (X1) والاعلان (X2)، تم ادخال معطيات كل من المتغيرات في برنامج EViews، وكانت النتائج كالتالي:

المطلوب:

من خلال قراءتك لمعطيات الجدول المقابل، أجب على الأسئلة التالية:

1. استخرج قيمة حجم العينة n.
2. شكل معادلة الانحدار المقدرة.
3. قدم التفسير الاحصائي والاقتصادي للمعلمات المقدرة.
4. اختبر المعنوية الكلية للنموذج.
5. قدر مجال الثقة للمعلمتين B1, B2 عند مستوى ثقة 95%.

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 11/04/19 Time: 18:40
Sample: 2001 2010
Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	35.41509	2.095671	16.89916	0.0000
X1	0.566038	0.290106	1.951138	0.0920
X2	1.320755	0.248432	5.316357	0.0011

R-squared	0.989354	Mean dependent var	57.00000
Adjusted R-squared	0.986312	S.D. dependent var	13.47426
S.E. of regression	1.576444	Akaike info criterion	3.991545
Sum squared resid	17.39623	Schwarz criterion	4.082321
Log likelihood	-16.95773	Hannan-Quinn criter.	3.891965
F-statistic	325.2495	Durbin-Watson stat	1.431343
Prob(F-statistic)	0.000000		

بالتوفيق .... **أستاذة المقياس: د. رمضاني وفاء.**

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة: ثالثة اقتصاد كمي — المقياس: اقتصاد قياسي2 — السنة الجامعية: 2021-2022

☐ سلسلة تمارين رقم 03 متعلقة بمحور المشاكل القياسية للانحدار

1- مشكلة التعدد الخطي

التمرين الأول:

قام أحد الباحثين بدراسة دالة الطلب على سلعة معينة(Y) ، فوجد أن هناك عاملين أساسيين يؤثران فيها هي سعر السلعة (X1) وسعر سلعة أخرى منافسة (X2)

4	5	5	7	9	Yi
5	4	3	2	1	X1
1	2	5	6	6	X2

وبعد تقدير دالة الطلب على السلعة المعنية تم الحصول على النتائج التالية:

$$Y_t = 15.75 - 2.25X_1 - 0.75X_2$$

T (8.255) (6.64) (3.28)

R^2=0.984375

المطلوب:

1. ماذا يقصد بمشكلة التعدد الخطي؟ وما هي أنواعه، وكيف يتم معالجتها؟
2. اختبر وجود مشكلة التعدد الخطي للنموذج باستخدام احدى الطرق المناسبة عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الثاني:

تم تقدير نموذج الاستثمار Y بدلالة معدل الفائدة X1 والإنتاج الوطني الإجمالي X2 وأسعار الاستهلاكX3 ، حيث كانت النتائج المتحصل عليها كالتالي:

$$Y_t = 346.7760 - 3.524893X_1 + 0.674587X_2 - 9.319026X_3$$

T (8.03) (1.54) (10.43) (8.02)

R^2=0.992232 , n=15

وبعد حساب الارتباطات الجزئية للمتغيرات المستقلة كانت النتائج كالتالي:

$$r_{x1\,x2} = 0.879428 \quad , r_{x1\,x3} = 0.874298 \,, \quad r_{x2\,x3} = 0.997746$$

المطلوب:

1. اختبر وجود مشكلة التعدد الخطي للنموذج باستخدام الطرق المناسبة لذلك عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا البيانات التالية:

Yi	1	2	3	4	5
X1	10	0	20	30	40
X2	10	20	40	10	20

المطلوب:

1. تأكد من وجود مشكلة التعدد الخطي للنموذج باستخدام الطرق المناسبة لذلك عند مستوى معنوية 5%.
2. إذا كانت الإجابة بنعم فما هو نوع التعدد الخطي؟

.... **بالتوفيق**.. **أستاذة المقياس:** د. رمضاني وفاء

Table entry for p and C is the critical value t^* with probability p lying to its right and probability C lying between $-t^*$ and t^*.

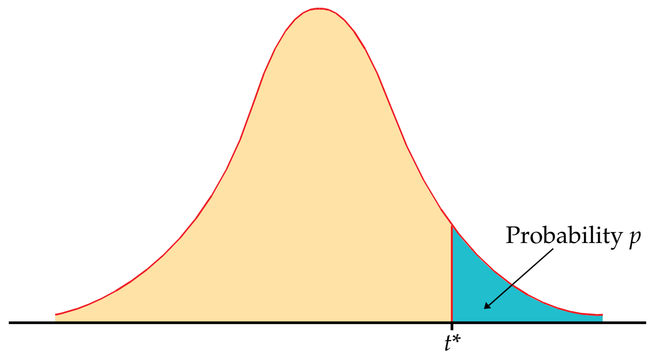


TABLE D

t distribution critical values

	Upper-tail probability p											
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z^*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
	Confidence level C											

Table de la loi de Fisher

Claude Blisle

La table qui apparaît dans les pages suivantes nous donne le 95^e centile de la loi de Fisher avec k degrés de liberté au numérateur et ℓ degrés de liberté au dénominateur. Ce quantile est dénoté $F_{k,\ell,0.05}$. Voici quelques exemples illustratifs.

Exemple 1. Quel est le 95^e centile de la loi de Fisher avec 10 degrés de liberté au numérateur et 15 degrés de liberté au dénominateur ? Ce quantile est dénoté $F_{10,15,0.05}$. On le trouve à l'intersection de la ligne « $\ell = 15$ » avec la colonne « $k = 10$ ». On obtient $F_{10,15,0.05} = 2.544$.

Exemple 2. Quel est le 5^e centile de la loi de Fisher avec 10 degrés de liberté au numérateur et 15 degrés de liberté au dénominateur ? Ce quantile est dénoté $F_{10,15,0.95}$. On utilise la propriété

$$F_{k,\ell,0.95} = \frac{1}{F_{\ell,k,0.05}}.$$

On a donc $F_{10,15,0.95} = 1/F_{15,10,0.05}$. Dans la table, on trouve $F_{15,10,0.05} = 2.845$. On obtient donc $F_{10,15,0.95} = 1/2.845 = 0.3515$.

Exemple 3. On suppose que la variable aléatoire F suit la loi de Fisher avec 5 degrés de liberté au numérateur et 23 degrés de libertés au dénominateur. Que peut-on dire de $\mathbb{P}[F \geq 2.64]$? La table nous dit que la valeur 2.64 est précisément le 95^e centile le la loi de Fisher avec 5 degrés de liberté au numérateur et 23 degrés de libertés au dénominateur. On a donc $\mathbb{P}[F \geq 2.64] = 0.05$.

Exemple 4. On suppose que la variable aléatoire F suit la loi de Fisher avec 8 degrés de liberté au numérateur et 13 degrés de libertés au dénominateur. Que peut-on dire de $\mathbb{P}[F \geq 2.64]$? Selon la table, on a $\mathbb{P}[F \geq 2.767] = 0.05$. On peut donc conclure que $\mathbb{P}[F \geq 2.64]$ est un peu plus grand que 0.05. C'est le mieux qu'on puisse faire avec la table. (Avec l'aide du logiciel R, on obtient $\mathbb{P}[F \geq 2.64] = 0.05805$).

Exemple 5. On suppose que la variable aléatoire F suit la loi de Fisher avec 8 degrés de liberté au numérateur et 13 degrés de libertés au dénominateur. On cherche des nombres a et b pour lesquels on aura $\mathbb{P}[a < F < b] = 0.90$. Il suffit de prendre $a =$ *le* 5^e *centile* et $b =$ *le* 95^e *centile* de la loi de Fisher avec 8 degrés de liberté au numérateur et 13 degrés de libertés au dénominateur. Avec l'aide de la table on obtient

$$\begin{aligned} a &= F_{8,13,0.95} = \frac{1}{F_{13,5,0.05}} = \frac{1}{4.655} = 0.2148, \\ b &= F_{8,13,0.05} = 2.767. \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{P}[0.2148 < F < 2.767] = 0.90$.

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	243.0	243.9	244.7	245.4	245.9	246.5	246.9	247.3	247.7	248.0
2	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45
3	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.908	3.896	3.884	3.874
7	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124
21	2.283	2.250	2.222	2.197	2.176	2.156	2.139	2.123	2.109	2.096
22	2.259	2.226	2.198	2.173	2.151	2.131	2.114	2.098	2.084	2.071
23	2.236	2.204	2.175	2.150	2.128	2.109	2.091	2.075	2.061	2.048
24	2.216	2.183	2.155	2.130	2.108	2.088	2.070	2.054	2.040	2.027
25	2.198	2.165	2.136	2.111	2.089	2.069	2.051	2.035	2.021	2.007
26	2.181	2.148	2.119	2.094	2.072	2.052	2.034	2.018	2.003	1.990
27	2.166	2.132	2.103	2.078	2.056	2.036	2.018	2.002	1.987	1.974
28	2.151	2.118	2.089	2.064	2.041	2.021	2.003	1.987	1.972	1.959
29	2.138	2.104	2.075	2.050	2.027	2.007	1.989	1.973	1.958	1.945
30	2.126	2.092	2.063	2.037	2.015	1.995	1.976	1.960	1.945	1.932
40	2.038	2.003	1.974	1.948	1.924	1.904	1.885	1.868	1.853	1.839
50	1.986	1.952	1.921	1.895	1.871	1.850	1.831	1.814	1.798	1.784
60	1.952	1.917	1.887	1.860	1.836	1.815	1.796	1.778	1.763	1.748
70	1.928	1.893	1.863	1.836	1.812	1.790	1.771	1.753	1.737	1.722
80	1.910	1.875	1.845	1.817	1.793	1.772	1.752	1.734	1.718	1.703
90	1.897	1.861	1.830	1.803	1.779	1.757	1.737	1.720	1.703	1.688
100	1.886	1.850	1.819	1.792	1.768	1.746	1.726	1.708	1.691	1.676
150	1.853	1.817	1.786	1.758	1.734	1.711	1.691	1.673	1.656	1.641
200	1.837	1.801	1.769	1.742	1.717	1.694	1.674	1.656	1.639	1.623
400	1.813	1.776	1.745	1.717	1.691	1.669	1.648	1.630	1.613	1.597

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248.3	248.6	248.8	249.1	249.3	249.5	249.6	249.8	250.0	250.1
2	19.45	19.45	19.45	19.45	19.46	19.46	19.46	19.46	19.46	19.46
3	8.654	8.648	8.643	8.639	8.634	8.630	8.626	8.623	8.620	8.617
4	5.795	5.787	5.781	5.774	5.769	5.763	5.759	5.754	5.750	5.746
5	4.549	4.541	4.534	4.527	4.521	4.515	4.510	4.505	4.500	4.496
6	3.865	3.856	3.849	3.841	3.835	3.829	3.823	3.818	3.813	3.808
7	3.435	3.426	3.418	3.410	3.404	3.397	3.391	3.386	3.381	3.376
8	3.140	3.131	3.123	3.115	3.108	3.102	3.095	3.090	3.084	3.079
9	2.926	2.917	2.908	2.900	2.893	2.886	2.880	2.874	2.869	2.864
10	2.764	2.754	2.745	2.737	2.730	2.723	2.716	2.710	2.705	2.700
11	2.636	2.626	2.617	2.609	2.601	2.594	2.588	2.582	2.576	2.570
12	2.533	2.523	2.514	2.505	2.498	2.491	2.484	2.478	2.472	2.466
13	2.448	2.438	2.429	2.420	2.412	2.405	2.398	2.392	2.386	2.380
14	2.377	2.367	2.357	2.349	2.341	2.333	2.326	2.320	2.314	2.308
15	2.316	2.306	2.297	2.288	2.280	2.272	2.265	2.259	2.253	2.247
16	2.264	2.254	2.244	2.235	2.227	2.220	2.212	2.206	2.200	2.194
17	2.219	2.208	2.199	2.190	2.181	2.174	2.167	2.160	2.154	2.148
18	2.179	2.168	2.159	2.150	2.141	2.134	2.126	2.119	2.113	2.107
19	2.144	2.133	2.123	2.114	2.106	2.098	2.090	2.084	2.077	2.071
20	2.112	2.102	2.092	2.082	2.074	2.066	2.059	2.052	2.045	2.039
21	2.084	2.073	2.063	2.054	2.045	2.037	2.030	2.023	2.016	2.010
22	2.059	2.048	2.038	2.028	2.020	2.012	2.004	1.997	1.990	1.984
23	2.036	2.025	2.014	2.005	1.996	1.988	1.981	1.973	1.967	1.961
24	2.015	2.003	1.993	1.984	1.975	1.967	1.959	1.952	1.945	1.939
25	1.995	1.984	1.974	1.964	1.955	1.947	1.939	1.932	1.926	1.919
26	1.978	1.966	1.956	1.946	1.938	1.929	1.921	1.914	1.907	1.901
27	1.961	1.950	1.940	1.930	1.921	1.913	1.905	1.898	1.891	1.884
28	1.946	1.935	1.924	1.915	1.906	1.897	1.889	1.882	1.875	1.869
29	1.932	1.921	1.910	1.901	1.891	1.883	1.875	1.868	1.861	1.854
30	1.919	1.908	1.897	1.887	1.878	1.870	1.862	1.854	1.847	1.841
40	1.826	1.814	1.803	1.793	1.783	1.775	1.766	1.759	1.751	1.744
50	1.771	1.759	1.748	1.737	1.727	1.718	1.710	1.702	1.694	1.687
60	1.735	1.722	1.711	1.700	1.690	1.681	1.672	1.664	1.656	1.649
70	1.709	1.696	1.685	1.674	1.664	1.654	1.646	1.637	1.629	1.622
80	1.689	1.677	1.665	1.654	1.644	1.634	1.626	1.617	1.609	1.602
90	1.675	1.662	1.650	1.639	1.629	1.619	1.610	1.601	1.593	1.586
100	1.663	1.650	1.638	1.627	1.616	1.607	1.598	1.589	1.581	1.573
150	1.627	1.614	1.602	1.590	1.580	1.570	1.560	1.552	1.543	1.535
200	1.609	1.596	1.583	1.572	1.561	1.551	1.542	1.533	1.524	1.516
400	1.582	1.569	1.556	1.545	1.534	1.523	1.514	1.505	1.496	1.488

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	40	50	60	70	80	90	100	150	200	400
1	251.1	251.8	252.2	252.5	252.7	252.9	253.0	253.5	253.7	253.8
2	19.47	19.48	19.48	19.48	19.48	19.48	19.49	19.49	19.49	19.49
3	8.594	8.581	8.572	8.566	8.561	8.557	8.554	8.545	8.540	8.537
4	5.717	5.699	5.688	5.679	5.673	5.668	5.664	5.652	5.646	5.643
5	4.464	4.444	4.431	4.422	4.415	4.409	4.405	4.392	4.385	4.381
6	3.774	3.754	3.740	3.730	3.722	3.716	3.712	3.698	3.690	3.686
7	3.340	3.319	3.304	3.294	3.286	3.280	3.275	3.260	3.252	3.248
8	3.043	3.020	3.005	2.994	2.986	2.980	2.975	2.959	2.951	2.947
9	2.826	2.803	2.787	2.776	2.768	2.761	2.756	2.739	2.731	2.726
10	2.661	2.637	2.621	2.610	2.601	2.594	2.588	2.572	2.563	2.558
11	2.531	2.507	2.490	2.478	2.469	2.462	2.457	2.439	2.431	2.426
12	2.426	2.401	2.384	2.372	2.363	2.356	2.350	2.332	2.323	2.318
13	2.339	2.314	2.297	2.284	2.275	2.267	2.261	2.243	2.234	2.229
14	2.266	2.241	2.223	2.210	2.201	2.193	2.187	2.169	2.159	2.154
15	2.204	2.178	2.160	2.147	2.137	2.130	2.123	2.105	2.095	2.089
16	2.151	2.124	2.106	2.093	2.083	2.075	2.068	2.049	2.039	2.034
17	2.104	2.077	2.058	2.045	2.035	2.027	2.020	2.001	1.991	1.985
18	2.063	2.035	2.017	2.003	1.993	1.985	1.978	1.958	1.948	1.942
19	2.026	1.999	1.980	1.966	1.955	1.947	1.940	1.920	1.910	1.903
20	1.994	1.966	1.946	1.932	1.922	1.913	1.907	1.886	1.875	1.869
21	1.965	1.936	1.916	1.902	1.891	1.883	1.876	1.855	1.845	1.838
22	1.938	1.909	1.889	1.875	1.864	1.856	1.849	1.827	1.817	1.810
23	1.914	1.885	1.865	1.850	1.839	1.830	1.823	1.802	1.791	1.784
24	1.892	1.863	1.842	1.828	1.816	1.808	1.800	1.779	1.768	1.761
25	1.872	1.842	1.822	1.807	1.796	1.787	1.779	1.757	1.746	1.739
26	1.853	1.823	1.803	1.788	1.776	1.767	1.760	1.738	1.726	1.719
27	1.836	1.806	1.785	1.770	1.758	1.749	1.742	1.719	1.708	1.701
28	1.820	1.790	1.769	1.754	1.742	1.733	1.725	1.702	1.691	1.683
29	1.806	1.775	1.754	1.738	1.726	1.717	1.710	1.686	1.675	1.667
30	1.792	1.761	1.740	1.724	1.712	1.703	1.695	1.672	1.660	1.652
40	1.693	1.660	1.637	1.621	1.608	1.597	1.589	1.564	1.551	1.542
50	1.634	1.599	1.576	1.558	1.544	1.534	1.525	1.498	1.484	1.475
60	1.594	1.559	1.534	1.516	1.502	1.491	1.481	1.453	1.438	1.428
70	1.566	1.530	1.505	1.486	1.471	1.459	1.450	1.420	1.404	1.394
80	1.545	1.508	1.482	1.463	1.448	1.436	1.426	1.395	1.379	1.368
90	1.528	1.491	1.465	1.445	1.429	1.417	1.407	1.375	1.358	1.348
100	1.515	1.477	1.450	1.430	1.415	1.402	1.392	1.359	1.342	1.331
150	1.475	1.436	1.407	1.386	1.369	1.356	1.345	1.309	1.290	1.278
200	1.455	1.415	1.386	1.364	1.346	1.332	1.321	1.283	1.263	1.249
400	1.425	1.383	1.352	1.329	1.311	1.296	1.283	1.242	1.219	1.204

Appendix

A

Durbin-Watson Significance Tables

The Durbin-Watson test statistic tests the null hypothesis that the residuals from an ordinary least-squares regression are not autocorrelated against the alternative that the residuals follow an AR1 process. The Durbin-Watson statistic ranges in value from 0 to 4. A value near 2 indicates non-autocorrelation; a value toward 0 indicates positive autocorrelation; a value toward 4 indicates negative autocorrelation.

Because of the dependence of any computed Durbin-Watson value on the associated data matrix, exact critical values of the Durbin-Watson statistic are not tabulated for all possible cases. Instead, Durbin and Watson established upper and lower bounds for the critical values. Typically, tabulated bounds are used to test the hypothesis of zero autocorrelation against the alternative of *positive* first-order autocorrelation, since positive autocorrelation is seen much more frequently in practice than negative autocorrelation. To use the table, you must cross-reference the sample size against the number of regressors, excluding the constant from the count of the number of regressors.

The conventional Durbin-Watson tables are not applicable when you do not have a constant term in the regression. Instead, you must refer to an appropriate set of Durbin-Watson tables. The conventional Durbin-Watson tables are also not applicable when a lagged dependent variable appears among the regressors. Durbin has proposed alternative test procedures for this case.

Statisticians have compiled Durbin-Watson tables from some special cases, including:

- Regressions with a full set of quarterly seasonal dummies.
- Regressions with an intercept and a linear trend variable (CURVEFIT MODEL=LINEAR).
- Regressions with a full set of quarterly seasonal dummies and a linear trend variable.

In addition to obtaining the Durbin-Watson statistic for residuals from REGRESSION, you should also plot the ACF and PACF of the residuals series. The plots might suggest either that the residuals are random, or that they follow some ARMA process. If the residuals resemble an AR1 process, you can estimate an appropriate regression using the AREG procedure. If the residuals follow any ARMA process, you can estimate an appropriate regression using the ARIMA procedure.

In this appendix, we have reproduced two sets of tables. Savin and White (1977) present tables for sample sizes ranging from 6 to 200 and for 1 to 20 regressors for models in which an intercept is included. Farebrother (1980) presents tables for sample sizes ranging from 2 to 200 and for 0 to 21 regressors for models in which an intercept is not included.

Let's consider an example of how to use the tables. In Chapter 9, we look at the classic Durbin and Watson data set concerning consumption of spirits. The sample size is 69, there are 2 regressors, and there is an intercept term in the model. The Durbin-Watson test statistic value is 0.24878. We want to test the null hypothesis of zero autocorrelation in the residuals against the alternative that the residuals are positively autocorrelated at the 1% level of significance. If you examine the Savin and White tables (Table A.2 and Table A.3), you will not find a row for sample size 69, so go to the next *lowest* sample size with a tabulated row, namely *N=65*. Since there are two regressors, find the column labeled *k=2*. Cross-referencing the indicated row and column, you will find that the printed bounds are dL = 1.377 and dU = 1.500. If the observed value of the test statistic is less than the tabulated lower bound, then you should reject the null hypothesis of non-autocorrelated errors in favor of the hypothesis of positive first-order autocorrelation. Since 0.24878 is less than 1.377, we reject the null hypothesis. If the test statistic value were greater than dU, we would not reject the null hypothesis.

A third outcome is also possible. If the test statistic value lies between dL and dU, the test is inconclusive. In this context, you might err on the side of conservatism and not reject the null hypothesis.

For models with an intercept, if the observed test statistic value is greater than 2, then you want to test the null hypothesis against the alternative hypothesis of negative first-order autocorrelation. To do this, compute the quantity 4-d and compare this value with the tabulated values of dL and dU as if you were testing for positive autocorrelation.

When the regression does not contain an intercept term, refer to Farebrother,Äôs tabulated values of the ,Äúminimal bound,,Äù denoted dM (Table A.4 and Table A.5), instead of Savin and White,Äôs lower bound dL. In this instance, the upper bound is the conventional bound dU found in the Savin and White tables. To test for negative first-order autocorrelation, use Table A.6 and Table A.7.

To continue with our example, had we run a regression with no intercept term, we would cross-reference N equals 65 and k equals 2 in Farebrother,Äôs table. The tabulated 1% minimal bound is 1.348.

Table A-1
Models with an intercept (from Savin and White)

Durbin-Watson Statistic: 1 Per Cent Significance Points of dL and dU

	k'*=1		**k'=2**		**k'=3**		**k'=4**		**k'=5**		**k'=6**		**k'=7**		**k'=8**		**k'=9**		**k'=10**	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.390	1.142	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.435	1.036	0.294	1.676	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.653	1.010	0.519	1.297	0.396	1.640	0.286	2.030	0.193	2.453	0.124	2.892	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280	0.164	2.665	0.105	3.053	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150	0.211	2.490	0.140	2.838	0.090	3.182	-----	-----	-----	-----
14	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049	0.257	2.354	0.183	2.667	0.122	2.981	0.078	3.287	-----	-----
15	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.465	0.487	1.705	0.390	1.967	0.303	2.244	0.226	2.530	0.161	2.817	0.107	3.101	0.068	3.374
16	0.844	1.086	0.738	1.253	0.633	1.447	0.532	1.664	0.437	1.901	0.349	2.153	0.269	2.416	0.200	2.681	0.142	2.944	0.094	3.201
17	0.873	1.102	0.773	1.255	0.672	1.432	0.574	1.631	0.481	1.847	0.393	2.078	0.313	2.319	0.241	2.566	0.179	2.811	0.127	3.053
18	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.614	1.604	0.522	1.803	0.435	2.015	0.355	2.238	0.282	2.467	0.216	2.697	0.160	2.925
19	0.928	1.133	0.835	1.264	0.742	1.416	0.650	1.583	0.561	1.767	0.476	1.963	0.396	2.169	0.322	2.381	0.255	2.597	0.196	2.813
20	0.952	1.147	0.862	1.270	0.774	1.410	0.684	1.567	0.598	1.736	0.515	1.918	0.436	2.110	0.362	2.308	0.294	2.510	0.232	2.174
21	0.975	1.161	0.889	1.276	0.803	1.408	0.718	1.554	0.634	1.712	0.552	1.881	0.474	2.059	0.400	2.244	0.331	2.434	0.268	2.625
22	0.997	1.174	0.915	1.284	0.832	1.407	0.748	1.543	0.666	1.691	0.587	1.849	0.510	2.015	0.437	2.188	0.368	2.367	0.304	2.548
23	1.017	1.186	0.938	1.290	0.858	1.407	0.777	1.535	0.699	1.674	0.620	1.821	0.545	1.977	0.473	2.140	0.404	2.308	0.340	2.479
24	1.037	1.199	0.959	1.298	0.881	1.407	0.805	1.527	0.728	1.659	0.652	1.797	0.578	1.944	0.507	2.097	0.439	2.255	0.375	2.417
25	1.055	1.210	0.981	1.305	0.906	1.408	0.832	1.521	0.756	1.645	0.682	1.776	0.610	1.915	0.540	2.059	0.473	2.209	0.409	2.362
26	1.072	1.222	1.000	1.311	0.928	1.410	0.855	1.517	0.782	1.635	0.711	1.759	0.640	1.889	0.572	2.026	0.505	2.168	0.441	2.313
27	1.088	1.232	1.019	1.318	0.948	1.413	0.878	1.514	0.808	1.625	0.738	1.743	0.669	1.867	0.602	1.997	0.536	2.131	0.473	2.269
28	1.104	1.244	1.036	1.325	0.969	1.414	0.901	1.512	0.832	1.618	0.764	1.729	0.696	1.847	0.630	1.970	0.566	2.098	0.504	2.229
29	1.119	1.254	1.053	1.332	0.988	1.418	0.921	1.511	0.855	1.611	0.788	1.718	0.723	1.830	0.658	1.947	0.595	2.068	0.533	2.193
30	1.134	1.264	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.510	0.877	1.606	0.812	1.707	0.748	1.814	0.684	1.925	0.622	2.041	0.562	2.160
31	1.147	1.274	1.085	1.345	1.022	1.425	0.960	1.509	0.897	1.601	0.834	1.698	0.772	1.800	0.710	1.906	0.649	2.017	0.589	2.131
32	1.160	1.283	1.100	1.351	1.039	1.428	0.978	1.509	0.917	1.597	0.856	1.690	0.794	1.788	0.734	1.889	0.674	1.995	0.615	2.104
33	1.171	1.291	1.114	1.358	1.055	1.432	0.995	1.510	0.935	1.594	0.876	1.683	0.816	1.776	0.757	1.874	0.698	1.975	0.641	2.080
34	1.184	1.298	1.128	1.364	1.070	1.436	1.012	1.511	0.954	1.591	0.896	1.677	0.837	1.766	0.779	1.860	0.722	1.957	0.665	2.057
35	1.195	1.307	1.141	1.370	1.085	1.439	1.028	1.512	0.971	1.589	0.914	1.671	0.857	1.757	0.800	1.847	0.744	1.940	0.689	2.037
36	1.205	1.315	1.153	1.376	1.098	1.442	1.043	1.513	0.987	1.587	0.932	1.666	0.877	1.749	0.821	1.836	0.766	1.925	0.711	2.018
37	1.217	1.322	1.164	1.383	1.112	1.446	1.058	1.514	1.004	1.585	0.950	1.662	0.895	1.742	0.841	1.825	0.787	1.911	0.733	2.001
38	1.227	1.330	1.176	1.388	1.124	1.449	1.072	1.515	1.019	1.584	0.966	1.658	0.913	1.735	0.860	1.816	0.807	1.899	0.754	1.985
39	1.237	1.337	1.187	1.392	1.137	1.452	1.085	1.517	1.033	1.583	0.982	1.655	0.930	1.729	0.878	1.807	0.826	1.887	0.774	1.970
40	1.246	1.344	1.197	1.398	1.149	1.456	1.098	1.518	1.047	1.583	0.997	1.652	0.946	1.724	0.895	1.799	0.844	1.876	0.749	1.956
45	1.288	1.376	1.245	1.424	1.201	1.474	1.156	1.528	1.111	1.583	1.065	1.643	1.019	1.704	0.974	1.768	0.927	1.834	0.881	1.902
50	1.324	1.403	1.285	1.445	1.245	1.491	1.206	1.537	1.164	1.587	1.123	1.639	1.081	1.692	1.039	1.748	0.997	1.805	0.955	1.864
55	1.356	1.428	1.320	1.466	1.284	1.505	1.246	1.548	1.209	1.592	1.172	1.638	1.134	1.685	1.095	1.734	1.057	1.785	1.018	1.837
60	1.382	1.449	1.351	1.484	1.317	1.520	1.283	1.559	1.248	1.598	1.214	1.639	1.179	1.682	1.144	1.726	1.108	1.771	1.072	1.817
65	1.407	1.467	1.377	1.500	1.346	1.534	1.314	1.568	1.283	1.604	1.251	1.642	1.218	1.680	1.186	1.720	1.153	1.761	1.120	1.802
70	1.429	1.485	1.400	1.514	1.372	1.546	1.343	1.577	1.313	1.611	1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
75	1.448	1.501	1.422	1.529	1.395	1.557	1.368	1.586	1.340	1.617	1.313	1.649	1.284	1.682	1.256	1.714	1.227	1.748	1.199	1.783
80	1.465	1.514	1.440	1.541	1.416	1.568	1.390	1.595	1.364	1.624	1.338	1.653	1.312	1.683	1.285	1.714	1.259	1.745	1.232	1.777
85	1.481	1.529	1.458	1.553	1.434	1.577	1.411	1.603	1.386	1.630	1.362	1.657	1.337	1.685	1.312	1.714	1.287	1.743	1.262	1.773
90	1.496	1.541	1.474	1.563	1.452	1.587	1.429	1.611	1.406	1.636	1.383	1.661	1.360	1.687	1.336	1.714	1.312	1.741	1.288	1.769
95	1.510	1.552	1.489	1.573	1.468	1.596	1.446	1.618	1.425	1.641	1.403	1.666	1.381	1.690	1.358	1.715	1.336	1.741	1.313	1.767
100	1.522	1.562	1.502	1.582	1.482	1.604	1.461	1.625	1.441	1.647	1.421	1.670	1.400	1.693	1.378	1.717	1.357	1.741	1.335	1.765
150	1.611	1.637	1.598	1.651	1.584	1.665	1.571	1.679	1.557	1.693	1.543	1.708	1.530	1.722	1.515	1.737	1.501	1.752	1.486	1.767
200	1.664	1.684	1.653	1.693	1.643	1.704	1.633	1.715	1.623	1.725	1.613	1.735	1.603	1.746	1.592	1.757	1.582	1.768	1.571	1.779

*k' is the number of regressors excluding the intercept

	k'*=11		k'=12		k'=13		k'=14		k'=15		k'=16		k'=17		k'=18		k'=19		k'=20	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
16	0.060	3.446	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	0.084	3.286	0.053	3.506	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	0.113	3.146	0.075	3.358	0.047	3.557	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
19	0.145	3.023	0.102	3.227	0.067	3.420	0.043	3.601	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
20	0.178	2.914	0.131	3.109	0.092	3.297	0.061	3.474	0.038	3.639	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
21	0.212	2.817	0.162	3.004	0.119	3.185	0.084	3.358	0.055	3.521	0.035	3.671	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
22	0.246	2.729	0.194	2.909	0.148	3.084	0.109	3.252	0.077	3.412	0.050	3.562	0.032	3.700	-----	-----	-----	-----	-----	-----
23	0.281	2.651	0.227	2.822	0.178	2.991	0.136	3.155	0.100	3.311	0.070	3.459	0.046	3.597	0.029	3.725	-----	-----	-----	-----
24	0.315	2.580	0.260	2.744	0.209	2.906	0.165	3.065	0.125	3.218	0.092	3.363	0.065	3.501	0.043	3.629	0.027	3.747	-----	-----
25	0.348	2.517	0.292	2.674	0.240	2.829	0.194	2.982	0.152	3.131	0.116	3.274	0.085	3.410	0.060	3.538	0.039	3.657	0.025	3.766
26	0.381	2.460	0.324	2.610	0.272	2.758	0.224	2.906	0.180	3.050	0.141	3.191	0.107	3.325	0.079	3.452	0.055	3.572	0.036	3.682
27	0.413	2.409	0.356	2.552	0.303	2.694	0.253	2.836	0.208	2.976	0.167	3.113	0.131	3.245	0.100	3.371	0.073	3.490	0.051	3.602
28	0.444	2.363	0.387	2.499	0.333	2.635	0.283	2.772	0.237	2.907	0.194	3.040	0.156	3.169	0.122	3.294	0.093	3.412	0.068	3.524
29	0.474	2.321	0.417	2.451	0.363	2.582	0.313	2.713	0.266	2.843	0.222	2.972	0.182	3.098	0.146	3.220	0.114	3.338	0.087	3.450
30	0.503	2.283	0.447	2.407	0.393	2.533	0.342	2.659	0.294	2.785	0.249	2.909	0.208	3.032	0.171	3.152	0.137	3.267	0.107	3.379
31	0.531	2.248	0.475	2.367	0.422	2.487	0.371	2.609	0.322	2.730	0.277	2.851	0.234	2.970	0.193	3.087	0.160	3.201	0.128	3.311
32	0.558	2.216	0.503	2.330	0.450	2.446	0.399	2.563	0.350	2.680	0.304	2.797	0.261	2.912	0.221	3.026	0.184	3.137	0.151	3.246
33	0.585	2.187	0.530	2.296	0.477	2.408	0.426	2.520	0.377	2.633	0.331	2.746	0.287	2.858	0.246	2.969	0.209	3.078	0.174	3.184
34	0.610	2.160	0.556	2.266	0.503	2.373	0.452	2.481	0.404	2.590	0.357	2.699	0.313	2.808	0.272	2.915	0.233	3.022	0.197	3.126
35	0.634	2.136	0.581	2.237	0.529	2.340	0.478	2.444	0.430	2.550	0.383	2.655	0.339	2.761	0.297	2.865	0.257	2.969	0.221	3.071
36	0.658	2.113	0.605	2.210	0.554	2.310	0.504	2.410	0.455	2.512	0.409	2.614	0.364	2.717	0.322	2.818	0.282	2.919	0.244	3.019
37	0.680	2.092	0.628	2.186	0.578	2.282	0.528	2.379	0.480	2.477	0.434	2.576	0.389	2.675	0.347	2.774	0.306	2.872	0.268	2.969
38	0.702	2.073	0.651	2.164	0.601	2.256	0.552	2.350	0.504	2.445	0.458	2.540	0.414	2.637	0.371	2.733	0.330	2.828	0.291	2.923
39	0.723	2.055	0.673	2.143	0.623	2.232	0.575	2.323	0.528	2.414	0.482	2.507	0.438	2.600	0.395	2.694	0.354	2.787	0.315	2.879
40	0.744	2.039	0.694	2.123	0.645	2.210	0.597	2.297	0.551	2.386	0.505	2.476	0.461	2.566	0.418	2.657	0.377	2.748	0.338	2.838
45	0.835	1.972	0.790	2.044	0.744	2.118	0.700	2.193	0.655	2.269	0.612	2.346	0.570	2.424	0.528	2.503	0.488	2.582	0.448	2.661
50	0.913	1.925	0.871	1.987	0.829	2.051	0.787	2.116	0.746	2.182	0.705	2.250	0.665	2.318	0.625	2.387	0.586	2.456	0.548	2.526
55	0.979	1.891	0.940	1.945	0.902	2.002	0.863	2.059	0.825	2.117	0.786	2.176	0.748	2.237	0.711	2.298	0.674	2.359	0.637	2.421
60	1.037	1.865	1.001	1.914	0.965	1.964	0.929	2.015	0.893	2.067	0.857	2.120	0.822	2.173	0.786	2.227	0.751	2.283	0.716	2.338
65	1.087	1.845	1.053	1.889	1.020	1.934	0.986	1.980	0.953	2.027	0.919	2.075	0.886	2.123	0.852	2.172	0.819	2.221	0.789	2.272
70	1.131	1.831	1.099	1.870	1.068	1.911	1.037	1.953	1.005	1.995	0.974	2.038	0.943	2.082	0.911	2.127	0.880	2.172	0.849	2.217
75	1.170	1.819	1.141	1.856	1.111	1.893	1.082	1.931	1.052	1.970	1.023	2.009	0.993	2.049	0.964	2.090	0.934	2.131	0.905	2.172
80	1.205	1.810	1.177	1.844	1.150	1.878	1.122	1.913	1.094	1.949	1.066	1.984	1.039	2.022	1.011	2.059	0.983	2.097	0.955	2.135
85	1.236	1.803	1.210	1.834	1.184	1.866	1.158	1.898	1.132	1.931	1.106	1.965	1.080	1.999	1.053	2.033	1.027	2.068	1.000	2.104
90	1.264	1.798	1.240	1.827	1.215	1.856	1.191	1.886	1.166	1.917	1.141	1.948	1.116	1.979	1.091	2.012	1.066	2.044	1.041	2.077
95	1.290	1.793	1.267	1.821	1.244	1.848	1.221	1.876	1.197	1.905	1.174	1.943	1.150	1.963	1.126	1.993	1.102	2.023	1.079	2.054
100	1.314	1.790	1.292	1.816	1.270	1.841	1.248	1.868	1.225	1.895	1.203	1.922	1.181	1.949	1.158	1.977	1.136	2.006	1.113	2.034
150	1.473	1.783	1.458	1.799	1.444	1.814	1.429	1.830	1.414	1.847	1.400	1.863	1.385	1.880	1.370	1.897	1.355	1.913	1.340	1.931
200	1.561	1.791	1.550	1.801	1.539	1.813	1.528	1.824	1.518	1.836	1.507	1.847	1.495	1.860	1.484	1.871	1.474	1.883	1.462	1.896

*k' is the number of regressors excluding the intercept

Table A-2

Models with an intercept (from Savin and White)

Durbin-Watson Statistic: 5 Per Cent Significance Points of dL and dU

	k'*=1		**k'=2**		**k'=3**		**k'=4**		**k'=5**		**k'=6**		**k'=7**		**k'=8**		**k'=9**		**k'=10**	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.610	1.400	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.700	1.356	0.467	1.896	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.380	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	-----	-----	-----	-----
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	-----	-----
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.471	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.258	0.502	2.461	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.290	0.546	2.461	0.461	2.633	0.380	2.806
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.750	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.959	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.649	2.431
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.681	2.396
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.796	2.281
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.079	1.891	1.015	1.978	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.876	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.197
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.149
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.838	1.369	1.874	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.720	1.747	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.846	1.608	1.862	1.593	1.877
200	1.758	1.779	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.809	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

*k' is the number of regressors excluding the intercept

	k'*=11		k'=12		k'=13		k'=14		k'=15		k'=16		k'=17		k'=18		k'=19		k'=20	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
16	0.098	3.503	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	0.138	3.378	0.087	3.557	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
20	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542	0.063	3.676	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
21	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448	0.091	3.583	0.058	3.705	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
22	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358	0.120	3.495	0.083	3.619	0.052	3.731	-----	-----	-----	-----	-----	-----
23	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272	0.153	3.409	0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753	-----	-----	-----	-----
24	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193	0.186	3.327	0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773	-----	-----
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119	0.221	3.251	0.172	3.376	0.130	3.494	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
26	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051	0.256	3.179	0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987	0.291	3.112	0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
28	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.050	0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
29	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874	0.359	2.992	0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
30	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823	0.392	2.937	0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
31	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776	0.425	2.887	0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
32	0.703	2.411	0.638	2.517	0.576	2.625	0.515	2.733	0.457	2.840	0.401	2.946	0.349	3.050	0.299	3.153	0.253	3.252	0.211	3.348
33	0.731	2.382	0.668	2.484	0.606	2.588	0.546	2.692	0.488	2.796	0.432	2.899	0.379	3.000	0.329	3.100	0.283	3.198	0.239	3.293
34	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.554	0.575	2.654	0.518	2.754	0.462	2.854	0.409	2.954	0.359	3.051	0.312	3.147	0.267	3.240
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619	0.547	2.716	0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
36	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492	0.631	2.586	0.575	2.680	0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
37	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646	0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
38	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526	0.628	2.614	0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
39	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499	0.653	2.585	0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
40	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473	0.678	2.557	0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.829	0.430	2.974
45	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367	0.788	2.439	0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
50	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287	0.882	2.350	0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
55	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225	0.961	2.281	0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
60	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227	0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
65	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138	1.088	2.183	1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	2.371	0.908	2.419
70	1.272	1.987	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.148	1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
75	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043	1.215	2.080	1.184	2.118	1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
80	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093	1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040	1.260	2.073	1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
90	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995	1.318	2.025	1.292	2.055	1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
95	1.418	1.930	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	2.012	1.321	2.040	1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186
100	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000	1.347	2.026	1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
150	1.579	1.892	1.564	1.908	1.550	1.924	1.535	1.940	1.519	1.956	1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
200	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919	1.610	1.931	1.599	1.943	1.588	1.955	1.576	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

*K' is the number of regressors excluding the intercept

Table A-3

Models with no intercept (from Farebrother): Positive serial correlation

Durbin-Watson One Per Cent Minimal Bound

N	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12	K=13	K=14	K=15	K=16	K=17	K=18	K=19	K=20	K=21
2	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	0.034	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	0.127	0.022	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	0.233	0.089	0.014	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	0.322	0.175	0.065	0.010	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.398	0.253	0.135	0.049	0.008	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.469	0.324	0.202	0.106	0.038	0.006	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.534	0.394	0.268	0.164	0.086	0.031	0.005	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.591	0.457	0.333	0.223	0.136	0.070	0.025	0.004	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.643	0.515	0.394	0.284	0.189	0.114	0.059	0.021	0.003	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.691	0.568	0.451	0.341	0.244	0.161	0.097	0.050	0.018	0.003	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	0.733	0.617	0.503	0.396	0.298	0.212	0.139	0.083	0.043	0.015	0.002	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
14	0.773	0.662	0.552	0.448	0.350	0.262	0.185	0.121	0.072	0.037	0.013	0.002	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
15	0.809	0.703	0.598	0.496	0.400	0.311	0.232	0.163	0.107	0.063	0.032	0.011	0.002	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
16	0.842	0.741	0.640	0.541	0.447	0.358	0.278	0.206	0.145	0.094	0.056	0.028	0.010	0.002	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	0.873	0.776	0.679	0.583	0.491	0.404	0.323	0.249	0.184	0.129	0.084	0.050	0.025	0.009	0.001	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	0.901	0.808	0.715	0.623	0.533	0.447	0.366	0.292	0.225	0.166	0.116	0.075	0.044	0.023	0.008	0.001	0.000	-----	-----	-----	-----	-----
19	0.928	0.839	0.749	0.660	0.572	0.488	0.408	0.333	0.265	0.204	0.150	0.105	0.068	0.040	0.020	0.007	0.001	0.000	-----	-----	-----	-----
20	0.952	0.867	0.780	0.694	0.609	0.527	0.448	0.374	0.304	0.241	0.185	0.136	0.095	0.062	0.036	0.018	0.006	0.001	0.000	-----	-----	-----
21	0.976	0.893	0.810	0.727	0.644	0.564	0.486	0.413	0.343	0.279	0.221	0.169	0.124	0.087	0.056	0.033	0.017	0.006	0.001	0.000	-----	-----
22	0.997	0.918	0.838	0.757	0.677	0.599	0.523	0.450	0.381	0.316	0.257	0.203	0.155	0.114	0.079	0.051	0.030	0.015	0.005	0.001	0.000	-----
23	1.018	0.942	0.864	0.786	0.709	0.632	0.558	0.486	0.417	0.352	0.292	0.237	0.187	0.143	0.104	0.073	0.047	0.027	0.014	0.005	0.001	0.000
24	1.037	0.964	0.889	0.813	0.738	0.664	0.591	0.520	0.452	0.387	0.327	0.270	0.219	0.172	0.131	0.096	0.067	0.043	0.025	0.013	0.004	0.001
25	1.056	0.984	0.912	0.839	0.766	0.693	0.622	0.553	0.486	0.421	0.361	0.304	0.251	0.203	0.160	0.122	0.089	0.062	0.040	0.023	0.012	0.004
26	1.073	1.004	0.934	0.863	0.792	0.722	0.652	0.584	0.518	0.454	0.394	0.336	0.283	0.233	0.189	0.148	0.113	0.083	0.057	0.037	0.022	0.011
27	1.089	1.023	0.955	0.886	0.817	0.749	0.681	0.614	0.549	0.486	0.426	0.368	0.314	0.264	0.218	0.176	0.138	0.105	0.077	0.053	0.034	0.020
28	1.105	1.040	0.974	0.908	0.841	0.774	0.708	0.643	0.579	0.517	0.457	0.400	0.345	0.294	0.247	0.204	0.164	0.129	0.098	0.071	0.050	0.032
29	1.120	1.057	0.993	0.929	0.864	0.798	0.734	0.670	0.607	0.546	0.487	0.430	0.376	0.324	0.276	0.232	0.191	0.154	0.120	0.091	0.067	0.046
30	1.134	1.073	1.011	0.948	0.885	0.822	0.759	0.696	0.635	0.574	0.516	0.460	0.405	0.354	0.305	0.260	0.217	0.179	0.144	0.113	0.086	0.062
31	1.147	1.088	1.028	0.967	0.905	0.844	0.782	0.721	0.661	0.602	0.544	0.488	0.434	0.383	0.334	0.288	0.244	0.205	0.168	0.135	0.106	0.080
32	1.160	1.103	1.044	0.985	0.925	0.865	0.805	0.745	0.686	0.628	0.571	0.516	0.462	0.411	0.362	0.315	0.271	0.230	0.193	0.158	0.127	0.100
33	1.173	1.117	1.060	1.002	0.944	0.885	0.826	0.768	0.710	0.653	0.597	0.542	0.489	0.438	0.389	0.342	0.298	0.256	0.218	0.182	0.149	0.120
34	1.185	1.130	1.075	1.018	0.961	0.904	0.847	0.790	0.733	0.677	0.622	0.568	0.516	0.465	0.416	0.369	0.324	0.282	0.243	0.206	0.172	0.141
35	1.196	1.143	1.089	1.034	0.978	0.923	0.867	0.811	0.755	0.700	0.646	0.593	0.541	0.491	0.442	0.395	0.350	0.308	0.268	0.230	0.195	0.163
36	1.207	1.155	1.102	1.049	0.995	0.940	0.886	0.831	0.777	0.723	0.669	0.617	0.566	0.516	0.467	0.421	0.376	0.333	0.292	0.254	0.218	0.185
37	1.217	1.167	1.116	1.063	1.010	0.957	0.904	0.850	0.797	0.744	0.692	0.640	0.590	0.540	0.492	0.446	0.401	0.358	0.317	0.278	0.241	0.207
38	1.228	1.178	1.128	1.077	1.026	0.974	0.921	0.869	0.817	0.765	0.713	0.663	0.613	0.564	0.516	0.470	0.425	0.382	0.341	0.302	0.265	0.230
39	1.237	1.189	1.140	1.090	1.040	0.989	0.938	0.887	0.836	0.785	0.734	0.684	0.635	0.587	0.540	0.494	0.449	0.406	0.365	0.325	0.288	0.252
40	1.247	1.200	1.152	1.103	1.054	1.004	0.954	0.904	0.854	0.804	0.754	0.705	0.657	0.609	0.562	0.517	0.473	0.430	0.388	0.349	0.311	0.275
45	1.289	1.247	1.204	1.160	1.116	1.071	1.026	0.981	0.936	0.890	0.845	0.800	0.755	0.710	0.666	0.623	0.581	0.539	0.499	0.459	0.421	0.384
50	1.325	1.287	1.248	1.208	1.168	1.128	1.087	1.046	1.004	0.963	0.921	0.880	0.838	0.797	0.756	0.715	0.675	0.636	0.597	0.559	0.521	0.485
55	1.356	1.321	1.286	1.250	1.213	1.176	1.139	1.101	1.063	1.025	0.987	0.948	0.910	0.872	0.833	0.796	0.758	0.721	0.684	0.647	0.611	0.576
60	1.383	1.351	1.319	1.285	1.252	1.218	1.183	1.149	1.114	1.078	1.043	1.008	0.972	0.936	0.901	0.865	0.830	0.795	0.760	0.725	0.691	0.657
65	1.408	1.378	1.348	1.317	1.286	1.254	1.222	1.190	1.158	1.125	1.092	1.059	1.026	0.993	0.960	0.927	0.894	0.861	0.828	0.795	0.762	0.730
70	1.429	1.401	1.373	1.345	1.316	1.286	1.257	1.227	1.197	1.166	1.136	1.105	1.074	1.043	1.012	0.981	0.950	0.919	0.888	0.857	0.826	0.795
75	1.448	1.423	1.396	1.369	1.342	1.315	1.287	1.260	1.231	1.203	1.174	1.146	1.117	1.088	1.058	1.029	1.000	0.971	0.941	0.912	0.883	0.854
80	1.466	1.442	1.417	1.392	1.367	1.341	1.315	1.289	1.262	1.236	1.209	1.182	1.155	1.127	1.100	1.072	1.045	1.017	0.989	0.962	0.934	0.907
85	1.482	1.459	1.436	1.412	1.388	1.364	1.340	1.315	1.290	1.265	1.240	1.214	1.189	1.163	1.137	1.111	1.085	1.059	1.033	1.006	0.980	0.954
90	1.497	1.475	1.453	1.431	1.408	1.385	1.362	1.339	1.315	1.292	1.268	1.244	1.220	1.195	1.171	1.146	1.121	1.097	1.072	1.047	1.022	0.997
95	1.510	1.490	1.469	1.448	1.426	1.405	1.383	1.361	1.338	1.316	1.293	1.271	1.248	1.225	1.201	1.178	1.155	1.131	1.108	1.084	1.060	1.037
100	1.523	1.503	1.483	1.463	1.443	1.422	1.402	1.381	1.359	1.338	1.317	1.295	1.273	1.251	1.229	1.207	1.185	1.162	1.140	1.118	1.095	1.072
150	1.611	1.598	1.585	1.571	1.558	1.544	1.530	1.516	1.502	1.488	1.474	1.460	1.445	1.431	1.416	1.402	1.387	1.372	1.357	1.342	1.327	1.312
200	1.664	1.654	1.644	1.634	1.624	1.613	1.603	1.593	1.582	1.572	1.561	1.551	1.540	1.529	1.519	1.508	1.497	1.486	1.475	1.434	1.453	1.442

Table A-4
Models with no intercept (from Farebrother): Positive serial correlation

Durbin-Watson Five Per Cent Minimal Bound

N	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12	K=13	K=14	K=15	K=16	K=17	K=18	K=19	K=20	K=21
2	0.012	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	0.168	0.006	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	0.355	0.105	0.004	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	0.478	0.248	0.070	0.002	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	0.584	0.358	0.180	0.050	0.002	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.677	0.462	0.275	0.136	0.037	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.754	0.556	0.371	0.217	0.106	0.029	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.820	0.635	0.460	0.303	0.175	0.085	0.023	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.877	0.706	0.539	0.385	0.251	0.143	0.069	0.019	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.927	0.768	0.610	0.460	0.326	0.211	0.120	0.058	0.016	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.972	0.823	0.674	0.530	0.397	0.279	0.180	0.101	0.049	0.013	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	1.012	0.872	0.731	0.593	0.464	0.345	0.241	0.154	0.087	0.042	0.011	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
14	1.047	0.916	0.783	0.651	0.525	0.408	0.302	0.210	0.134	0.075	0.036	0.010	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
15	1.079	0.955	0.829	0.704	0.583	0.467	0.361	0.266	0.185	0.118	0.066	0.031	0.008	0.001	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
16	1.109	0.992	0.872	0.752	0.635	0.523	0.418	0.322	0.237	0.164	0.104	0.058	0.028	0.007	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	1.136	1.024	0.911	0.797	0.684	0.575	0.472	0.376	0.288	0.211	0.146	0.093	0.052	0.025	0.007	0.000	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	1.160	1.055	0.946	0.837	0.729	0.624	0.523	0.427	0.339	0.260	0.190	0.131	0.083	0.046	0.022	0.006	0.000	-----	-----	-----	-----	-----
19	1.183	1.082	0.979	0.875	0.771	0.669	0.570	0.476	0.388	0.307	0.235	0.171	0.118	0.075	0.041	0.020	0.005	0.000	-----	-----	-----	-----
20	1.204	1.108	1.010	0.910	0.810	0.711	0.615	0.523	0.436	0.354	0.280	0.213	0.156	0.107	0.067	0.037	0.018	0.005	0.000	-----	-----	-----
21	1.224	1.132	1.038	0.942	0.846	0.751	0.657	0.567	0.481	0.400	0.324	0.256	0.195	0.142	0.097	0.061	0.034	0.016	0.004	0.000	-----	-----
22	1.242	1.154	1.064	0.972	0.879	0.787	0.697	0.609	0.524	0.443	0.368	0.298	0.235	0.178	0.130	0.089	0.056	0.031	0.015	0.004	0.000	-----
23	1.259	1.175	1.088	1.000	0.911	0.822	0.734	0.648	0.565	0.485	0.410	0.339	0.274	0.216	0.164	0.119	0.081	0.051	0.028	0.014	0.004	0.000
24	1.275	1.194	1.111	1.026	0.940	0.854	0.769	0.685	0.604	0.525	0.450	0.380	0.314	0.254	0.199	0.151	0.110	0.075	0.047	0.026	0.012	0.003
25	1.290	1.212	1.132	1.050	0.967	0.884	0.802	0.720	0.641	0.563	0.489	0.419	0.353	0.291	0.235	0.184	0.140	0.101	0.069	0.044	0.024	0.011
26	1.304	1.229	1.152	1.073	0.993	0.913	0.833	0.753	0.676	0.600	0.527	0.457	0.390	0.328	0.271	0.218	0.171	0.130	0.094	0.064	0.040	0.022
27	1.318	1.245	1.171	1.094	1.017	0.940	0.862	0.785	0.709	0.635	0.563	0.493	0.427	0.365	0.306	0.252	0.203	0.159	0.120	0.087	0.060	0.037
28	1.330	1.260	1.188	1.115	1.040	0.965	0.889	0.815	0.741	0.668	0.597	0.529	0.463	0.400	0.341	0.286	0.236	0.190	0.148	0.112	0.081	0.055
29	1.342	1.275	1.205	1.134	1.062	0.989	0.916	0.843	0.770	0.699	0.630	0.562	0.497	0.435	0.376	0.320	0.268	0.221	0.177	0.139	0.105	0.076
30	1.354	1.288	1.221	1.152	1.082	1.011	0.940	0.869	0.799	0.729	0.661	0.595	0.530	0.468	0.409	0.353	0.301	0.252	0.207	0.166	0.130	0.098
31	1.365	1.301	1.236	1.169	1.101	1.033	0.964	0.895	0.826	0.758	0.691	0.626	0.562	0.501	0.442	0.386	0.333	0.283	0.237	0.195	0.156	0.122
32	1.375	1.313	1.250	1.185	1.120	1.053	0.986	0.919	0.852	0.785	0.720	0.653	0.593	0.532	0.474	0.418	0.364	0.314	0.267	0.223	0.183	0.147
33	1.385	1.325	1.264	1.201	1.137	1.072	1.007	0.942	0.876	0.811	0.747	0.684	0.623	0.563	0.504	0.449	0.395	0.344	0.297	0.252	0.211	0.173
34	1.394	1.336	1.277	1.216	1.153	1.091	1.027	0.963	0.900	0.836	0.774	0.712	0.651	0.592	0.534	0.479	0.425	0.374	0.326	0.280	0.238	0.199
35	1.403	1.347	1.289	1.230	1.169	1.108	1.046	0.984	0.922	0.860	0.799	0.738	0.678	0.620	0.563	0.508	0.455	0.404	0.355	0.309	0.266	0.225
36	1.412	1.357	1.301	1.243	1.184	1.125	1.064	1.004	0.943	0.883	0.823	0.763	0.705	0.647	0.591	0.536	0.483	0.432	0.384	0.337	0.293	0.252
37	1.420	1.367	1.312	1.256	1.199	1.141	1.082	1.023	0.964	0.905	0.846	0.787	0.730	0.673	0.618	0.564	0.511	0.460	0.412	0.365	0.321	0.279
38	1.428	1.376	1.323	1.268	1.212	1.156	1.099	1.041	0.983	0.925	0.868	0.811	0.754	0.698	0.644	0.590	0.538	0.488	0.439	0.392	0.347	0.305
39	1.436	1.385	1.333	1.280	1.225	1.170	1.114	1.058	1.002	0.945	0.889	0.833	0.778	0.723	0.669	0.616	0.564	0.514	0.466	0.419	0.374	0.331
40	1.443	1.394	1.343	1.291	1.238	1.184	1.130	1.075	1.020	0.965	0.909	0.854	0.800	0.746	0.693	0.641	0.590	0.540	0.492	0.445	0.400	0.357
45	1.476	1.432	1.387	1.341	1.294	1.246	1.197	1.148	1.099	1.049	1.000	0.950	0.900	0.851	0.802	0.753	0.706	0.658	0.612	0.567	0.523	0.480
50	1.504	1.464	1.424	1.382	1.340	1.297	1.253	1.209	1.164	1.120	1.075	1.029	0.984	0.939	0.894	0.849	0.804	0.760	0.717	0.674	0.631	0.590
55	1.528	1.492	1.455	1.417	1.379	1.340	1.300	1.260	1.219	1.179	1.138	1.096	1.055	1.013	0.972	0.930	0.889	0.848	0.807	0.766	0.726	0.687
60	1.549	1.516	1.482	1.447	1.412	1.376	1.340	1.303	1.266	1.229	1.191	1.153	1.115	1.077	1.038	1.000	0.962	0.923	0.885	0.847	0.810	0.772
65	1.568	1.537	1.505	1.474	1.441	1.408	1.375	1.341	1.307	1.272	1.238	1.202	1.167	1.132	1.096	1.061	1.025	0.989	0.953	0.918	0.882	0.847
70	1.584	1.555	1.526	1.497	1.467	1.436	1.405	1.374	1.342	1.310	1.278	1.245	1.213	1.180	1.147	1.113	1.080	1.047	1.013	0.980	0.947	0.914
75	1.599	1.572	1.545	1.517	1.489	1.461	1.432	1.403	1.373	1.344	1.313	1.283	1.253	1.222	1.191	1.160	1.129	1.098	1.066	1.035	1.004	0.972
80	1.612	1.587	1.561	1.536	1.509	1.483	1.456	1.429	1.401	1.373	1.345	1.317	1.288	1.259	1.230	1.201	1.172	1.143	1.113	1.084	1.054	1.025
85	1.624	1.600	1.576	1.552	1.527	1.502	1.477	1.452	1.426	1.400	1.373	1.347	1.320	1.293	1.266	1.238	1.211	1.183	1.155	1.128	1.100	1.072
90	1.635	1.613	1.590	1.567	1.544	1.520	1.497	1.472	1.448	1.423	1.399	1.373	1.348	1.323	1.297	1.271	1.245	1.219	1.193	1.167	1.141	1.114
95	1.645	1.624	1.603	1.581	1.559	1.537	1.514	1.491	1.468	1.445	1.422	1.398	1.374	1.350	1.326	1.301	1.277	1.252	1.227	1.202	1.177	1.152
100	1.654	1.634	1.614	1.593	1.573	1.551	1.530	1.508	1.487	1.465	1.442	1.420	1.397	1.374	1.352	1.328	1.305	1.282	1.258	1.235	1.211	1.187
150	1.720	1.706	1.693	1.679	1.666	1.652	1.638	1.624	1.609	1.595	1.580	1.566	1.551	1.536	1.521	1.506	1.491	1.476	1.461	1.445	1.430	1.414
200	1.759	1.748	1.738	1.728	1.718	1.708	1.697	1.687	1.676	1.666	1.655	1.644	1.633	1.622	1.611	1.600	1.589	1.578	1.567	1.556	1.544	1.533

Table A-5

Models with no intercept (from Farebrother): Negative serial correlation

Durbin-Watson Ninety Five Per Cent Minimal Bound

N	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12	K=13	K=14	K=15	K=16	K=17	K=18	K=19	K=20	K=21
2	1.988	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	2.761	0.994	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	2.871	1.836	0.582	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	2.857	2.178	1.267	0.380	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	2.844	2.320	1.655	0.917	0.266	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	2.828	2.398	1.871	1.283	0.690	0.197	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	2.805	2.453	2.008	1.521	1.017	0.537	0.151	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	2.783	2.483	2.110	1.687	1.251	0.823	0.429	0.120	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	2.762	2.501	2.181	1.816	1.427	1.044	0.678	0.350	0.097	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	2.742	2.511	2.231	1.913	1.569	1.218	0.881	0.567	0.291	0.080	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	2.723	2.516	2.268	1.987	1.682	1.364	1.049	0.752	0.481	0.245	0.068	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	2.705	2.518	2.296	2.044	1.771	1.484	1.193	0.911	0.649	0.413	0.210	0.058	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
14	2.688	2.517	2.316	2.090	1.843	1.582	1.316	1.051	0.797	0.565	0.358	0.181	0.050	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
15	2.672	2.515	2.332	2.126	1.902	1.664	1.419	1.172	0.931	0.703	0.497	0.314	0.158	0.043	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
16	2.657	2.512	2.344	2.155	1.950	1.732	1.506	1.276	1.049	0.829	0.624	0.439	0.277	0.139	0.038	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	2.644	2.508	2.353	2.179	1.990	1.789	1.580	1.367	1.153	0.944	0.743	0.557	0.391	0.246	0.124	0.034	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	2.631	2.504	2.359	2.199	2.024	1.838	1.644	1.445	1.244	1.045	0.852	0.669	0.501	0.351	0.220	0.110	0.030	-----	-----	-----	-----	-----
19	2.618	2.499	2.364	2.215	2.053	1.880	1.699	1.513	1.324	1.136	0.951	0.773	0.605	0.452	0.316	0.198	0.099	0.027	-----	-----	-----	-----
20	2.607	2.494	2.368	2.228	2.077	1.916	1.747	1.573	1.395	1.216	1.040	0.868	0.704	0.550	0.410	0.286	0.179	0.090	0.025	-----	-----	-----
21	2.596	2.489	2.370	2.239	2.098	1.947	1.789	1.625	1.457	1.289	1.120	0.955	0.796	0.644	0.502	0.373	0.260	0.162	0.081	0.022	-----	-----
22	2.585	2.484	2.372	2.249	2.116	1.974	1.825	1.671	1.513	1.353	1.193	1.034	0.880	0.731	0.591	0.460	0.341	0.238	0.148	0.074	0.020	-----
23	2.575	2.479	2.373	2.257	2.131	1.998	1.858	1.712	1.563	1.411	1.258	1.107	0.957	0.813	0.674	0.544	0.422	0.313	0.218	0.136	0.068	0.019
24	2.566	2.474	2.373	2.263	2.145	2.019	1.886	1.749	1.607	1.463	1.318	1.172	1.029	0.888	0.753	0.623	0.502	0.389	0.289	0.201	0.125	0.062
25	2.557	2.470	2.373	2.269	2.156	2.037	1.912	1.782	1.647	1.510	1.371	1.232	1.094	0.958	0.826	0.699	0.578	0.465	0.360	0.267	0.185	0.115
26	1.073	1.004	0.934	0.863	0.792	0.722	0.652	0.584	0.518	0.454	0.394	0.336	0.283	0.233	0.189	0.148	0.113	0.083	0.057	0.037	0.022	0.011
27	1.089	1.023	0.955	0.886	0.817	0.749	0.681	0.614	0.549	0.486	0.426	0.368	0.314	0.264	0.218	0.176	0.138	0.105	0.077	0.053	0.034	0.020
28	1.105	1.040	0.974	0.908	0.841	0.774	0.708	0.643	0.579	0.517	0.457	0.400	0.345	0.294	0.247	0.204	0.164	0.129	0.098	0.071	0.050	0.032
29	1.120	1.057	0.993	0.929	0.864	0.798	0.734	0.670	0.607	0.546	0.487	0.430	0.376	0.324	0.276	0.232	0.191	0.154	0.120	0.091	0.067	0.046
30	1.134	1.073	1.011	0.948	0.885	0.822	0.759	0.696	0.635	0.574	0.516	0.460	0.405	0.354	0.305	0.260	0.217	0.179	0.144	0.113	0.086	0.062
31	1.147	1.088	1.028	0.967	0.905	0.844	0.782	0.721	0.661	0.602	0.544	0.488	0.434	0.383	0.334	0.288	0.244	0.205	0.168	0.135	0.106	0.080
32	1.160	1.103	1.044	0.985	0.925	0.865	0.805	0.745	0.686	0.628	0.571	0.516	0.462	0.411	0.362	0.315	0.271	0.230	0.193	0.158	0.127	0.100
33	1.173	1.117	1.060	1.002	0.944	0.885	0.826	0.768	0.710	0.653	0.597	0.542	0.489	0.438	0.389	0.342	0.298	0.256	0.218	0.182	0.149	0.120
34	1.185	1.130	1.075	1.018	0.961	0.904	0.847	0.790	0.733	0.677	0.622	0.568	0.516	0.465	0.416	0.369	0.324	0.282	0.243	0.206	0.172	0.141
35	1.196	1.143	1.089	1.034	0.978	0.923	0.867	0.811	0.755	0.700	0.646	0.593	0.541	0.491	0.442	0.395	0.350	0.308	0.268	0.230	0.195	0.163
36	1.207	1.155	1.102	1.049	0.995	0.940	0.886	0.831	0.777	0.723	0.669	0.617	0.566	0.516	0.467	0.421	0.376	0.333	0.292	0.254	0.218	0.185
37	1.217	1.167	1.116	1.063	1.010	0.957	0.904	0.850	0.797	0.744	0.692	0.640	0.590	0.540	0.492	0.446	0.401	0.358	0.317	0.278	0.241	0.207
38	1.228	1.178	1.128	1.077	1.026	0.974	0.921	0.869	0.817	0.765	0.713	0.663	0.613	0.564	0.516	0.470	0.425	0.382	0.341	0.302	0.265	0.230
39	1.237	1.189	1.140	1.090	1.040	0.989	0.938	0.887	0.836	0.785	0.734	0.684	0.635	0.587	0.540	0.494	0.449	0.406	0.365	0.325	0.288	0.252
40	1.247	1.200	1.152	1.103	1.054	1.004	0.954	0.904	0.854	0.804	0.754	0.705	0.657	0.609	0.562	0.517	0.473	0.430	0.388	0.349	0.311	0.275
45	1.289	1.247	1.204	1.160	1.116	1.071	1.026	0.981	0.936	0.890	0.845	0.800	0.755	0.710	0.666	0.623	0.581	0.539	0.499	0.459	0.421	0.384
50	1.325	1.287	1.248	1.208	1.168	1.128	1.087	1.046	1.004	0.963	0.921	0.880	0.838	0.797	0.756	0.715	0.675	0.636	0.597	0.559	0.521	0.485
55	1.356	1.321	1.286	1.250	1.213	1.176	1.139	1.101	1.063	1.025	0.987	0.948	0.910	0.872	0.833	0.796	0.758	0.721	0.684	0.647	0.611	0.576
60	1.383	1.351	1.319	1.285	1.252	1.218	1.183	1.149	1.114	1.078	1.043	1.008	0.972	0.936	0.901	0.865	0.830	0.795	0.760	0.725	0.691	0.657
65	1.408	1.378	1.348	1.317	1.286	1.254	1.222	1.190	1.158	1.125	1.092	1.059	1.026	0.993	0.960	0.927	0.894	0.861	0.828	0.795	0.762	0.730
70	1.429	1.401	1.373	1.345	1.316	1.286	1.257	1.227	1.197	1.166	1.136	1.105	1.074	1.043	1.012	0.981	0.950	0.919	0.888	0.857	0.826	0.795
75	1.448	1.423	1.396	1.369	1.342	1.315	1.287	1.260	1.231	1.203	1.174	1.146	1.117	1.088	1.058	1.029	1.000	0.971	0.941	0.912	0.883	0.854
80	1.466	1.442	1.417	1.392	1.367	1.341	1.315	1.289	1.262	1.236	1.209	1.182	1.155	1.127	1.100	1.072	1.045	1.017	0.989	0.962	0.934	0.907
85	1.482	1.459	1.436	1.412	1.388	1.364	1.340	1.315	1.290	1.265	1.240	1.214	1.189	1.163	1.137	1.111	1.085	1.059	1.033	1.006	0.980	0.954
90	1.497	1.475	1.453	1.431	1.408	1.385	1.362	1.339	1.315	1.292	1.268	1.244	1.220	1.195	1.171	1.146	1.121	1.097	1.072	1.047	1.022	0.997
95	1.510	1.490	1.469	1.448	1.426	1.405	1.383	1.361	1.338	1.316	1.293	1.271	1.248	1.225	1.201	1.178	1.155	1.131	1.108	1.084	1.060	1.037
100	1.523	1.503	1.483	1.463	1.443	1.422	1.402	1.381	1.359	1.338	1.317	1.295	1.273	1.251	1.229	1.207	1.185	1.162	1.140	1.118	1.095	1.072
150	1.611	1.598	1.585	1.571	1.558	1.544	1.530	1.516	1.502	1.488	1.474	1.460	1.445	1.431	1.416	1.402	1.387	1.372	1.357	1.342	1.327	1.312
200	1.664	1.654	1.644	1.634	1.624	1.613	1.603	1.593	1.582	1.572	1.561	1.551	1.540	1.529	1.519	1.508	1.497	1.486	1.475	1.464	1.453	1.442

Table A-6

Models with no intercept (from Farebrother): Negative serial correlation

Durbin-Watson Ninety Nine Per Cent Minimal Bound

N	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6	K=7	K=8	K=9	K=10	K=11	K=12	K=13	K=14	K=15	K=16	K=17	K=18	K=19	K=20	K=21
2	1.999	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	2.951	0.999	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	3.221	1.967	0.586	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	3.261	2.462	1.359	0.382	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	3.235	2.682	1.878	0.983	0.268	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	3.198	2.776	2.177	1.459	0.740	0.198	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	3.166	2.817	2.347	1.776	1.158	0.576	0.153	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	3.133	2.837	2.448	1.983	1.465	0.937	0.460	0.121	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	3.101	2.847	2.514	2.121	1.684	1.224	0.773	0.375	0.098	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	3.071	2.847	2.560	2.220	1.842	1.441	1.035	0.647	0.312	0.081	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	3.043	2.843	2.592	2.294	1.961	1.607	1.244	0.885	0.549	0.263	0.069	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	3.017	2.836	2.612	2.349	2.054	1.737	1.410	1.082	0.764	0.471	0.225	0.059	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
14	2.992	2.828	2.626	2.391	2.127	1.842	1.544	1.244	0.948	0.666	0.409	0.195	0.051	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
15	2.969	2.818	2.635	2.423	2.185	1.928	1.656	1.379	1.104	0.837	0.585	0.358	0.170	0.044	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
16	2.948	2.808	2.640	2.447	2.231	1.997	1.749	1.494	1.237	0.985	0.743	0.517	0.316	0.150	0.039	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
17	2.927	2.797	2.643	2.466	2.269	2.055	1.827	1.591	1.351	1.114	0.883	0.664	0.461	0.281	0.133	0.035	-----	-----	-----	-----	-----	-----
18	2.908	2.787	2.644	2.480	2.299	2.102	1.893	1.675	1.451	1.227	1.007	0.796	0.597	0.413	0.251	0.119	0.031	-----	-----	-----	-----	-----
19	2.890	2.776	2.643	2.492	2.324	2.142	1.948	1.746	1.538	1.327	1.118	0.915	0.721	0.539	0.372	0.226	0.107	0.028	-----	-----	-----	-----
20	2.874	2.766	2.641	2.500	2.344	2.176	1.996	1.807	1.613	1.415	1.217	1.022	0.834	0.656	0.489	0.337	0.204	0.096	0.025	-----	-----	-----
21	2.858	2.756	2.638	2.506	2.361	2.204	2.036	1.861	1.678	1.492	1.305	1.119	0.937	0.763	0.598	0.446	0.307	0.185	0.087	0.023	-----	-----
22	2.842	2.746	2.635	2.511	2.375	2.228	2.071	1.907	1.736	1.561	1.384	1.207	1.032	0.862	0.700	0.548	0.408	0.280	0.169	0.080	0.021	-----
23	2.828	2.736	2.631	2.515	2.387	2.249	2.102	1.947	1.786	1.621	1.454	1.285	1.118	0.954	0.796	0.645	0.504	0.374	0.257	0.155	0.073	0.019
24	2.814	2.727	2.627	2.517	2.396	2.267	2.128	1.983	1.831	1.675	1.516	1.356	1.196	1.038	0.884	0.736	0.596	0.465	0.345	0.237	0.143	0.067
25	2.801	2.717	2.623	2.518	2.404	2.282	2.151	2.014	1.871	1.723	1.572	1.420	1.267	1.115	0.966	0.821	0.683	0.552	0.430	0.319	0.218	0.132
26	2.789	2.709	2.618	2.519	2.411	2.295	2.171	2.042	1.906	1.766	1.623	1.478	1.331	1.186	1.042	0.901	0.765	0.635	0.512	0.399	0.295	0.202
27	2.777	2.700	2.614	2.519	2.416	2.306	2.189	2.066	1.938	1.805	1.669	1.530	1.390	1.250	1.111	0.975	0.842	0.714	0.592	0.477	0.371	0.274
28	2.766	2.692	2.609	2.519	2.421	2.316	2.205	2.088	1.966	1.839	1.710	1.577	1.444	1.309	1.176	1.043	0.914	0.788	0.667	0.553	0.445	0.346
29	2.755	2.684	2.604	2.518	2.425	2.325	2.219	2.107	1.991	1.871	1.747	1.621	1.493	1.364	1.235	1.107	0.981	0.858	0.739	0.625	0.517	0.416
30	2.745	2.676	2.600	2.517	2.428	2.332	2.231	2.125	2.014	1.899	1.781	1.660	1.537	1.414	1.290	1.166	1.044	0.924	0.807	0.695	0.587	0.485
31	2.735	2.668	2.595	2.515	2.430	2.339	2.242	2.140	2.035	1.925	1.812	1.696	1.579	1.460	1.340	1.221	1.102	0.986	0.872	0.761	0.654	0.552
32	2.725	2.661	2.590	2.514	2.432	2.344	2.252	2.155	2.053	1.948	1.840	1.729	1.616	1.502	1.387	1.272	1.157	1.043	0.932	0.823	0.718	0.617
33	2.716	2.654	2.586	2.512	2.433	2.349	2.260	2.167	2.070	1.970	1.866	1.759	1.651	1.541	1.430	1.319	1.208	1.097	0.989	0.882	0.779	0.678
34	2.707	2.647	2.581	2.510	2.434	2.353	2.268	2.179	2.086	1.989	1.889	1.787	1.683	1.577	1.470	1.363	1.255	1.148	1.042	0.938	0.836	0.737
35	2.699	2.640	2.576	2.508	2.435	2.357	2.275	2.189	2.100	2.007	1.911	1.813	1.713	1.611	1.507	1.404	1.299	1.196	1.093	0.991	0.891	0.794
36	2.690	2.634	2.572	2.506	2.435	2.360	2.281	2.199	2.113	2.023	1.931	1.837	1.740	1.642	1.542	1.442	1.341	1.240	1.140	1.041	0.943	0.847
37	2.683	2.627	2.567	2.503	2.435	2.363	2.287	2.207	2.124	2.038	1.950	1.859	1.765	1.670	1.574	1.477	1.379	1.282	1.184	1.088	0.992	0.898
38	2.675	2.621	2.563	2.501	2.435	2.365	2.292	2.215	2.135	2.052	1.967	1.879	1.789	1.697	1.604	1.510	1.416	1.321	1.226	1.132	1.039	0.947
39	2.667	2.615	2.559	2.499	2.435	2.367	2.296	2.222	2.145	2.065	1.982	1.898	1.811	1.722	1.632	1.541	1.450	1.358	1.266	1.174	1.083	0.993
40	2.660	2.609	2.555	2.496	2.434	2.369	2.300	2.229	2.154	2.077	1.997	1.915	1.831	1.746	1.659	1.570	1.482	1.392	1.303	1.213	1.124	1.036
45	2.628	2.583	2.535	2.484	2.430	2.374	2.315	2.253	2.190	2.124	2.056	1.986	1.914	1.841	1.767	1.691	1.614	1.537	1.459	1.381	1.302	1.224
50	2.600	2.559	2.516	2.471	2.424	2.374	2.323	2.269	2.214	2.157	2.098	2.037	1.975	1.911	1.847	1.781	1.714	1.646	1.578	1.509	1.439	1.370
55	2.575	2.538	2.500	2.459	2.417	2.373	2.327	2.280	2.231	2.180	2.128	2.075	2.020	1.964	1.907	1.849	1.790	1.730	1.669	1.608	1.546	1.484
60	2.553	2.519	2.484	2.448	2.409	2.370	2.329	2.286	2.242	2.197	2.151	2.103	2.054	2.004	1.954	1.902	1.849	1.796	1.742	1.687	1.631	1.576
65	2.534	2.503	2.470	2.437	2.402	2.366	2.329	2.290	2.250	2.210	2.168	2.125	2.081	2.036	1.990	1.944	1.896	1.848	1.799	1.750	1.700	1.650
70	2.516	2.487	2.458	2.427	2.395	2.361	2.327	2.292	2.256	2.219	2.181	2.142	2.102	2.061	2.020	1.977	1.934	1.891	1.846	1.802	1.756	1.710
75	2.500	2.473	2.446	2.417	2.387	2.357	2.325	2.293	2.260	2.226	2.191	2.155	2.118	2.081	2.043	2.005	1.965	1.926	1.885	1.844	1.802	1.760
80	2.486	2.461	2.436	2.408	2.380	2.352	2.323	2.293	2.262	2.231	2.198	2.165	2.132	2.098	2.063	2.027	1.991	1.954	1.917	1.879	1.841	1.803
85	2.473	2.449	2.425	2.399	2.374	2.347	2.320	2.292	2.263	2.234	2.204	2.174	2.143	2.111	2.079	2.046	2.012	1.979	1.944	1.909	1.874	1.838
90	2.460	2.438	2.415	2.391	2.367	2.342	2.317	2.291	2.264	2.237	2.209	2.181	2.152	2.122	2.092	2.061	2.030	1.999	1.967	1.935	1.902	1.869
95	2.449	2.428	2.406	2.384	2.361	2.338	2.314	2.289	2.264	2.239	2.212	2.186	2.159	2.131	2.103	2.075	2.046	2.016	1.986	1.956	1.926	1.895
100	2.438	2.418	2.398	2.377	2.355	2.333	2.310	2.287	2.264	2.240	2.215	2.190	2.165	2.139	2.113	2.086	2.059	2.031	2.003	1.975	1.946	1.917
150	2.363	2.349	2.336	2.322	2.308	2.294	2.279	2.265	2.250	2.235	2.220	2.204	2.188	2.173	2.156	2.140	2.124	2.107	2.090	2.073	2.056	2.039
200	2.317	2.307	2.296	2.286	2.276	2.265	2.255	2.244	2.233	2.222	2.211	2.200	2.189	2.177	2.166	2.154	2.142	2.131	2.119	2.106	2.094	2.082