جامعة الشهيد حمّه لخضر بالوادي
كليّة العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

السنة الجامعية: 2022/2021
المستوى: **1 MI**
مقياس: **التحليل II**

السلسلة الثانيّة: دساتير تايلور والنشور المحدودة

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x$.

1. عيّن دستور تايلور-لاغرانج من الرتبة n في جوار $x_0=1$ للدالة f .
2. اثبت أن : $|\ln 2-P_n(2)|\leq \dfrac{1}{1+n}$ ، حيث P_n هو كثير حدود تايلور،

ثمّ استنتج أنّ المتتالية المعرّفة بـ: $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ متقاربة نحو $\ln 2$.

***تمرين2:** 1. انشر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ حسب دستور تايلور- يونغ من الرتبة الثالثة في جوار $x_0=1$.

2. انشر الدالة $g:t\mapsto(1+t)^{\alpha}$ المعرفة على $]-1,+\infty[$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ حسب دستور ماك لوران- يونغ من الرتبة n .
3. استنتج طريقة أخرى للإجابة عن السؤال1.

*** تمرين3:** لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة بـ: $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

1. اثبت أن f تقبل نشرا محدودا من الرتبة الأولى عند 0.
2. اثبت أن f تقبل نشرا محدودا من الرتبة الثانية عند 0.
3. هل الدالة f من الصنف C^2؟.
4. هل تقبل f نشرا محدودا من الرتبة الثالثة عند 0؟.

تمرين4: مستعملاً النشور المألوفة في جوار0 عيّن النشور المحدودة عند $x_0=0$ من الرتبة n للدوال التالية :

1) $\dfrac{1}{1-x}-e^x,\ n=3$ (2) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x},\ n=4$ (3) $\sin(x)\cos(2x),\ n=5$ (*4) $(x^3+1)\sqrt{1-x},\ n=3$

*5) $\dfrac{1}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)},\ n=3$ (6) $\dfrac{1}{1+x+x^2},\ n=4$ (*7) $e^{\sin(x)},\ n=4$ (8) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right),\ n=4$.

*** تمرين5:** نفس سؤال التمرين السابق :

1) $\dfrac{\ln(1+x^3)}{x-\sin x},\ n=3$ (2) $\sqrt{1+2\cos x},\ n=2$ (3) $\mathrm{argch}(\sqrt{2+x}),\ n=2$ (4) $\cos x\ln(1+x),\ n=4$

5) $(x^3+1)\sqrt{1-x},\ n=3$ (6) $\ln^2(1+x),\ n=4$ (7) $e^{\sqrt{1+2\cos x}},\ n=2$ (8) $\cos\left(e^{\frac{x}{\cos x}}\right),\ n=4$

*** تمرين6:** 1. عيّن النشر المحدود للدالة f من الرتبة الثانية في جوار 0 حيث : $f(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$

2. عيّن النشر المحدود من الرتبة الثانية في جوار 0 للدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\ln\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)$.
3. استنتج $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

تمرين7: احسب مستعملا النشور المحدودة النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$ (*2) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{\sin x-\tan x}$ ، (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ (*4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ch\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

*5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\tan\left(x-1\right)}$ (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-x$ (7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}$ (*8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$

تمرين8: عيّن دالة مكافئة في جوار 0 لكل دالة في الحالات التالية:

1) $f_1(x)=\dfrac{e^x-\sqrt{1-x}}{(x^2+1)(x+3)}$ ، 2) $f_2(x)=\dfrac{x^2+\cos(x)-ch(x)}{\sqrt{x}}$ ، *3) $f_3(x)=\sqrt{\sin x}-\sqrt[4]{x\tan x}$

*4) $f_4(x)=1+\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\operatorname{ch}x)}$ ، *5) $f_5(x)=\arctan(2x)-2\arctan(x)$ ، *6) $f_6(x)=(2e\cos x+e^{x+1})^{\ln x}$

***تمرين9:** عيّن طبيعة المتتالية (u_n) في كل الحالات التالية:

1) $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2-3n}-\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n}$ 2) $u_n=\left(\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)^n-1$ 3) $u_n=\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$ 4) $u_n=\dfrac{\dfrac{1}{n^3}+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

تمرين10: لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$

1. عيّن النشر المحدود للدالة f من الرتبة الثانية عند 0.
2. عيّن معادلة للمماس (Δ) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$ ووضعية هذا المماس بالنسبة للمنحنى (C) الممثّل للدالة f .
3. عيّن معادلة للمقارب المائل (Δ') عند $+\infty$ ووضعية هذا المقارب بالنسبة للمنحنى (C) الممثّل للدالة f .

ملاحظة هامة : التمارين و الحالات المسبوقة بإشارة (*) إضافية ، يُترك حلها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة

النشور المحدودة لبعض الدوال المألوفة بجوار الصفر

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

حل السلسلة الثانية: دساتير تايلور والنشور المحدودة

حل التمرين1:

تذكير بدستور تايلور لاغرانج:

إذا كانت f دالة عددية من الصنف C^n على مجال مفتوح I يشمل عدد x_0 بحيث تقبل $f^{(n)}$ الاشتقاق على I فإنّه من أجل كل عدد x من I يوجد عدد c محصورا تماما بين x_0 و x حيث:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

1. **تعيين دستور تايلور- لاغرانج من الرتبة n في جوار $x_0=1$ للدالة f حيث: $f(x)=\ln x$**

لنحسب المشتقات المتعاقبة لـ f

$$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1},\ f''(x)=(-1)x^{-2},\ f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3}$$

يمكن التأكد بالتراجع أنّ: $\forall n\geq 1:\ f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

وعليه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ f من الصنف C^n على $\mathbb{R}_+^*$ و $f^{(n)}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و بالتالي دستور تايلور لاغرانج للدالة f عند $x_0=1$ موجود، أي أنّه من أجل $x>0$ يوجد c محصور تماما بين x و 1 يحقق:

$$\ln(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

بالتعويض نجد: $\ln x=(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\dfrac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}}(x-1)^{n+1}$

2. $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$

لدينا $|\ln(x)-P_n(x)|=\left|\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)c^{n+1}}\right|$ من أجل $x\geq 1$ لدينا $1<c<x$ و منه $\dfrac{1}{c^{n+1}}<1$

وعليه $\forall x\geq 1:\ |\ln x-P_n(x)|\leq\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$

من أجل $x=2$ نجد: $|\ln 2-P_n(2)|\leq\dfrac{1}{n+1}$

هذا يعني أنّ: $|\ln 2-u_n|=\left|\ln 2-\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\leq\dfrac{1}{n+1}$

و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ ، نظرية الحصر تبرر أنّ $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$

<u>حل التمرين</u>4: تعيين النشور المحدودة باستعمال النشور المألوفة عند الصفر.

1) $n=3$, $\frac{1}{1-x}-e^x$

$$\frac{1}{1-x}-e^x=1+x+x^2+x^3+o(x^3)-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)$$

بعد التبسيط نجد : $\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$

2) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x},\ n=4$

لدينا : $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+o(x^4)$$

و بالتالي:

بأخذ $\alpha=\frac{1}{2}$ $$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)$$

و عليه :

$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)$$

أي أنّ:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}&=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)\\&+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)\\&=2+-\frac{2}{8}x^2-\frac{10}{128}x^4+o(x^4)\\&=2+-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{64}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

3) $\sin(x)\cos(2x),\ n=5$

لدينا

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

و

$$\begin{aligned}\cos(2x)&=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^5)\\&=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)\end{aligned}$$

بضرب النشرين وأخذ الحدود ذات الدرجة الأصغر أو تساوي 5 و إهمال باقي الحدود نجد :

$$\sin(x)\cos(2x)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)\right)$$
$$=x-2x^3+\frac{2}{3}x^5-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$
$$=x-\frac{11}{6}x^3+\frac{81}{120}x^5+o(x^5)$$

(6 $\dfrac{1}{1+x+x^2}\,,\ n=4$

نعلم أنّ: $\dfrac{1}{1-X}=1+X+X^2+X^3+X^4+o(X^4)$

و عليه: $\dfrac{1}{1+X}=\dfrac{1}{1-(-X)}=1-X+X^2-X^3+X^4+o(X^4)$

بمأنّ: $\lim_{x\to 0} x+x^2=0$ يمكن أخذ $X=x+x^2$ في النشر الأخير و عليه:

$$\frac{1}{1+\left(x+x^2\right)}=1-\left(x+x^2\right)+\left(x+x^2\right)^2-\left(x+x^2\right)^3+\left(x+x^2\right)^4+o(x^4)$$
$$=1-x-x^2+x^2+2x^3+x^4-\left(x^3+3x^4\right)+x^4+o(x^4)$$
$$=1-x+x^3-2x^4+o(x^4)$$

كما يمكن اجراء القسمة الاقليدية حسب القوي المتزايدة و الحصول على نفس النتيجة.

(8 $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right),\ n=5$

نعلم أنّ: $\ln(1+X)=X-\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{X^3}{3}-\dfrac{X^4}{4}+o(x^4)$..................(*)

و لدينا

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)\right)$$

وبمأنّ $\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}\right)=0$ و عليه يمكن وضع $X=-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}=-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}$ في النشر (*) لنجد

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+\circ\left(x^5\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+\circ\left(x^5\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^4}{72}+\circ\left(x^5\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{2}{360}x^4+\circ\left(x^5\right)$$

حل التمرين7: حساب النهايات باستعمال النشور المألوفة عند 0:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$ (1

لننشر البسط و المقام في جوار 0 من درجة تسمح برفع حالة عدم التعيين
لدينا في جوار 0

$$\sin(x-\sin x)=\sin\left(x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\circ\left(x^3\right)\right)\right)$$

$$=\sin\left(\frac{x^3}{3!}+\circ\left(x^3\right)\right)$$

$$=\frac{x^3}{3!}+\circ\left(x^3\right)=\frac{1}{6}x^3+\circ\left(x^3\right)$$

ولدينا أيضا

$$\sqrt{1+x^3}-1=\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$=1+\frac{1}{2}x^3+\circ\left(x^3\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}x^3+\circ\left(x^3\right)$$

وعليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+\circ\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^3+\circ\left(x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\circ(1)}{\frac{1}{2}+\circ(1)}=\frac{1}{3}$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ (3

بوضع $t=\frac{1}{x}$ تصبح النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln\left(1+t\right)\right)$

في جوار 0 لـ t لدينا :

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\circ\left(t^3\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{t}{3}+\circ(t)$$

و عليه : $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right)=\frac{1}{2}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-x$

لدينا من أجل $x>0$:

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-x=x\left(\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

و بمانّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$ و عليه $\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{3}{2x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)$

و بالتالي:

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=x\left(\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)=x\left(1+\frac{3}{2x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=\frac{3}{2}+\circ(1)$$

و منه:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}+\circ(1)=\frac{3}{2}$$

7) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}$

بوضع $t=x-2\Leftrightarrow x=t+2$ لتصبح النهاية في جوار الصفر.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t+4}-2}{1-\sqrt{3t+1}}=2\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{\frac{t}{4}+1}-1}{1-\sqrt{3t+1}}$$

في جوار 0 لـ t لدينا:

$$\frac{\sqrt{\frac{t}{4}+1}-1}{1-\sqrt{3t+1}}=\frac{\left(\frac{t}{4}+1\right)^{\frac{1}{2}}-1}{1-(3t+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+\frac{t}{8}+\circ(t)-1}{1-\left(1+\frac{3t}{2}+\circ(t)\right)}=\frac{\frac{t}{8}+\circ(t)}{-\frac{3t}{2}+\circ(t)}=\frac{\frac{1}{8}+\circ(1)}{-\frac{3}{2}+\circ(1)}$$

و عليه:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t+4}-2}{1-\sqrt{3t+1}}=2\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{8}+\circ(1)}{-\frac{3}{2}+\circ(1)}=-\frac{1}{6}$$

حل التمرين8: تعييّن دالة مكافئة في جوار 0:

1) $$f_1(x)=\frac{e^x-\sqrt{1-x}}{(x^2+1)(x+3)}$$

لدينا $e^x-\sqrt{1-x}=(1+x)-(1+\frac{x}{2})+\circ(x)=\frac{x}{2}+\circ(x)$ و $(x^2+1)(x+3)\underset{x\to0}{\sim}3$

وبالتالي: $$f_1(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{\frac{x}{2}}{3}=\frac{x}{6}$$

2) $$f_2(x)=\frac{x^2+\cos(x)-ch(x)}{\sqrt{x}}$$

نعلم أنّ : $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$$
$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$$

و بالتالي:

$$x^2+\cos(x)-ch(x)=-\frac{1}{360}x^6+\circ(x^6)$$

$$f_2(x)=\frac{-\frac{1}{360}x^6+\circ(x^6)}{x^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{360}x^{\frac{11}{2}}+\circ\left(x^{\frac{11}{2}}\right)$$

و عليه: $$f_2(x)\underset{x\to0}{\sim}-\frac{1}{360}x^{\frac{11}{2}}$$

حل تمرين10: لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}=\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

1. تعيّين النشر المحدود للدالة f من الرتبة الثانية عند 0.

بمأنّ: $\lim\limits_{x\to0}\left(x+x^2\right)=0$ و بالتالي يمكن استغلال النشر : $(1+X)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+\circ\left(X^2\right)$ لتعيين نشر f من الرتبة الثانية عند 0، و عليه:

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=1+\frac{1}{2}\left(x+x^2\right)-\frac{1}{8}\left(x+x^2\right)^2+\circ\left(x^2\right)\\&=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^2+\circ\left(x^2\right)\\&=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\circ\left(x^2\right)\end{aligned}$$

2. تعيّين معادلة للمماس (Δ) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$ ووضعية هذا المماس بالنسبة للمنحنى (C) الممثّل للدالة f .

بمانّ f من الصنف $C^2(\mathbb{R})$ فإن النشر السابق لـ f هو نشر تايلور عند $x_0=0$ و بالتالي الحدّ التآلفي في النشر هو $f(0)+f'(0)x = 1+\frac{1}{2}x$ و عليه معادلة المماس (Δ) عند $x_0=0$ هي: $y=\frac{1}{2}x+1$

و لدراسة الوضعية لدينا من النشر السابق:

$$f(x)-\left(1+\frac{1}{2}x\right)=\frac{3}{8}x^2+\circ\left(x^2\right)\underset{0}{\sim}\frac{3}{8}x^2>0$$

ومنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ (C) يقع فوق مماسه (Δ) .

3. **تعيّين معادلة للمقارب المائل (Δ') عند $+\infty$ ووضعية هذا المقارب بالنسبة للمنحنى (C) الممثّل للدالة f .**

أولا لنعيّن النشر المحدود المعمم للدالة $\frac{f(x)}{x}$ عند $+\infty$

لينا من أجل $x>0$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و بمانّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$ و بالتالي يمكن استغلال النشر : $(1+X)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+\circ\left(X^2\right)$ لتعيين النشر المعمم لـ $\frac{f(x)}{x}$ و عليه في جوار $+\infty$ لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x}&=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

ومنه نشر f عند $+\infty$ هو :

$$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)$$

و من النشر الأخير نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

و هذا يعني أنّ المستقيم (Δ') ذو المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

و لدراسة الوضعيّة لدينا من النشر السابق:

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{3}{8x}>0$$

و عليه (C) يقع فوق مقاربة المائل (Δ') في جوار $+\infty$.