الجمهورية الجزائرية الديمقرطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

دروس وتمارين محلولة لمقياس رياضيات 2

سنة اولى جذع مشترك علوم المادة

اعداد : د. بالهادي احفوظه

استاذ محاضر بجامعة الوادي

المحتويات

الاشتقاق

العدد المشتق :

تعريف : ليكن $I \subset \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$ و $f: I \to \mathbb{R}$

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق عند x_0 اذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

يسمى العدد b مشتق التابع f عند x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$

و نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق على المجال I اذا كان قابلا للاشتقاق

عند كل x_0 من I

يسمى التابع $f': I \to \mathbb{R}$ بالتابع المشتق ل f

العدد المشتق على اليمين :

تعريف :

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق على يمين x_0 اذا وجد عدد حقيقي b_1 بحيث

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b_1$$

يسمى العدد b_1 مشتق التابع f على يمين x_0 ونرمز له بالرمز $f'_d(x_0)$

العدد المشتق على اليسار :

تعريف :

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق على يسار x_0 اذا وجد عدد حقيقي b_2 بحيث

$$\lim_{\substack{< \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b_2$$

يسمى العدد b_2 مشتق التابع f على يسار x_0 ونرمز له بالرمز $f'_g(x_0)$

تعريف :

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق عند x_0 اذا وفقط اذا كان

$$\lim_{\substack{< \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{> \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$$

ملاحطة

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق عند x_0 اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي b

وتابع ε لمتغير حقيقي بحيث من اجل كل $x_0 + h$ من I بحيث

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{و} \quad f(x_0+h) = f(\,x_0) + hb + h\varepsilon(h)$$

مبرهنة : اذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 من I فان f مستمرة عند x_0 من I

والعكس غيرصحيح

مثال :

$$f(\,x) = |x|, \qquad x_0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

ومنه f مستمرة عند 0

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x}{x} = -1$$

ومنه f قابلة الاشتقاق على يسار 0

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{x}{x} = 1$$

ومنه f قابلة الاشتقاق على يمين 0

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

ومنه f غير قابلة الاشتقاق عند 0

ومنه f مستمرة عند 0 ولكن f غير قابلة للاشتقاق عند 0

التفسير الهندسي للعدد المشتق :

مشتق التابع f عند x_0 هو ميل المماس لمنحنى التابع f عند $M\big(x_0, f(x_0)\big)$

معادلة المماس عند النقطة $M\big(x_0, f(x_0)\big)$:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

ملاحظة :

اذا كانت $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ فان المنحنى C_f يقبل مماسا شاقوليا

عند النقطة $M\big(x_0, f(x_0)\big)$

حساب المشتقات :

اذا كانت g, f تابعان قابلين للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ فان

التوابع $f+g$, fg , $\frac{f}{g}$, λf , $\frac{1}{g}$ حيث $g \neq 0$ و $\lambda \in \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ولدينا

ملاحظات	$f'+g'$	$(f+g)'$
	$f'g+g'f$	$(f\times g)'$

$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$	$g \neq 0$
$(\lambda f)'$	$\lambda f'$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$\left(\frac{1}{g}\right)'$	$\frac{-g'}{g^2}$	$g \neq 0$
$(fog)'$	$f'(g)g'$	

مشتق تابع مركب :

مبرهنة :

ليكن $f: I \to I'$ $g: I' \to \mathbb{R}$ اذا كان f كان قابلا للاشتقاق عند x_0 و g قبل للاشتقاق عند $f(x_0)$ فان $g0f$ قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا

$$(gof)'(x_0) = g'\big(f(x_0)f'(x_0)\big)$$

مثال : اوجد مشتق الدوال التالية

$$f(x) = \frac{1}{(x^3+4x+3)^3} \quad f(x) = (3x^2+x+2)^2$$

$$f(x) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \quad f(x) = \sqrt{e^{3x}+2x}$$

الحل :

$$f(x) = (3x^2+x+2)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2(3x^2+x+2)(6x+1)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^3+4x+3)^3} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{3(3x^2+4)}{(x^3+4x+3)^5}$$

$$f(x) = \sqrt{e^{3x}+2x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3e^{3x}+2}{2\sqrt{e^{3x}+2x}}$$

$$f(x) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \Longrightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)} = \frac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$$

$$= \frac{-2}{(1-x)(1+x)}$$

مشتق تابع عكسي :

مبرهنة :

ليكن $f: I \to J$ $x_0 \in I$ $y_0 = f(x_0) \in J$ نفرض ان f قابل للاشتقاق عند x_0 وان $f'(x_0)$ غير معدوم وان f^{-1} مستمرة عند y_0 عندئيذ f^{-1} قابل للاشتقاق عند y_0 ولدينا

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مبرهنات اساسية :

مبرهنة رول :

اذا كان f مستمر على المجال $[a, b]$ و f كان قابلا للاشتقاق على المجال $]a, b[$ واذا كان $f(a) = f(b)$ فانه يوجد على الاقل c من $]a, b[$ بحيث $f'(c) = 0$

تمرين تطبيقي :

$I = [0,1]$, $f(x) = x^2 - x$ (1)

$I = [0, \pi]$, $f(x) = 2x + sinx$ (2)

الحل

$I = [0,1]$, $f(x) = x^2 - x$ (1)

f دالة كثير حدود فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على $I = [0,1]$

ولدينا $f(1) = f(0) = 0$ ومنه حسب مبرهنة روول فانه

$$\exists c \in \,]0,1[\quad f'(c) = 0$$

$I = [0, \pi], \quad f(x) = 2x + sinx$ (2)

الدوال $x \to 2x, x \to sinx$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه

فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على $I = [0, \pi]$

ولدينا $f(0) = 0$ $\neq$ $f(\pi) = 2\pi$ ومنه ا مبرهنة روول غير محققه

مبرهنة التزايدات المنتهية :

اذا كان f مستمر على المجال $[a, b]$ و f كان قابلا للاشتقاق على المجال

$]a, b[$ عندئذ يوجد على الاقل c من $]a, b[$ بحيث

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

تمرين تطبيقي :

التمرين 4 : هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدوال التالية على I

$$I = [0,2], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$I = [-1,1] \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{3}}$$

الحل :

$$I = [0,2], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ لان $x \to \frac{3-x^2}{2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ اذا فهي مستمرة

من اجل $x \geq 1$ $x \to \frac{1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ اذا فهي مستمرة من اجل $x < 1$

ندرس استمرار f عند 1 : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{3-x^2}{2} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$

اذا f دالة مستمرة عند 1 وبالتالي مستمرة على المجال $I = [0,2]$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{(1-x)(1+x)}{2(x-1)} = -1$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{(1-x)}{x(x-1)} = -1$$

اذا f دالة قابلة للاشتقاق عند 1 وبالتالي قابلة للاشتقاق على المجال $I = [0,2]$

ومنه يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على f على المجال $I = [0,2]$

$$I = [-1,1] \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{3}}$$

الدالة $x \to \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{3}}$ قابلة للاستمرار على $[-11]$ لان الدالة $x \to x^2 - \frac{1}{3}$

قابلة للاستمرار على $\mathbb{R}$ ومنه على المجال $[-11]$

الدالة $x \to \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{3}}$ غير قابلة للاشتقاق على $]-11[$ لانها غير قابلة للاشتقاق

بالفعل $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt[3]{x^2-\frac{1}{3}}}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt[3]{x+\frac{1}{3}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{3}}}=\infty$$

ومنه لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية

صيغة اخرى لمبرهنة التزايدات المنتهية :

!اذا كان f مستمر على المجال $[a,a+h]$ $h>0,$ و f قابلا للاشتقاق على المجال

$]a,a+h[$ عندئيذ يوجد على الاقل θ من $]0,1[$ بحيث

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

تغيرات التوابع العددية :

اذا كان f مستمر على المجال $[a,b]$ و f كان قابلا للاشتقاق على المجال $]a,b[$

عندئيذ

(1) f متزايدة على المجال $[a,b]$ اذا وفقط اذا كان $\forall x\in\ ]a,b[\ f'(x)\geq 0$

(1) f متناقصة على المجال $[a,b]$ اذا وفقط اذا كان $\forall x\in\ ]a,b[\ f'(x)\leq 0$

(1) f ثابتة على المجال $[a,b]$ اذا وفقط اذا كان $\forall x\in\ ]a,b[\ f'(x)=0$

مبرهنة التزايدات المنتهية المعممة :

اذا كان f و g مستمرين على المجال $[a,b]$ و قابلين للاشتقاق على المجال $]a,b[$

و $g(x)\neq 0$ من اجل كل $x\in\ ]a,b[$ عندئيذ يوجد على الاقل c من $]a,b[$ بحيث

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

مبرهنة لوبيتال : $\left(\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}\right)$

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ نقطة ملاصقة للمجال I f , g

مستمران على I عدا احتمالا عند a بحيث

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad (1)$$

(2) f g قابلين للاشتقاق على $I-\{a\}$ و $g(x) \neq 0$ من اجل كل $x \in I-\{a\}$

اذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ حيث $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ فان $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

مثال : احسب النهايات التالية

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 . cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}, \qquad (1) \lim_{x\to 0} \frac{cosx - \sqrt{cos2x}}{sin^2x}$$

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{cosx - \sqrt{cos2x}}{sin^2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(cosx - \sqrt{cos2x}\right)'}{\left(sin^2x\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2cosx - \sqrt{cos2x}}{2cosx\sqrt{cos2x}} = \frac{1}{2}$$

(2) ا لدالة $x \to \frac{x^2 . cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}$ غير معرفة عند 0 وبالتالي غير قابلة للاشتقاق عند 0

وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية لوبيتال لكن النهاية موجودة ويمكن حسابها

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 . cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sinx} \times xcos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

لان $\left|cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ و $\lim_{x\to 0} x = 0$ و $\lim_{x\to 0} \frac{x}{sinx} = 1$

ملاحظة :

تبقى المبرهنة صحيحة اذا عوض الشرط $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

بالشرط $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

التابع المشتق من الرتبة $\boldsymbol{n}$:

ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعا قابلا للاشتقاق على I اذا كان f' تابعا قابلا للاشتقاق على I فاننا نكتب $f'': I \to \mathbb{R}$ التابع المشتق ل f' $f'' = (f')'$ وبصورة عامة اذا كان n عدد طبيعيا فان $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ هي التابع الذي يحقق

$f^{(0)} = f$ (1)

$\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$ (2)

يدعى $f^{(n)}$ المشتق من الرتبة n ل f

مثال : اوجد المشتق من الرتبة n للدوال التالية

$$f(x) = cosx\,, \qquad f(x) = sinx\,, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

الحل :

$$, \quad f(x) = \frac{1}{1+x}\,, \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{1\times 2}{(1+x)^3} = \frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$f^n(x) = \frac{1\times 2\times \dots \times n}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f(x) = sinx\,, f'(x) = cosx = sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right), f^{(n)}(x) = sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = cosx\,, f'(x) = sinx = cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right), f^{(n)}(x) = cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$$

التوابع من صنف $\boldsymbol{C^n}$:

نقول عن التابع f انه من صنف C^n اذا كان f يتمتع بمشتقات مستمرة حتى الرتبة n

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق باستمرار n مرة

دستور ليبنيز :

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ و a عنصرا من I بحيث $f^{(n)}(a)$ و $g^{(n)}(a)$

موجودان من اجل كل عدد طبيعي n عندئذ

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_p^n f^{(n-p)}(a) g^{(p)}(a)$$

علما ان $C_p^n = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

دستورتايلور :

مبرهنة (دستورتايلور – لاغرنج) :

$f:]a, b[\to \mathbb{R}$ دالة من صنف C^n على $]a, b[$ بحيث $f^{(n)}$ تقبل الاشتقاق على

المجال $]a, b[$ عندئذ من اجل كل نقطة x_0 من $]a, b[$ يوجد c من $]a, b[$ بحيث

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

تسمى هذه العلاقة دستورتايلور $Taylor$ مع باقي لاقرنج $Lagrange$

يسمى باقي لاقرنج ذو الرتبة n $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

دستورماك – لوران :

في حالة $x_0 = 0$ يسمى دستورتايلور $Taylor$ بدستور ماك – لوران

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

يسمى باقي لاقرنج ذو الرتبة n $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$

امثلة :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \qquad (1)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad (2)$$

النشر المحدود :

الامتناهي في الصغر – الامتناهي في الكبر :

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ دالتين و $x_0 \in I$

(1) نقول ان g لا متناهية في الصغر بالنسبة ل f بجوار النقطة x_0

اذا كانت $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

وباستعمال رمز لوندو يمكن كتابة هذاالمعريف كمايلي $g(x) = of(x)$

او على الشكل $g = of$

اذا كان $f(x) = 1$ اي ان $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ قلنا ان g لامتناهي الصغرعندما

يؤول x الى x_0

(2) اذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$ قلنا ان g لامتناهي الكبرعندما

يؤول x الى x_0

امثلة :

(1) $g(x) = x^2$ $g = o(x)$ بجوار 0 وكذا g لامتناهي الكبربجوار $\infty +$ او $-\infty$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ لامتناهي الصغر بجوار $\infty +$ اا $-\infty$

(3) $g(x) = ln(1 + x)$ لامتناهي اكبر بجوار $\infty +$ وهو لامتناهي الصغر

بجوار 0

تعريف : (تكافؤ دالتين)

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ دالتين و $x_0 \in I$

نقول متكافئتان بجوار x_0 اذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ ونكتب $g \underset{x \to x_0}{\sim} f$

تكافؤ بعض التوابع بجوار **0** :

$sinx \underset{x \to 0}{\sim} x$	$arcsinx \underset{x \to 0}{\sim} x$
$tanx \underset{x \to 0}{\sim} x$	$arctanx \underset{x \to 0}{\sim} x$
$shx \underset{x \to 0}{\sim} x$	$argshx \underset{x \to 0}{\sim} x$
$thx \underset{x \to 0}{\sim} x$	$argthx \underset{x \to 0}{\sim} x$
$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$	$ln(x + 1) \underset{x \to 0}{\sim} x$
$1 - cos^2 x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$	$argch(x + 1) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{2x}$

$(1+x)^{\alpha} \underset{x\to 0}{\sim} 1+\alpha x$	$chx1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

خواص رمز لوندو رمز التكافؤ :

$$o(f)+o(f)=o(f)$$

$$o(f).o(g)=o(f.g)$$

$$o\big(o(f)\big)=o(f)$$

$$g.o(f)=o(f)$$

علاقة ~ علاقة تكافؤ

~انعكاسية لان $\forall f:\ f\sim f$

~ تناضرية لان $\forall f,g\ :\ f\sim g \Longrightarrow g\sim f$

~ متعدية لان : $\forall\ f,g,h : \begin{cases} f\sim g \\ g\sim h \end{cases} \Longrightarrow f\sim h$

$$\begin{cases} f_1\sim g_1 \\ f_2\sim g_2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{f_1}{f_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$$

$$\begin{cases} f_1\sim g_1 \\ f_2\sim g_2 \end{cases} \Longrightarrow f_1 . f_2\sim g_1 . g_2$$

النشر التحدود :

تعريف : ليكن $f: I\to\mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال $I\subset\mathbb{R}$ ولتكن $x_0\in\ I$

(1) نقول ان f تقبل نشرا محدودا حتى الرتبة n اذا وجد كثيرحدود P درجته اصغر من او يساويه n بحيث

$$\forall x\in I : f(x)=P(x-x_0)+o((x-x_0)^n)$$

(1) في حالة $\infty +$ او $\infty -$ فاننا نقول ان f تقبل نشرا محدودا حتى الرتبة n اذا وجد كثيرحدود P درجته اصغر من او يساويه n بحيث

$$\forall x \in I : f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

ملاحظات :

(1) النشر وحيد اي كثيرحدود P ان وجد فهو وحيد

(2) نستطيع كتابة النشر بجوار x_0

$$\forall x \in I : f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n +$$
$$+o((x - x_0)^n)$$

اما بجوار $+\infty$ فيكتب النشر

$$\forall x \in I : f(x) = a_0 + a_1 \times \frac{1}{x} + \cdots + a_n \times \frac{1}{x^n} +$$
$$+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

(3) اذا كان يقبل نشر محدود بجوار x_0 حيث

$$\forall x \in I : f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n +$$
$$+o((x - x_0)^n)$$

فان المعاملات a_i $\forall i \leq n$ تعطى بالشكل التالي

$$\forall i \leq n \quad a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}$$

$$f(x_0) = a_0,$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} +$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2.3(x - x_0) \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} +$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$f'''(x) = 2.3a_3 + 2.3.4(x - x_0) + \cdots$$
$$+ n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

$$f'''(x_0) = 2 \times 3a_3 = 3!\, a_3 \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1a_n = n!\, a_n \ldots.$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{f'^{(n)}(x_0)}{n!}$$

(4) النشر المحدود والجمع :

اذا كان $\forall x \in I : f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$

$$\forall x \in I : g(x) = Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

فان $(f + g)(x) = (P + Q)(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$

نوضح ذلك بمثال

$$cosx = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \ , \ \ sinx = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$cosx + sinx = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(5) النشر المحدود و الضرب :

اذا كان $\forall x \in I : f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$

$$\forall x \in I : g(x) = Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

فان

$$(f \times g)(x) = (P \times Q)(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

حيث PQ كثيرحدود من الدرجة n حدوده هي حدود جداء كثيري الحدود التي

التي لا تتجاوز درجاتها n

نوضح ذلك بمثال

$$cosx = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \ , \ \ sinx = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

بتطبيق القاعدة السابقة نحسب الجداء $\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ ونحتفظ فقط بالحدود

ذات الاس الصغر من او يساوي 3 نجد حنئيذ كثيرالحدود $x + \frac{x^3}{3}$ وبالتالي

$$cos.sinx = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad ,$$

(**5**) النشر المحدود و القسمة :

اذا كان $\forall x \in I : f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$

$\forall x \in I : g(x) = Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ و $g(x) \neq 0$

فان $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{P}{Q}\right)(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ مع $Q(x) \neq 0$

(**6**) النشر المحدود و التركيب :

اذا كان $\forall x \in I : f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$

$\forall x \in I : g(x) = Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ فان

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = P\big(Q(x - x_0)\big) + o((x - x_0)^n)$$

نوضح ذلك بمثال

$$cosx = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \ , \ \ sinx = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$cos(sinx) = cos\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 1 + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{72} + o(x^6)$$

(7) النشر المحدود التكامل :

مثال توضيحي اوجد النشر المحدود بجوار 0 من الرتبة 4 للدالة

$$f(x) = arctanx$$

$$arctanx = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \int (1 - x^2)\, dx = x - \frac{x^3}{3} + c + o(x^3)$$

$$arctan(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$$

$$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

(8) النشر المحدود والاشتقاق :

مثال توضيحي : اوجد النشر المحدود بجوار 0 من الرتبة 4 للدالة

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \left(\frac{1}{1 - x}\right)' = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)\right)'$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

النشر المحدود بجوار **0** لبعض الدوال المتداولة :

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^3)$
$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$arcsinx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8} \times \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots \ldots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$tanx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$
$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$shx == x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$chx == x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$
$argshx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8} \times \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots \ldots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

مثال : اوجد النشرالمحدود حتى الرتبة 3 للدالة $f(x) = \sqrt{1+x}$

ناخذ $n = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$ نعوض في العبارة التالية

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

نجد $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)$

(6) النشر المحدود وحساب النهايات :

مثال : ا و جد باستعمال النشرالمحدود النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}1+\frac{o(x)}{x}=1$$

سلسلة تمارين رقم 1 (لاشتقاق – نظرية روول – نظرية التزايدات المنتهية) :

التمرين 1 : باستعمال التعريف اوجد العدد المشتق $f'(x_0)$ في كل حالة من الحالات

$(1+)\quad f(x)=\sqrt{x+1}\ ,\qquad x_0=3$

$(2)\quad f(x)=\frac{1}{x+2}\ ,\quad x_0=-1$

$(3*)\quad f(x)=\frac{x^2}{x+2}\ ,\quad x_0=1$

التمرين 2 : اوجد المشتق من الرتبة n للدوال التالية

$(1+)\ f(x)=sinx\quad (2+)\ f(x)=cosx\quad (3+)\ f(x)=\frac{1}{1-x}$

$(4)\ f(x)=ln(x+1)\quad (5*)\ f(x)=sinx\, e^x$

التمرين 3 : هل يمكن تطبيق نظرية روول على الدوال التالية

$(1+)\quad f(x)=x^2-x\ ,\ I=[0,1]$

$(2+)\quad f(x)=2x+sinx,\quad I=[0,\pi]$

$(3)\quad f(x)=\sqrt[3]{(x-6)^2}\ ,\quad I=[3,6]$

$(4)\quad f(x)=tanx\ ,\qquad I=[0,\pi]$

التمرين 4 : هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدوال التالية على I

$$I=[0,2],\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}\quad (1+)$$

$$I=[-1,1]\quad ,\quad f(x)=\sqrt[3]{x^2-\frac{1}{3}}\quad (2)$$

التمرين 5 : بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية اثبت ان

$$\forall x\in\mathbb{R}, x\ge 0 : \frac{x}{x+1}\le ln(1+x)\le x\quad (1)$$

$$\forall x\in[0,1] : 1+x\le e^x\le 1+e.x\quad (2*)$$

التمرين 6 : بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية اوجد قيم مقربة لصيغ التالية

$$sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right),\qquad ln(2.719)*$$

التمرين 7 : بتطبيق نظرية لوبيتال احسب النهايات التالية

$$(*)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2-x^2}{x-ln(1+x)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-sinx}$$

$$(+)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2.cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}$$

التمرين 8 : اوجد دستور تايلورمع باقي لاقرنج حتى الرتبة n على $[0,x]$ للدوال التالية

$$(3)f(x)=e^x,\qquad (2)f(x)=sinx,\qquad (1)f(x)=cosx$$

التمرين 9 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$f(x)=sinx+e^x,\quad n=4$ الرتبة

$*f(x)=cosx+e^x,\quad n=3$ الرتبة

$* f(x) = sinx + cosx \,, \qquad n = 5$ الرتبة

التمرين 10 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$(x) = sinx . e^{x} \,, \qquad n = 4$ الرتبة

$* f(x) = (1 + x + x^{2})e^{x} \,, \qquad n = 3$ الرتبة

$* f(x) = sinx . cosx \,, \qquad n = 5$ الرتبة

التمرين 11 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$f(x) = tanx \,, \qquad n = 5$ الرتبة

$f(x) = \frac{1 + x + x^{2}}{cosx} \,, \qquad n = 3$ الرتبة

$* f(x) = \frac{e^{x}}{\sqrt{1 + x}} \,, \qquad n = 2$ الرتبة

$* f(x) = \frac{x}{sinx} \,, \qquad n = 3$ الرتبة

التمرين 12 : الرتبة $f(x) = e^{sinx} \,, \qquad n = 3$

$* f(x) = e^{\sqrt{sinx}} \,, \qquad n = 3$ الرتبة

$* f(x) = \sqrt{1 + tanx} \,, \qquad n = 5$ الرتبة

$f(x) = ln(cosx) \,, \qquad n = 5$ الرتبة

التمرين 13 : عين النشر المحدود بجوار x_0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$f(x) = \sqrt{x} \,, \qquad x_0 = 1, \qquad n = 4$ الرتبة

$f(x) = cosx \,, \qquad x_0 = \frac{\pi}{3}, \qquad n = 4$ الرتبة

$* f(x) = (1 + sinx)^{x} \,, \qquad x_0 = 1, \qquad n = 3$ الرتبة

التمرين 14 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n مستعملا التكامل للدوال التالية

$$f(x) = arcsinx\,, \qquad n = 4$$ الرتبة

$$f(x) = arccosx\,, \quad n = 5$$ الرتبة

$$* f(x) = ln(1 + x), \qquad n = 5$$ الرتبة

$$* f(x) = arctanx\,, \qquad n = 5$$ الرتبة

$$* f(x) = argthx\,, \qquad n = 5$$ الرتبة

التمرين 15 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n مستعملا الاشتقاق للدوال التالية

$$f(x) = \frac{-1}{(1 + x)^2}, \quad n = 4$$ الرتبة

$$* f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1 + x)^2}\,, \qquad n = 3$$ الرتبة

التمرين 16 : عين النشر المحدود بجوار $+\infty$ حتى الرتبة n للدوال التالية

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + x + x^2}\,, \qquad n = 3$$ الرتبة

$$* f(x) = \sqrt{x + x^2}\,, \qquad n = 2$$ الرتبة

$$* f(x) = \frac{1}{x - 1}\, e^{\frac{1}{x-1}}, \qquad n = 3$$ الرتبة

* التمرين 17 : احسب النهايات التالية باستخدام النشر المحدود

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{x + x^2}\,, \qquad * \lim_{x\to 0} \frac{ln(1 + x) - x}{x^4 + x^2},$$

$$* \lim_{x\to 0}(cosx)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}, \qquad * \lim_{x\to 0}\frac{xe^x cosx - e^x sinx}{x^2}$$

∗ التمرين 18 :

(1) عين النشر المحدود بجوار $0 +$ حتى الرتبة 5 للدالة $f(x) = argthx$

(2) عين النشر المحدود بجوار $0 +$ حتى الرتبة 5 للدالة $g(x) = \dfrac{argthx}{1-x^2}$

(3) استنتج النشر المحدود للدالة $h(x) = \dfrac{(argthx)^2}{2}$

ملاحظة : التمارين المسبوقة بالعلامة $+$ او $*$ غير معنية بالحل

حلول سلسلة تمارين رقم (1)

التمرين 1 : باستعمال التعريف اوجد العدد المشتق $f'(x_0)$ في كل حالة من الحالات

(1) $f(x) = \sqrt{x+1}\ , \qquad x_0 = 3$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}\ , \quad x_0 = -1$

$(3)^*$ $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}\ , \quad x_0 = 1$

حل التمرين 1 :

تذكير

تعريف (العدد المشتق) : ليكن $I \subset \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$ و $f: I \to \mathbb{R}$

نقول عن التابع f انه قابل للاشتقاق عند x_0 اذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$$

يسمى العدد b مشتق التابع f عند x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$

$$f(x)=\sqrt{x+1}\ ,\qquad x_0=3\ (1)$$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}=f'(3)$$

$$f(x)=\frac{1}{x+2}\ ,\quad x_0=-1\quad(2)$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{x+2}-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-x-1}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-1}{(x+2)}=-1=f'(-1)$$

التمرين 2 : اوجد المشتق من الرتبة n للدوال ة

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\ \ (3)\ \ f(x)=cosx\ \ (2)\ \ f(x)=sinx\ \ (1)$$

$$f(x)=sinx\ e^{x}\ \ (5)\quad f(x)=ln(x+1)\ (4)$$

حل التمرين 2 :

$$f(x)=sinx\ \ (1)$$

$$f'(x)=cosx=sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

ومنه $f^{(n)}(x) = sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $f(x) = cosx$ بنفس الطريقة نجد ان $f^{(n)}(x) = \left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \qquad f''(x) = \frac{1.2}{(1-x)^3} = \frac{2!}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1.2.3}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

ومنه $f^{(n)}(x) = \frac{1.2.3\ldots n}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(4) $f(x) = ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3} = \frac{2!}{(1+x)^3}$$

ومنه $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

(5) $f(x) = sinx\ e^x$

$$f'(x) = cosx.e^x + sinx\ e^x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)e^x + sinx\ e^x,$$

$$f''(x) = sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)e^x + sinx\ e^x$$

$$f^{(3)}(x) = sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)e^x + sinx\ e^x$$

ومنه $f^{(n)}(x) = sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) e^x + sinx\, e^x$

التمرين 3 : هل يمكن تطبيق نظرية روول على الدوال التالية

$I = [0,1]\ , f(x) = x^2 - x \quad (1)$

$I = [0,\pi], \quad f(x) = 2x + sinx\ (2)$

$I = [3,6]\ , \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-6)^2}\ \ (3)$

$I = [0,\pi]\ , \qquad f(x) = tanx\ (4)$

حل التمرين 3 :

نذكر مبرهنة رول

اذا كان f مستمر على المجال $[a,b]$ و f كان قابلا للاشتقاق على المجال

$]a,b[$ واذا كان $f(a) = f(b)$ فانه يوجد على الاقل c من $]a,b[$

بحيث $f'(c) = 0$

$I = [0,1]\ , f(x) = x^2 - x \quad (1)$

f دالة كثير حدود فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه

فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على $I = [0,1]$

ولدينا $f(1) = f(0) = 0$ ومنه حسب مبرهنة روول فانه

$\exists c \in]0,1[\quad f'(c) = 0$

$I = [0,\pi], \quad f(x) = 2x + sinx\ (2)$

الدوال $x \to 2x, x \to sinx$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه

فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق على $I = [0,\pi]$

ولدينا $f(\pi) = 2\pi \ \neq f(0) = 0$ ومنه ا مبرهنة روول غير محققه

$I = [3,6]\,, \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-6)^2}$ (3)

$x \to (x-6)^2$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه فهي مستمرة $I = [3,9]$

ومنه $f(x) = \sqrt[3]{(x-6)^2}$ مستمرة $I = [3,9]$

$$f(3) = f(9) = \sqrt[3]{9}$$

$$\lim_{x\to 6} \frac{f(x)-f(6)}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt[3]{x-6}} = \infty$$

ومنه ان f غيرقابلة للاشتقاق عند 6 ومنه غيرقابلة للاشتقاق على المجال $]3,9[$

ومنه لا يمكن تطبيق نظرية روول على الدالة f ,

$I = [0,\pi]\,, \qquad f(x) = tanx$ (4)

f غيرمعرفة عند $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$ ومنه f غير مستمرة على $I = [0,\pi]$

ومنه لا يمكن تطبيق نظرية روول على الدالة f

التمرين 4 : هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدوال التالية على I

$$I = [0,2], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$I = [-1,1] \quad , \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{3}}$$

حل التمرين 4 :

مبرهنة التزايدات المنتهية :

اذا كان f مستمر على المجال $[a,b]$ و f كان قابلا للاشتقاق على المجال

$]a,b[$ عندئيذ يوجد على الاقل c من $]a,b[$ بحيث

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

$$I=[0,2],\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$$

f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ لان $x\to\dfrac{3-x^2}{2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ اذا فهي مستمرة

من اجل $x\ge 1$ $x\to\dfrac{1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ اذا فهي مستمرة من اجل $x<1$

ندرس استمرار f عند 1 : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{3-x^2}{2}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1}{x}=1=f(1)$

اذا f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي مستمرة على المجال $I=[0,2]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{(1-x)(1+x)}{2(x-1)}=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{(1-x)}{x(x-1)}=-1$$

اذا f دالة قابلة للاشتقاق عند 1 وبالتالي قابلة للاشتقاق على المجال $I=[0,2]$

ومنه يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على f على المجال $I=[0,2]$

التمرين 5 : بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية اثبت ان

$$\forall x\in\mathbb{R}, x\ge 0:\frac{x}{x+1}\le ln(1+x)\le x\quad (1)$$

$$\forall x\in[0,1]: 1+x\le e^x\le 1+e.x\quad (2)$$

حل التمرين 5 :

$$\forall x\in\mathbb{R}, x\ge 0:\frac{x}{x+1}\le ln(1+x)\le x\quad (1)$$

نضع $\quad f(x) = ln(1+x)$

f مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ ومنه مستمرة على المجال $[0,x]$

وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,x[$

$$\exists c \in \,]0,x[\; : f(x) - f(0) = xf'(c) = \frac{x}{1+c}$$

$$c \in \,]0,x[\; \Rightarrow 0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < 1+x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < f(x) < x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < ln(1+x) < x$$

التمرين 6 : بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية اوجد قيم مقربة لصيغ التالية

$$sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right), \qquad ln(2.719)$$

حل التمرين 6 :

نضع $\quad f(x) = sin(x)$

f مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,+\infty[$ ومنه مستمرة على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right[$

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right[: f\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{180} f'(c) = \frac{x}{1+c}$$

$$\Rightarrow sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) - sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{180} cos(c)$$

$$\Rightarrow sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} cos(c) \text{ حيث } c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right[$$

$$c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right[\Rightarrow \frac{\pi}{3} < c < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$$

$$\Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) < cos(c) < cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه $sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} cos(c) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.87$

نضع $f(x) = ln(x)$

f مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ومنه مستمرة على المجال

$[e, 2.719]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]e, 2.719[$

$$\exists c \in]e, 2{,}719[: \ f(2{,}719) - f(2{,}71828) = (0{,}00072) f'(c)$$

$$\Rightarrow ln(2{,}719) = ln(e) + \frac{(0{,}00072)}{c}$$

$$\in]e, 2.719[\Rightarrow e < c < 2{,}719$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2{,}719} < \frac{1}{c} < \frac{1}{e}$$

يمكن اخذ $\frac{1}{c} \approx \frac{1}{e} = 0{,}368$

ومنه $f(2{,}719) \approx 1 + 0{,}00072 \times 0{,}368 \approx 1{,}0026$

التمرين 7 : بتطبيق نظرية لوبيتال احسب النهايات التالية

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - sinx} \quad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x - ln(1+x)} \quad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$$

$$+(4)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 . cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}$$

حل التمرين 7 :

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-sinx}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}\right)'}{(x-sinx)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-cosx}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{(e^x-1-x)'}{(1-cosx)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{sinx}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{(e^x-1)'}{(sinx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{cosx}=1$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2-x^2}{x-ln(1+x)}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{(e^x+e^{-x}-2-x^2)'}{\left(x-ln(1+x)\right)'}$$

$$=\underset{x\to 0}{lim}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)'}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\frac{1}{(1+x)^2}}=0$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{e^{xlna}-e^{xlnb}}{e^{xlnc}-e^{xlnd}}=\underset{x\to 0}{lim}\frac{(e^{xlna}-e^{xlnb})'}{(e^{xlnc}-e^{xlnd})'}$$

$$=\underset{x\to 0}{lim}\frac{lnae^{xlna}-lnbe^{xlnb}}{lnce^{xlnc}-lnde^{xlnd}}=\frac{ln\left(\frac{a}{b}\right)}{ln\left(\frac{c}{d}\right)}$$

التمرين 8 : اوجد دستور تايلورمع باقي لاقرنج حتى الرتبة n على $[0,x]$ للدوال التالية

$$f(x)=e^x,\qquad f(x)=sinx\ ,\qquad f(x)=cosx$$

حل التمرين 8 :

$$(1)\ f(x)=cosx$$

$$f^{(n)}(x)=cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\pm 1, & n \text{ زوجي}\\ 0, & n \text{ فردي}\end{cases}$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{cos\left(c+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$(2)\ f(x) = sinx$$

$$f^{(n)}(x) = sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \pm 1, & n \text{ فردي} \\ 0, & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{sin\left(c + \frac{n\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$(3)\ \ f(x) = e^x\ ,\ \ f^{(n)}(x) = e^x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

التمرين 9 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$$f(x) = sinx + e^x\ , \qquad n = 4 \ \text{الرتبة}$$

$$f(x) = cosx + e^x\ , \qquad n = 3 \ \text{الرتبة}$$

$$f(x) = sinx + cosx\ , \qquad n = 5 \ \text{الرتبة}$$

حل التمرين 9 :

$$(1)\ \ f(x) = sinx + e^x\ , \qquad n = 4 \ \text{الرتبة}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$f(x) = sinx + e^x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$(2)\ \ f(x) = cosx + e^x\ , \qquad n = 3 \ \text{الرتبة}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\ , e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$f(x) = cosx + e^x = 2 + x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$(3) \quad f(x) = sinx + cosx\,, \qquad n = 5$$ الرتبة

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5); \;\; sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$f(x) = sinx + cosx = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

التمرين 10 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$$f(x) = sinx.e^x\,, \; n = 4$$ الرتبة

$$f(x) = (1 + x + x^2)e^x\,, \qquad n = 3$$ الرتبة

$$f(x) = sinx.cosx\,, \qquad n = 5$$ الرتبة

حل التمرين 10 :

$$(1)\; f(x) = sinx.e^x\,, \qquad n = 4$$ الرتبة

$$\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!}$$

$$- \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = sinx.e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$(2)\; f(x) = (1 + x + x^2)e^x\,, \qquad n = 3$$ الرتبة

$$(1 + x + x^2)e^x = (1 + x + x^2)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + x^2 + x^3$$

$$= 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + \frac{11x^3}{6}$$

$$f(x) = (1 + x + x^2)e^x = 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + o(x^3)$$

$f(x) = sinx.cosx\ , \qquad n = 5$ الرتبة

$$sinx.cosx = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}$$

$$= x - \frac{2x^3}{3} + \frac{21x^5}{120}$$

$$f(x) = sinx.cosx = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{21x^5}{120} + o(x^5)$$

التمرين 11 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

(1) $\qquad f(x) = tanx\ , \qquad n = 5$ الرتبة

(2) $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{cosx}\ , \qquad n = 3$ الرتبة

(3) $\qquad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + x}}\ , \qquad n = 2$ الرتبة

(4) $\qquad f(x) = \frac{x}{sinx}\ , \qquad n = 3$ الرتبة

حل التمرين 11 :

(1) $\qquad f(x) = tanx\ , \qquad n = 5$ الرتبة

$$f(x) = tanx = \frac{sinx}{cosx}$$

$$cosx=\underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}_{\text{الجزء الرئيسي}}+o(x^5);\ \ sinx=\underbrace{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}_{\text{الجزء الرئيسي}}+o(x^5)$$

باجراء القسمة الاقليدية للجزء الرئيسي ل$sinx$ على الجزء الرئيسي ل $cosx$

$$\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}=x+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^3}{15}$$

ومنه النشر المحدود هو $\frac{sinx}{cosx}=x+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^3}{15}+o(x^5)$

(2) $f(x)=\frac{1+x+x^2}{cosx}$, الرتبة $n=3$

$$cosx=\underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}_{\text{الجوء الرئيسي}}+o(x^5)$$

باجراء القسمة الاقليدية ل $1+x+x^2$ على الجزء الرئيسي $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ ل $cosx$ نجد

$$\frac{1+x+x^2}{cosx}=1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{2}$$

ومنه النشر المحدود هو $\frac{1+x+x^2}{cosx}=1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

(3) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$, الرتبة $n=2$

$$e^x=\underbrace{1+x+\frac{x^2}{2!}}_{\text{الجزء الرئيسي}}+o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = \underbrace{x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}_{\text{الجزء لبرئيسي}} + o(x^2)$$

باجراء القسمة الاقليدية للجزء الرئيسي لe^x على الجزء الرئيسي ل $\sqrt{1+x}$

$$\frac{1 + x + \frac{x^2}{2!}}{x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$$

ومنه النشر المحدود هو

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$$

التمرين 12 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$f(x) = e^{sinx}$, $n = 3$ الرتبة

$f(x) = e^{\sqrt{sinx}}$, $n = 3$ الرتبة

$f(x) = \sqrt{1 + tanx}$, $n = 5$ الرتبة

$f(x) = ln(cosx)$, $n = 5$ الرتبة

حل التمرين 12 :

$f(x) = e^{sinx}$, $n = 3$ الرتبة

$$;\ \ sinx = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!}}_{\text{الجزء الرئيسي}} + o(3)$$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}_{\text{الجزء الرئيسي}} + o(x^3)$$

$u = x - \frac{x^3}{3!} \to 0$ فان $x \to 0$ عندما

$$e^{sinx}=e^{x-\frac{x^3}{3!}}=1+\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!}+o(x^3)$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

التمرين 13 : عين النشر المحدود بجوار x_0 حتى الرتبة n للدوال التالية

$f(x)=\sqrt{x}\,,\qquad x_0=1,\qquad n=4$ الرتبة

$f(x)=cosx\,,\qquad x_0=\frac{\pi}{3},\qquad n=4$ الرتبة

$f(x)=(1+sinx)^x\,,\qquad x_0=1,\qquad n=3$ الرتبة

حل التمرين 13 : الرتبة $f(x)=\sqrt{x}\,,\qquad x_0=1,\qquad n=4$

نضع $x=t+1$ اذا كان x بجوار 1 فان t بجوار 0

$$f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{1+t}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}-\frac{5t^4}{128}+0(t^4)$$

$$=1+\frac{(x-1)}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}-\frac{5(x-1)^4}{128}+0((x-1)^4)$$

$f(x)=cosx\,,\qquad x_0=\frac{\pi}{3},\qquad n=4$ الرتبة

نضع $x=t+\frac{\pi}{3}$ اذا كان x بجوار $\frac{\pi}{3}$ فان t بجوار 0

$$f(x)=cosx=cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}cost-\frac{\sqrt{3}}{2}sint$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{t^3}{3!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\frac{t^3}{12}+\frac{t^4}{48}+0(t^4)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\sqrt{3}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{12}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{48}+0\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

$f(x)=(1+sinx)^x\ ,\qquad x_0=1,\qquad n=3$ الرتبة

$$f(x)=(1+sinx)^x=e^{xln(1+sinx)}$$

التمرين 14 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n مستعملا التكامل للدوال التالية

$f(x)=arcsinx\ ,\qquad n=4$ الرتبة

$f(x)=arccosx\ ,\quad n=5$ الرتبة

$f(x)=ln(1+x),\qquad n=5$ الرتبة

$f(x)=arctanx\ ,\qquad n=5$ الرتبة

$f(x)=argthx\ ,\qquad n=5$ الرتبة

حل التمرين 14 :

$f(x)=arcsinx\ ,\qquad n=4$ الرتبة

$f(x)=arcsinx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad ;\ |x|\le 1$ من اجل كل x حيث

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^4}{8}+o(x^4)$$

$$arcsinx=\int\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^4}{8}\right)dx+c+o(x^5)$$

$$=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+c+o(x^5)$$

لدينا $arcsin(0)=0=c$ ومنه $c=0$

$$arcsinx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

$f(x) = ln(1 + x), \qquad n = 5$ الرتبة

$f(x) = ln(1 + x) = \int \frac{dx}{1 + x} \quad x > -1$ من اجل كل x حيث

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$ln(1 + x) = \int \frac{dx}{1 + x} = \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4)\, dx + c + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c + o(x^5)$$

لدينا $ln(1) = 0 = c$ ومنه $c = 0$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$f(x) = arctanx\,, \qquad n = 5$ الرتبة

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = arctanx = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \int (1 - x^2 + x^4)\, dx + c + o(x^5)$$

$$arctan(0) = c = 0$$

$$f(x) = arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

التمرين 15 : عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة n مستعملا الاشتقاق للدوال التالية

$$f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad n = 4 \text{ الرتبة}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1+x)^2}, \qquad n = 3 \text{ الرتبة}$$

حل التمرين 15 :

$$f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad n = 4 \text{ الرتبة}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)\right)'$$

$$= -1 + 2x - 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1+x)^2}, \qquad n = 3 \text{ الرتبة}$$

$$\left(\sqrt[3]{1+x}\right)' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1+x)^2}$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10x^4}{243} + o(x^5)$$

$$\left(\sqrt[3]{1+x}\right)' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1+x)^2} = \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10x^4}{243}\right)' =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{5x^2}{27} + \frac{40x^3}{243} + o(x^4)$$

التمرين 16 : عين النشر المحدود بجوار $\infty +$ حتى الرتبة n للدوال التالية

$$+\ (1) f(x) = \frac{x^3}{1+x+x^2}, \qquad n = 3 \text{ الرتبة}$$

$$(2)\ f(x)=\sqrt{x+x^2}\ , \qquad n=2$$ الرتبة

$$*\ (3)\ f(x)=\frac{1}{x-1}\ e^{\frac{1}{x-1}}, \qquad n=3$$ الرتبة

حل التمرين 16 :

$$f(x)=\frac{x^3}{1+x+x^2}\ , \qquad n=3$$ الرتبة

نضع $x=\frac{1}{t}$ اذا كان x بجوار $+\infty$ فان t بجوار 0

$$\frac{x^3}{1+x+x^2}=\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3}{1+\left(\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t^3+t^2+t}=\frac{1}{t}\times\frac{1}{1+t+t^2}$$

$$\frac{1}{1+t+t^2}=1-t+t^3+o(t^3)$$

$$\frac{x^3}{1+x+x^2}=x\times\left(1-\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)\right)$$

$$=x-1+\frac{1}{x^2}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

*التمرين 17 :: احسب النهايات التالية باستخدام النشر المحدود

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x+x^2}\ , \qquad (2)\lim_{x\to0}\frac{ln(1+x)-x}{x^4+x^2},$$

$$(3)\quad \lim_{x\to0}(cosx)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}, \qquad (4)\ \lim_{x\to0}\frac{xe^x cosx-e^x sinx}{x^2}$$

حل التمرين 17

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x+x^2}$$

نضع $x=\frac{1}{t}$ اذا كان x بجوار $\infty+$ فان t بجوار 0

$$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2}$$

$$\sqrt{1+t^2}=1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}+o(t^4)$$

$$\frac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{t}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{8}+o(t^3)$$

$$\sqrt{1+x^2}=x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\sqrt{x+x^2}=\sqrt{\frac{1}{t}+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{|t|}\sqrt{1+t}$$

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)$$

$$\frac{1}{|t|}\sqrt{1+t}=\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-\frac{t}{8}+o(t)$$

$$\sqrt{1+x}=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x+x^2}=\left(x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}\right)-\left(x+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{8x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^4+x^2}$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x) - x}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}}{(1+x^2)} = -\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}(cosx)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)ln(cosx)}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3!} + o(x^3)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + + \frac{x^2}{3} + o(x^3)$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right) ln(cosx) = \left(\frac{1}{x^2}\right) ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}} = e^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{x^2}{8}} = e^{-\frac{1}{2}}.\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}(cosx)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)ln(cosx)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[e^{-\frac{1}{2}}.\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2) = e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x cosx - e^x sinx}{x^2}$$

$$xe^x cosx = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x + x^2 + o(x^2)$$

$$e^x sinx = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)x + o(x^2) = x + x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x cosx - e^x sinx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2)-(x+x^2)+o(x^2)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

*التمرين 18 :

(1) عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة 5 للدالة $f(\quad) = argthx$

(2) عين النشر المحدود بجوار 0 حتى الرتبة 5 للدالة $g(x) = \frac{argthx}{1-x^2}$

(3) استنتج النشر المحدود للدالة $h(x) = \frac{(argthx)^2}{2}$

الدوال الاصلية

تعريف : اذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ فانه توجد على الاقل دالة F قابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة هي f تسمى F دالة اصلية للدالة f على I

مثال : $F(x) = \frac{x^3}{3} + sinx + 2$ دالة اصلية للدالة $f(x) = x^2 + cosx$

تعريف : F دالة اصلية للدالة f على مجال I من $\mathbb{R}$ اذا وفقط اذا كان F قابلة للاشتقاق على I ومن اجل كل x من I $F'(x) = f(x)$

نتائج :

(1) اذا كانت F دالة اصلية للدالة f على مجال I فان مجموعة الدوال الاصلية للدالة f على مجال I هي كل الدوال من الشكل : $x \to F(x) + k$ حيث k ثابت حقيقي

(2) توجد دالة اصلية وحيدة F للدالة fعلى المجال I تحقق الاشرط الابتدائي

$F(x_0) = y_0$

(3) كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دوال اصلية

(4) اذا كانت F دالة اصلية للدالة f على مجال I نرمز لمجموعة الدوال الاصلية للدالة f على مجال I بالرمز $\int f(x)dx$ ونكتب

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$ حيث k ثابت حقيقي

يقرا هذا الرمز $\int f(x)dx$ التكامل غير المحدود ل $f(x)dx$

خواص :

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (1)$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (2)$$ حيث k ثابت حقيقي

نظرية :

لتكن الدالة f المستمرة على المجال I و $a \in I$ الدالة F المعرفة على I كمايلي

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الاصلية الوحيدة ل f على I التي تنعدم عند a

جدول الدوال الاصلية لبعض الدوال المالوفة :

مجموعة التعريف	الدالة	الدوال الاصلية
$\mathbb{R}$	k	$kx + c$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \geq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert + c$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + c$
$\mathbb{R}$	$sinx$	$-cosx + c$
$\mathbb{R}$	$sin(\alpha x + \beta), \alpha \neq 0$	$\frac{1}{\alpha} cos(\alpha x + \beta) + c$
$\mathbb{R}$	$cosx$	$sinx + c$
$\mathbb{R}$	$cos(\alpha x + \beta)$	$\frac{1}{\alpha} sin(\alpha x + \beta) + cvf$
$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$	$tanx + c$
$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$-1 - cotan^2 x$	$cotanx + c$
$\mathbb{R}$	shx	$chx + c$
$\mathbb{R}$	chx	$shx + c$
$\mathbb{R}$	$1 - th^2 x = \frac{1}{chs^2 x}$	$thx + c$

$\mathbb{R}^*$	$1 - coth^2x = \frac{-1}{sh^2x}$	$cothx + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctanx + c$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsinx + c$
$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arccosx + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$Argshx + c$
$]1,\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$Argchx + c$
$]-1,1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	$Argthx + c$
$]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,\infty[$	$\frac{1}{x^2-1}$	$Argcothx + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$Arccothx + c$

التكامل بالتجزئة :

لتكن f و g دلتان قابلتان للاشتقاق على I عندئذ

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

التكامل باستبدال المتغير :

ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$ ليكن f و φ دالتين حيث $fI \to \mathbb{R}$ مستمرة على I , $\varphi: J \to \mathbb{R}$

من صنف C^1 على J. عندئذ

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

حيث $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx,$

الدوال الاصلية للدوال ذات الكسور الناطقة :

نسمي عنصر بسيط كل دالة تكتب على الشكل

(1) $f_1(x) = \dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ (من الصنف الاول حيث $k \geq 0$) او

(2) $f_2(x) = \dfrac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$ (من الصنف الثاني حيث A, B, α, β

اعداد حقيقية و $\beta \neq 0$ $k \geq 0$

(1) باستخدام تبديل المتغير $u = x - \alpha \Longrightarrow du = dx$

$$\int f_1(x)dx = \int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = A\int \frac{1}{u^k}du$$

$$= \begin{cases} A\ln|x-\alpha| + c\,, k = 1 \\ \left(\frac{A}{1-k}\right)\left(\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}\right) + c\,, k > 1 \end{cases}$$

(2) باستخدام تبديل المتغير $\beta t = x - \alpha \Longrightarrow dx = \beta dt$

$$\int f_2(x)dx = \int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx = \int \frac{A\beta t + A\alpha + B}{[(\beta t)^2+\beta^2]^k}\beta dt$$

$$= \left(\frac{A}{\beta^{2k-2}}\right)\int \frac{tdt}{[t^2+1]^k} + \left(\frac{A\alpha+B}{\beta^{2k-1}}\right)\int \frac{dt}{[t^2+1]^k}$$

نضع $$I_k = \int \frac{tdt}{[t^2+1]^k}, \qquad J_k = \int \frac{dt}{[t^2+1]^k}$$

لحساب I_k نضع $u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt$

$$I_k = \int \frac{tdt}{[t^2+1]^k} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} == \begin{cases} A\ln(t^2+1) + c\,, k = 1 \\ \left(\frac{1}{1-k}\right)\left(\frac{1}{(t^2+1)^{k-1}}\right) + c\,, k > 1 \end{cases}$$

لحساب I_k نستخدم التكاتل بالتجزئة نضع

$$u = \frac{1}{(t^2+1)^k} \Longrightarrow du = \frac{-2ktdt}{(t^2+1)^{k+1}} \quad dv = dt \Longrightarrow v = t$$

$$J_k = \int \frac{dt}{[t^2+1]^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + \int \frac{2kt^2dt}{(t^2+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k)\int \frac{1+t^2-1}{(t^2+1)^{k+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k)\int \frac{1}{(t^2+1)^k}dt - (2k)\int \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k)J_k - (2k)J_{k+1}$$

$$\Longrightarrow J_{k+1} = \left(\frac{2k-1}{2k}\right)J_k + \frac{t}{2k(t^2+1)^k}$$

حيث $J_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = Arctant + c$

الدوال الاصلية التي ترد الي دوال اصلية لكسور ناطقة :

ليكن f كسر ناطق لمتغير او مفغيرين

(1) دوال اصلية لكسور ناطقة بدلالة e^x , $chx\ shx$,

لحساب $\int f(e^x)dx$ نضع $t = e^x$

$$dx = \frac{dt}{t} \Longleftarrow dt = e^x dx = tdx \Longleftarrow t = e^x$$

مثال : $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx$

نضع $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx = tdx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t(t^2+1)}dt = \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)}dt$$

$$= \int dt + \int \frac{dt}{t^2+1} = t + Arctanx + c$$

(2) دوال اصلية لكسور ناطقة بدلالة $cosx, sinx$

لحساب $\int f(cosx, sinx)dx$

نضع $t = tan\frac{x}{2}$, $sinx = \frac{2t}{t^2+1}$, $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

مثال : $\int \frac{1}{3+2cosx}dx$

نضع $t = tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx$,

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{1}{3+2cosx}dx = \int \frac{1}{3+2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{1+t^2}{3(1+t^2)+2(1-t^2)}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{5+t^2} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}Arctg\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + c$$

(3) دوال اصلية لكسور ناطقة بدلالة tgx

لحساب $\int f(tgx)dx$ نضع $t = tgx$

مثال :

$$\int \frac{tgx}{1+tg^2x}dx \quad \text{نضع} \quad t = tgx$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \Leftarrow dt = (1+tg^2x)dx = (1+t^2)dx$$

$$\int \frac{tgx}{1+tg^2x}dx = \int \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$$

$$= \frac{-1}{2(1+t^2)} + c = \frac{-1}{2(1+tg^2x)} + c$$

(4) دوال اصلية لكسور ناطقة $f\left(x, \sqrt{1+x^2}\right)$

لحساب $\int f\left(x, \sqrt{1+x^2}\right)dx$ نضع $t = Argshx$

(5) دوال اصلية لكسور ناطقة $f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$

لحساب $\int f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)dx$ نضع $t = Arcsinx$

(6) دوال اصلية لكسور ناطقة $f\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$

لحساب $\int f\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)dx$ نضع $t = Argchx$

حساب التكامل المحدود :

لتكن f دالة مستمرة على I و F دالة اصلية ل f على I المقدار $F(b) - F(a)$

المستقل عن الدالة اختيار الاصلية يسمى التكامل المحدود من الى ل $f(x)\mathrm{dx}$

ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ ونكتب :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص :

$$(1)\quad \int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$(2)\quad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(3)\quad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

(4) اذا كان $f(x) \geq 0$ فان $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(5) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (f مستمرة على $[a,b]$)

(6)اذا كان من اجل $x \in [a,b]$ لدينا $f(x) \leq g(x)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(7)اذا كان $m \leq f(x) \leq M$ فان $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

(8) اذا كان $|f(x)| \leq k$ فان $\int_a^b f(x)dx \leq k(b-a)$

$$(9)\quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(10) اذا كان f فردية $\Leftarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(11) اذا كان f زوجية $\Leftarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(12) اذا كان f دورية ودورها $T \Leftarrow \int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

(13) اذا كان f موجبة ومستمرة على $[a,b]$ و $\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$ فان

$$\forall x \in [a,b], f(x) = 0$$

القيمة المتوسطة لدالة : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$

نسمي القيمة المتوسطة للدالة على $[a,b]$ المقدار المعرف بالعلاقة التالية.

$$m = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

التكامل بالتجزئة : لتكن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $[a,b]$

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)\,dx$$

سلسلة رقم 2 (الدوال الاصلية – التكامل غير المحدود – المكامل المحدود)

التمرين 1 : باستعمال التكامل بالتجزئة التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1)\int_0^1 xe^{-x}dx \quad (2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos(2x)dx \quad (3)\int xsin(3x)dx$$

$$(4)\int xlnxdx \qquad (5)\int x^n lnxdx \qquad n\in\mathbb{Z}$$

التمرين 2 : باستعمال التكامل بالتجزئة التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1)\int \frac{ln(1+2x)}{x^2}dx \quad (2)\int_1^2 \frac{xln(x)}{(1+x^2)^2}dx \quad (3)\int sin\big(ln(x)\big)dx$$

$$(4)\int_0^1 Arctan(x)dx \quad (5)\int x.Arctan(x)dx$$

$$(6)\int_{-1}^1 (x^2+2x+3)cos(2x)dx$$

التمرين 3 : باستعمال تبديل المتغير التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1)\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx \quad (\text{نضع } x=lnt)$$

$$(2)\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx \quad (\text{نضع } t=\sqrt{x+1})$$

$$(3)(3)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx \quad \left(\text{نضع } t=\frac{1}{t}\right)$$

التمرين 4 : باستعمال تبديل المتغير التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1)\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \quad (\text{نضع } x=-lnt)$$

$$(2)\int_0^1 \frac{1}{3+2cosx}dx \quad \left(t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \text{ نضع}\right)$$

$$(3)\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx \ \left(t = e^{-x} \text{ نضع}\right)$$

$$(4)\int_0^1 \frac{1}{cosx+sinx}dx \quad \left(t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \text{ نضع}\right)$$

التمرين 5 : باستعمال تبديل المتغير التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1)\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+1}dx \qquad (2)\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx \qquad (3)\int_0^1 \frac{Arctgx}{1+x^2}dx$$

$$(4)\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx \ \ (5)\int \frac{dx}{xlnx} \ \ (6)\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx \ \ (7)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(8)\int sinx.cos^2x\,dx \qquad (9)\int (x+2)\,sin(x^2+4x-5)dx$$

$$(10)\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx \qquad (11)\int \frac{1}{x.tg(lnx)}dx$$

التمرين 6 : باستعمال تبديل المتغير $x = tgu$ احسب التكامل التالي

$$\int_0^1 Arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx \ \ \left(sin2u = \frac{2tgu}{1+tg^2u}\right)$$

التمرين 7 : باستعمال تبديل المتغير اثبت ان

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du$$

$$\left(u = \frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{نضع}$$

التمرين 8 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx \quad (2)\int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x}dx \quad (3)\int_1^2 \frac{dx}{x(+1x)^2}$$

$$(4)\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx \quad (5)\int \frac{dx}{x^2+4x+5} \quad (6)\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$(7)\int \frac{x^3+x-1}{(x+1)^5}dx \quad (8)\int \frac{x+5}{9x^2+5x+17}dx \quad (9)\int \frac{dx}{49-x^2}$$

$$(10)\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3}dx$$

التمرين 9 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx \quad (2)\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^3}dx$$

$$(3)\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2} \quad (4)\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3}dx$$

التمرين 10 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int sin^4x\,dx \quad (2)\int \left(tg^3(x)+2tg^2(x)\right)dx$$

$$(3)\int \frac{sinx}{cosx.(cosx-1)}dx \quad (4)\int \frac{1}{2+cosx}dx \quad (5)\int \frac{1}{cos^4(x)}dx$$

$$(6)\int \frac{sin(2x)}{\sqrt{1+sinx}}dx \quad (7)\int \frac{cos^3(x)}{\sqrt{1+sinx}}dx \int \frac{1}{4sinx-3cosx}dx$$

التمرين 11 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int tgx\,dx \quad (2)\int \frac{sin^3(x)}{cos^2(x)}dx \quad (3)\int cos^3(x)dx$$

التمرين 12 : اوجد الصيغة التراجعية ثم احسب الدوال الاصلية

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

التمرين 13 : احسب

$$I = \int x^3 Arctg\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

حلول السلسة رقم 2

التمرين 1 : باستعمال التكامل بالتجزئة التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1)\int_0^1 xe^{-x}dx \quad (2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos(2x)dx \quad (3)^* \int xsin(3x)dx$$

$$(4)\int xlnxdx \qquad (5)\int x^n lnxdx \qquad n\in\mathbb{Z}$$

حل التمرين 1 :

$$u=x, dv=e^{-x}dx \Longrightarrow du=dx, v=-e^{-x}$$

$$(1)\int_0^1 xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=[-xe^{-x}-e^{-x}]_0^1$$

$$=-\frac{2}{e}+1$$

$$(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos(2x)dx$$

$$u=x^2, dv=cos(2x)dx \Longrightarrow du=2xdx, v=-\frac{sin(2x)}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos(2x)dx=\left[-x^2\frac{sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(2x)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(2x)dx$$

$$u=x, dv=sin(2x)dx \Longrightarrow du=dx, v=\frac{cos(2x)}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(2x)dx = \left[x\frac{cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(2x)dx$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \left[\frac{sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cos(2x)dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$(4) \int xlnxdx$$

$$u = lnx, dv = xdx \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int xlnxdx = \left[\frac{x^2 lnx}{2}\right] - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 lnx}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

$$(5) \int x^n lnxdx$$

$$u = lnx, dv = x^n dx \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int x^n lnxdx = \left[\frac{x^{n+1} lnx}{n+1}\right] - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$

$$= \frac{x^{n+1} lnx}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

التمرين 2 : باستعمال التكامل بالتجزئة التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1) \int \frac{ln(1+2x)}{x^2}dx \quad (2)^* \int_1^2 \frac{xln(x)}{(1+x^2)^2}dx \quad (3) \int sin\big(ln(x)\big)dx$$

$$(4) \int_0^1 Arctan(x)dx \quad (5) \int x.Arctan(x)dx$$

$$(6)^* \int_{-1}^{1}(x^2+2x+3)cos(2x)dx$$

حل التمرين 2 :

$$(1) \int \frac{ln(1+2x)}{x^2}dx$$

$$u = ln(1+2x), dv = \frac{1}{x^2}dx \Longrightarrow du = \frac{2}{2x+1}dx, v = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{ln(1+2x)}{x^2}dx = \left[-\frac{ln(1+2x)}{x}\right] + 2\int \frac{1}{(2x+1)x}dx$$

$$= -\frac{ln(1+2x)}{x} + 2\int \left[\frac{2}{x} - \frac{4}{2x+1}\right]dx$$

$$= -\frac{ln(1+2x)}{x} + 2[2lnx - 2ln(2x+1)] + c$$

$$= -\frac{ln(1+2x)}{x} + 4ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) + c$$

$$(3) \int sin\big(ln(x)\big)dx$$

$$u = sin\big(ln(x)\big), dv = dx \Longrightarrow du = \frac{cos\big(ln(x)\big)}{x}dx, v = x$$

$$\int sin\big(ln(x)\big)dx = xsin\big(ln(x)\big) - \int cos\big(ln(x)\big)dx$$

حساب $\int cos\big(ln(x)\big)dx$

$$u = cos\big(ln(x)\big), dv = dx \Longrightarrow du = -\frac{s\big(ln(x)\big)}{x}dx, v = x$$

$$\int cos\big(ln(x)\big)dx = xcos\big(ln(x)\big) + \int sin\big(ln(x)\big)dx$$

اذا

$$\int sin\big(ln(x)\big)dx = xsin\big(ln(x)\big) - xcos\big(ln(x)\big) - \int sin\big(ln(x)\big)dx$$

$$\Longrightarrow 2\int sin\big(ln(x)\big)dx = xsin\big(ln(x)\big) - xcos\big(ln(x)\big)$$

$$\Longrightarrow \int sin\big(ln(x)\big)dx = \frac{1}{2}\big[xsin\big(ln(x)\big) - xcos\big(ln(x)\big)\big]$$

$$(4)\int_0^1 Arctan(x)dx$$

$$u = Arctg(x), dv = dx \Longrightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx, v = x$$

$$\int Arctg(x)dx = xArctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= xArctg(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + c$$

$$(5)\int_0^1 xArctan(x)dx$$

$$u = Arctg(x), dv = xdx \Longrightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int Arctg(x)dx = \frac{x^2}{2}Arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}Arctg(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= xArctg(x) - \frac{1}{2}\big(x - Arctg(x)\big) + c$$

التمرين 3 : باستعمال تبديل المتغير التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx \quad (\text{نضع } x = lnt)$$

$$(2) \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx \ \ (\text{نضع } t = \sqrt{x+1})$$

$$(3) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx \quad \left(\text{نضع } t = \frac{1}{t}\right)$$

حل التمرين 3 :

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx \quad (\text{نضع } x = lnt)$$

$$x = lnt \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}dt$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = ln\left(\frac{e}{e+1}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx \ \ (\text{نضع } t = \sqrt{x+1})$$

$$t = \sqrt{x+1} \Longrightarrow x = t^2 - 1 \Longrightarrow dx = 2tdt$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx \ = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{t^2-1}dt \ = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \ = \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{3}}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(ln\left(\frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\right)$$

$$(3) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx \quad \left(t=\frac{1}{x}\right)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2}t\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}Arcsin\left(\sqrt{2}t\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}Arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)+c$$

التمرين 4 : باستعمال تبديل المتغير التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \quad (\text{نضع } x=tgt)$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{3+2cosx}dx \quad \left(\text{نضع } t=tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$(3) \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx \quad (\text{نضع } t=e^{-x})$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{cosx+sinx}dx \quad \left(\text{نضع } t=tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

حل التمرين 4 :

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \quad (\text{نضع } x=tgt)$$

$$x=tgt \Rightarrow dx=(1+tg^2t)dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+tg^2t)dt}{(1+tg^2t)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+tg^2t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2t.dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+cos(2x)}{2}.dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t+\frac{sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2cosx}dx \quad \left(t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \text{ نضع}\right)$$

$$cosx = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ,dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$x = 0 \Longrightarrow t = 0\,, x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3+2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right) = \int_0^1 \frac{2dt}{5+t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^1 \frac{2\frac{dt}{\sqrt{5}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{5}}Arctg\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}Arctg\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(3)\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx \;\left(t = e^{-x} \text{ نضع}\right)$$

$$t = e^{-x} \Longrightarrow dt = -e^{-x}dx = -tdx$$

$$x = 2 \Longrightarrow t = e^{-2}\,, x = 3 \Longrightarrow t = e^{-3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int -\frac{dt}{t\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -Arcsint + c = -Arcsin(e^{-x}) + c$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{cosx + sinx} dx \quad \left(t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \text{ نضع}\right)$$

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad sinx = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$x = 0 \Longrightarrow t = 0\,, x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx + sinx} dx = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int_0^1 \frac{2tdt}{1-t^2+2t} = (-2)\int_0^1 \frac{dt}{t^2-2t-1}$$

$$= -\sqrt{2}\int_0^1 \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1} = -\sqrt{2}\left[Arcth\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= -\sqrt{2}\left[Arcth\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = -\sqrt{2}Arcth\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

التمرين 5 : باستعمال تبديل المتغير التكاملات او الدوال الاصلية التالية

$$(1) \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+1} dx \qquad (2) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx \qquad (3) \int_0^1 \frac{Arctgx}{1+x^2} dx$$

$$(4) \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx \quad (5) \int \frac{dx}{xlnx} \quad (6) \int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} dx \quad (7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(8) \int sinx.cos^2x\, dx \qquad (9) \int (x+2)\, sin(x^2+4x-5)dx$$

$$(10)\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx \qquad (11)\int \frac{1}{x.tg(lnx)}dx$$

حل التمرين 5 :

$$(1)\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+1}dx$$

$$t=\sqrt{x} \Longrightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Longrightarrow dx=2tdt$$

$$x=0 \Longrightarrow t=0\,, x=1 \Longrightarrow t=1$$

$$\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+1}dx=2\int_0^1 \frac{1+t^2}{t+1}tdt=2\int_0^1 \frac{t+t^3}{t+1}dt$$

$$=2\int_0^1 \frac{t+1+t^3+1-2}{t+1}dt$$

$$=2\int_0^1 \left(1+t^2-t+1-\frac{2}{t+1}\right)dt$$

$$=2\left[2t+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-2ln(1+t)\right]_0^1=\frac{11}{3}-4ln2$$

$$(2)\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

$$t=e^x \Longrightarrow dt=e^x dx=tdx \Longrightarrow dx=\frac{dt}{t}$$

$$x=0 \Longrightarrow t=1\,, x=1 \Longrightarrow t=e$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int_1^e \frac{t^2}{\sqrt{t+1}}\frac{dt}{t}=\int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$$

$$=\int_1^e \left(\sqrt{t+1}-\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}(t+1)\sqrt{t+1} - 2\sqrt{x+1}\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{2}{3}(e+1)\sqrt{e+1} - 2\sqrt{e+1}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(e-2)\sqrt{e+1} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{Arctgx}{1+x^2} dx$$

$$t = Arctgx \Longrightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$x = 0 \Longrightarrow t = 0\,, x = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{Arctgx}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$(4) \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$t = 1 + x^3 \Longrightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$x = 1 \Longrightarrow t = 2\,, x = 2 \Longrightarrow t = 9$$

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[\frac{2\sqrt{t}}{3}\right]_2^9 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(5) \int \frac{dx}{xlnx}$$

$$t = lnx \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{xlnx} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln|lnx| + c$$

$$(6) \int \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} dx$$

$$t = 2 - x^2 \Longrightarrow dt = -2xdx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} dx \ = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{2 - x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + c$$

$$= -\sqrt{2 - x^2} + c$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{|a|} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$t = \frac{x}{a} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{|a|} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|} \int \frac{adt}{\sqrt{1 - t^2}} = \begin{cases} Arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c, & a > 0 \\ Arccos\left(\frac{x}{a}\right) + c, & a < 0 \end{cases}$$

$$(8) \int sinx.cos^2 x\, dx$$

$$t = cosx \Longrightarrow dt = -sinxdx$$

$$\int sinx.cos^2x\,dx = -\int t^2dt = -\frac{t^3}{3} + c$$

$$= -\frac{cos^3x}{3} + c$$

$$(9)\int (x+2)\,sin(x^2+4x-5)dx$$

$$t = x^2 + 4x - 5 \Longrightarrow dt = (2x+4)dx$$

$$\int (x+2)\,sin(x^2+4x-5)dx = 2\int sin(t)dt = \frac{-cost}{2} + c$$

$$= \frac{-cos(x^2+4x-5)}{2} + c$$

$$(10)\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx$$

$$t = e^x \Longrightarrow dt = e^xdx = tdx$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{t^2+1}dt$$

$$= \int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt = t - Arctgt + c$$

$$= e^x - Arctge^x + c$$

$$(11)\int \frac{1}{x.tg(lnx)}dx$$

$$t = lnx \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{x.tg(lnx)}dx = \int \frac{dt}{tg(t)} = \int \frac{cos(t)}{sin(t)}dx = \int \frac{d\big(sin(t)\big)}{sin(t)}$$

$$= ln\big(sin(t)\big) + c = ln(sin(lnx) + c)$$

التمرين 6 : باستعمال تبديل المتغير $x = tgu$ احسب التكامل التالي

$$\int_0^1 Arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx \quad \left(sin2u = \frac{2tgu}{1+tg^2u}\right)$$

$$x = tgu \Longrightarrow Arctgx = u$$

$$Arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = Arcsin\left(\frac{2tgu}{1+tg^2u}\right) = Arcsin(sin2u)$$

$$= Arcsin(sin2u) = 2u = 2Arctgx$$

$$\int_0^1 Arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx \ = \int_0^1 2Arctgx\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - ln2 \ \ (\text{حسب 4 من ت2})$$

التمرين 7 : باستعمال تبديل المتغير اثبت ان

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt$$

حل التمرين 7 :

$$t^2 = \frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \Longrightarrow dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$x = 1 \Longrightarrow t = 0, x = 2 \Longrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{(1-t^2)} dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{(1+t^2)} dt$$

$$= [Argtht]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - [Arctgt]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = Argth\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - Arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

التمرين 8 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1) \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx \; (2) \int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x} dx \; (3) \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2}$$

$$(4) \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx \; (5) \int \frac{dx}{x^2+4x+5} \; (6) \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

$$(7) \int \frac{x^3+x-1}{(x+1)^5} dx \; (8) \int \frac{x+5}{9x^2+5x+17} dx \; (9) \int \frac{dx}{49-x^2}$$

$$(10) \int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+2x-3} dx$$

حل التمرين 8 :

$$(1) \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2-5x+6}\right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{3}{(x-2)(x-3)}\right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x-2}\right) dx$$

$$= x + 3ln|x-3| - 3ln|x-2| + c$$

$$= x + 3ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$$

$$(2)\int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x}dx = \int \frac{5x+2}{x(x-1)(x-4)}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{7}{3(x-1)} + \frac{11}{6(x-4)}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}ln|x| - \frac{7}{3}ln|x-1| + \frac{11}{6}ln|x-4| + c$$

$$(3)\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \left[ln|x| - ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_1^2$$

$$= 2ln2 - ln3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{6}$$

$$(4)\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{9}{2(x-3)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \frac{-9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + c$$

$$(5)\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} = Arctg(x+2) + c$$

$$(6)\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}Arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + c$$

$$(7)\int \frac{x^3+x-1}{(x+1)^5}dx$$

$$u=x+1 \Longrightarrow du=dx$$

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x+1)^5}dx \ =\int \frac{(u-1)^3+u-2}{u^5}du$$

$$=\int \frac{u^3-3u^2+3u+u-3}{u^5}du$$

$$=\int \left(\frac{1}{u^2}-\frac{3}{u^3}+\frac{4}{u^4}+\frac{1}{u^5}\right)du$$

$$=-\frac{1}{u}+\frac{3}{2u^2}-\frac{4}{3u^3}-\frac{1}{4u^4}+c$$

$$=-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2(x+1)^2}-\frac{4}{3(x+1)^3}-\frac{1}{4(x+1)^4}+c$$

التمرين 9 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx \quad (2)\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^3}dx$$

$$(3)\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2} \quad (4)\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3}dx$$

حل التمرين 9 :

$$(1)\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}ln(x^2+1)+\frac{1}{2}Arctgx-\frac{1}{2}ln(x+1)+c$$

$$(2)\int\frac{1}{(x+1)(x-1)^3}dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^3}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{(x-1)^3}$$

التمرين 10 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int sin^4x\,dx\quad(2)\int\left(tg^3(x)+2tg^2(x)\right)dx$$

$$(3)\int\frac{sinx}{cosx.(cosx-1)}dx\quad(4)\int\frac{1}{2+cosx}dx\quad(5)\int\frac{1}{cos^4(x)}dx$$

$$(6)\int\frac{sin(2x)}{\sqrt{1+sinx}}dx\quad(7)\int\frac{cos^3(x)}{\sqrt{1+sinx}}dx\int\frac{1}{4sinx-3cosx}dx$$

التمرين 11 : احسب الدوال الاصلية والتكاملات التالية

$$(1)\int tgx\,dx\ \ (2)\int\frac{sin^3(x)}{cos^2(x)}dx\ \ (3)\int cos^3(x)dx$$

التمرين 12 : اوجد الصيغة التراجعية ثم احسب الدوال الاصلية

$$I_n=\int x^ne^{-x}dx\qquad n\in\mathbb{N}$$

$$J_n=\int\frac{1}{(1+x^2)^n}dx\qquad n\in\mathbb{N}$$

التمرين 13 : احسب

$$I = \int x^3 Arctg\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

المعادلات التفاضلية

في ماياتي نعتبر f دالة لمتغير حقيقي . حل النعادلة التفاضلية $F(y', y, x) = 0$ على

على I التي تحقق $\forall x \in I : F(f'(x), f(x), x) = 0$

منحنى دوال الحلول يسمى المنحنى التكاملي للمعادلة

مقدمة :نتطرق في هذا الفصل لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والرتبة الثانية

بدون طرف ثاني اوبطرف ثاني بمعرفة حل خاص او طريقة تغيير الثابت

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى :

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى على المجال I كل معادلة من الشكل :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad \dots (E_1)$$

حيث a, b, c دوال معرفة على المجال I مع $a(x) \neq 0$

نقول ان f حلا للمعادلة (E_1) اذا كانت f معرفة وقابلة للاشتقاق على I وتحقق

$$\forall x \in I \;\; a(x)f'(x) + b(x)(fx) = c(x)$$

مثال : الدالة $x \to e^{-3x}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ هي حلا للمعادلة التفاضلية

$$y' - 3y = 0$$

الدالة $x \to e^{-3x^2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ هي حلا للمعادلة التفاضلية

$$y' + \frac{3}{2}xy = 0$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى لمتغيرين منفصلين :

نقول عن معادلة تفاضلية انها خطية من الرتبة الاولى لمتغيرين منفصلين اذا كانت من الشكل

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

لحلها نستخدم تكامل الطرفين نجد : $\int f(x)\, dx + \int g(y)dy = \mathrm{c}$

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$e^x cosydx + (1 + e^x)sixydy = 0$$

ثم اوجد الحل الخاص عند النقطة $(0,0)$

$$e^x cosydx + (1 + e^x)sixydy = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{1 + e^x}dx = \frac{siny}{cosy}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{e^x}{1 + e^x}dx + \int \frac{siny}{cosy}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow ln(1 + e^x) - ln|cosy| = c$$

الحل الخاص عند النقطة $(0,0)$

$$ln(1 + e^0) - ln|cos0| = c$$

$$c = ln2$$

$$ln(1 + e^x) - ln|cosy| = ln2$$

$$ln\frac{(1 + e^x)}{|cosy|} = ln2$$

$$\frac{(1+e^x)}{|cosy|}=2$$

$$(1+e^x)-|cosy|=2$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى المتجانسة :

تعريف : نقول عن الدالة $f(x,y)$ انها متجانسة من الدرجة n اذا كانت

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

تعريف : نقول عن معادلة تفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ انها متجانسة اذا كانت M,N دوال متجانسة من نفس الدرجة

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

لحلها نضع $y=xv \Longleftarrow dy=vdx+xdv$

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)\Leftrightarrow vdx+xdv\ =f(v)dx$$

$$\Leftrightarrow \big(v-f(v)\big)dx+xdv\ =0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x}-\frac{dv}{v-f(v)}=0$$

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$$

نضع $y=xv \Longleftarrow dy=vdx+xdv$

$$(x^2+x^2v^2)dx-2x^2v(vdx+xdv)=0$$

$$x^2(1+v^2)dx - 2x^2v^2dx - 2x^2xvdv = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-v^2)dx - 2xvdv = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} - \frac{2v}{1-v^2}dv = 0$$

$$\Leftrightarrow lnx + ln(1-v^2) = lnc$$

$$\Leftrightarrow\ lnx(1-v^2) = lnc$$

$$\Leftrightarrow\ x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = xc$$

وهوالحل العام للمعادلة التفاضلية

معادللة تفاضليةعادية تؤول الى معادلة تفاضلية متجانسة :

المعادلة التفاضلية العادية من الشكل $(E)\ \ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$

تؤول الى معادلة تفاضلية متجانسة في الحالات التالية

(1)اذا كان $c_1 = c_2 = 0$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الاولى

(2) اذا كان $c_1 \neq c_2 \neq 0$

(1) المستقيمان متوازيان

اذا كان المستقيمان $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ متوازيان

$z = a_1x + b_1y$ او $z = a_2x + b_2y$ حيث شرط التوازي $a_1b_2 = a_2b_1$

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1}$$

$$z = x + y \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z-5}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-5}{z+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2z-4}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{2z-4}\right) dz = dx$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{3}{z-2}\right) dz = dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{3}{z-2}\right) dz = \int dx + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}ln(z-2) = x + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2}ln(x+y-2) = x + c$$

2) المستقيمان متقاطعان

نضع $x = u + h \, , y = v + k$ حيث (h,k) احداثيا نقطة التقاطع

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + (a_1h + b_1k + c_1)}{a_2x + b_2y + (a_2h + b_2k + c_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الاولى

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x+y-2}$$

المستقيمان $2x+y-3=0$, $x+y-2$ يتقاطعان في النقطة $(1,1)$

نضع $x=u+1\,,y=v+1$ حيث $(1,1)$ احداثيا نقطة التقاطع

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x+y-2}\quad\Leftrightarrow\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{u+v}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة نضع $v=zu\ \Leftarrow\ \frac{\mathrm{d}v}{du}=z+u\frac{dz}{du}$

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{u+v}\Leftrightarrow z+u\frac{dz}{du}=\frac{2u+uz}{u+uz}$$

$$\Leftrightarrow u\frac{dz}{du}=\frac{2+z}{1+z}-z$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+z}{2-z^2}\right)dz=\frac{du}{u}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2-z^2}+\frac{z}{2-z^2}\right)dz=\frac{du}{u}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-z}+\frac{1}{\sqrt{2}+z}\right)dz-\frac{1}{2}\int\left(\frac{-2z}{2-z^2}\right)dz=\frac{du}{u}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}\right|-\frac{1}{2}ln|2-z^2|=ln|u|+c$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{4}ln\left|\frac{\sqrt{2}+\frac{v}{u}}{\sqrt{2}-\frac{v}{u}}\right|-\frac{1}{2}ln\left|2-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right|=ln|u|+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} ln \left| \frac{\sqrt{2} + \frac{y-1}{x-1}}{\sqrt{2} - \frac{y-1}{x-1}} \right| - \frac{1}{2} ln \left| 2 - \left(\frac{y-1}{x-1} \right)^2 \right| = ln|x-1| + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} ln \left| \frac{\sqrt{2}x + y - \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}x - y - \sqrt{2} + 1} \right| - \frac{1}{2} ln \left| \frac{2(x-1)^2 - (y-1)^2}{(x-1)^2} \right|$$
$$= ln|x-1| + c$$

المعادلة التفاضلية التامة :

تعريف : التفاضلية التامة للدالة $f(x,y)$ تكون من الشكل

$$df(x,y) = \frac{\eth f}{\eth x} \mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\eth y} \mathrm{dy}$$

اذا كانت $df(x,y) = 0$ تسمى معادلة تفاضلية تامة وحلها يكون $f(x,y) = c$

تعريف : تكون المعادلة تفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ اذا وفقط اذا كان

$$\frac{\eth f}{\eth x} = M(x,y), \ldots (3) \quad \frac{\partial f}{\eth y} = N(x,y) \ldots (4)$$

نتيجة : الشرط اللازم لكي تكون المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

تامة يجب ان يكون $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

حل المعادلة التفاضلية التامة :

لحل لمعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ldots (2)$

نفرض دالة $f(x,y)$ تحقق

$$df(x,y) = \frac{\eth f}{\eth x} \mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\eth y} \mathrm{dy} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \dots (3) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \dots (4)$$

باجراء التكامل على (3) بالنسبة للمتغير x نجد

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \dots (5)$$

نفاضل (5) بالنسبة للمتغير y وباستخدام (4)نجد

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \varphi'(y) = N(x,y) \ \dots (6)$$

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

وبالتكامل طرفى المعادلة بالنسبة للمتغير y نجد

$$\varphi(y) = \int N(x,y)dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] dy$$

وبالتعويض في (5) نجد المعدلة التفاضلية التامة (2) على الشكل

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] dy = c$$

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(6x^2 + 4xy + y^2)dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2 + 4xy + y^2)}{\partial y} = 4x + 2y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(2x^2 + 2xy - 3y^2)}{\partial x} = 4x + 2y$$

اى ان $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

وعلى ذلك تكون المعادلة المعطاة تامة وبالتالي

$$\int M(x,y)dx = 2x^3 + 2x^2y + xy^2$$

$$\int N(x,y)dy = 2x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = 2x^2 + 2xy$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = 2x^2y + xy^2$$

يكون حل المعادلة

$$\int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy = c$$

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - (2x^2y + xy^2) = c$$

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = c$$

معامل التكامل :

اذا كانت المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ غير تامة وجدت دالة

$I(x,y)$ بحيث تكون المعادلة التفاضلية $IM(x,y)dx + IN(x,y)dy = 0$ تامة

عندئيذ نسمي $I(x,y)$ عامل التكامل

طريقة تعيين معامل التكامل :

لتكن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ غير تامة نضرب طرفى

في$I(x,y)$ بحيث تكون المعادلة التفاضلية $IM(x,y)dx + IN(x,y)dy = 0$ تامة

$$\frac{\partial IM(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial IN(x,y)}{\partial x} \Leftrightarrow I_yM + M_yI = I_xN + N_xI$$

$$\Leftrightarrow I\left[N_x - M_y\right] = I_xN - I_yM$$

احالة الاولى : اذا كان $I(x,y) = I(x)$ دالة للمتغير x :

$I_x = \frac{dI}{dx}$ $\quad I_y = 0$ ولدينا ان $\quad I\left[N_x - M_y\right] = I_xN \Leftrightarrow \left[\frac{N_x - M_y}{N}\right]dx = \frac{dI}{I}$

$$I\left[N_x - M_y\right] = I_xN \Leftrightarrow \left[\frac{N_x - M_y}{N}\right]dx = \frac{dI}{I}$$

$$\Leftrightarrow \int \left[\frac{N_x - M_y}{N}\right]dx = \int \frac{dI}{I} = ln\big(I(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow \; I(x) = e^{\int\left[\frac{N_x - M_y}{N}\right]dx}$$

الحالة اللثانية : اذا كان $I(x,y) = I(y)$ دالة للمتغير y

$I_y = \frac{dI}{dy}$ $\quad I_x = 0$ ولدينا ان

$$I\left[N_x - M_y\right] = -I_yM \Leftrightarrow -\left[\frac{N_x - M_y}{M}\right]dx = \frac{dI}{I}$$

$$\Leftrightarrow -\int \left[\frac{N_x - M_y}{M}\right]dx = \int \frac{dI}{I} = ln\big(I(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow \; I(y) = e^{-\int\left[\frac{N_x - M_y}{M}\right]dx}$$

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(3x^3+2y)dx+\left(2xln3x+\frac{3x}{y}\right)dy=0$$

$$M=3x^3+2y,\qquad N=2xln3x+\frac{3x}{y}$$

$$M_y=2,\qquad N_x=2+2ln3x+\frac{3}{y}$$

$$M_y-N_x=-\left(2ln3x+\frac{3}{y}\right)\neq 0$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{M_y-N_x}{M}=-\frac{\left(2ln3x+\frac{3}{y}\right)}{x\left(2ln3x+\frac{3}{y}\right)}=-\frac{1}{x}$$

عامل التكامل

$$I(x)=e^{\int\left[\frac{N_x-M_y}{N}\right]dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-lnx}=e^{ln\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{x}$$

بضرب طرفى المعادلة في $\frac{1}{x}$ تصبح المعادلة تامة على الشكل

$$\left(3x^2+\frac{2y}{x}\right)dx+\left(2ln3x+\frac{3}{y}\right)dy=0$$

$$M=3x^2+\frac{2y}{x},\qquad N=2ln3x+\frac{3}{y}$$

$$\int Mdx=x^3+2ylnx,\qquad \int Ndy=2yln3x+3lny$$

$$\frac{\eth}{\partial y}\int Mdx=2lnx\Longrightarrow\int\left[\frac{\eth}{\partial y}\int Mdx\right]dy=2ylnx$$

ويكون حل المعادلة

$$\int Mdx + \int Ndy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right] dy = c$$

$$x^3 + 2ylnx + 2yln3x + 3lny - 2ylnx = c$$

$$x^3 + 2yln3x + 3lny = c$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى :

تعريف 1 :

نسمي معادلة تفاضلية خطية في y من الرتبة الاولى والدرجة الاولى كل معادلة من الشكل

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

نسمي معادلة تفاضلية خطية في x من الرتبة الاولى والدرجة الاولى كل معادلة من الشكل

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y)$$

تعريف 2 :

نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى كل معادلة من الشكل

$a(x) \neq 0$ حيث $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

حل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \Leftrightarrow y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = Q(x)$$

حيث $Q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ و $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$

حل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى :

لايجاد حل المعادلة $\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=Q(x)$ نجعلها على الشكل

$$[p(x)y(x)-Q(x)]dx+dy=0$$

$$M=p(x)y(x)-Q(x), N=1$$

$$M_y=p(x)\,, \qquad N_x=0$$

$$M_y-N_x=p(x)\neq 0$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

$$\frac{M_y-N_x}{N}=p(x)$$

عامل التكامل $I(x)=e^{\int\left(\frac{M_y-N_x}{N}\right)dx}=e^{\int p(x)dx}$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=Q(x)\Leftrightarrow e^{\int p(x)dx}\,\frac{dy}{dx}+p(x)e^{\int p(x)dx}y(x)$$

$$=Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left[e^{\int p(x)dx}y(x)\right]}{dx}=Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow e^{\int p(x)dx}y(x)=\int\left[Q(x)e^{\int p(x)dx}\right]dx$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\ e^{-\int p(x)dx}\int\left[Q(x)e^{\int p(x)dx}\right]dx+c$$

وهو حل المعادلة التفاضلية

مثال : اوجد حل المعادلة $x\,\frac{dy}{dx}+2y=x^3$

$$x\,\frac{dy}{dx}+2y=x^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^2$$

حيث $Q(x)=x^2$ و $p(x)=\frac{2}{x}$

عامل التكامل $I(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$

حل المعادلة التفاضلية

$$y(x)=\ e^{-\int p(x)dx}\int\left[Q(x)e^{\int p(x)dx}\right]dx+c$$

$$=\frac{1}{x^2}\int x^4\,dx+c=\frac{1}{5}x^3+c$$

طريقة تغيير الثابت :

نبحث عن الحل للمعادلة بدون طرف ثاني

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\Leftrightarrow ln|y(x)|=-\int p(x)dx+c$$

$$\Leftrightarrow y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$$

نضع $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ حيث نعتبر القابت C دالة للمتغير x و

$y(x)$ حلا للمعادلة $\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=Q(x)$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

$$\Leftrightarrow\ C'(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \; C'(x) = Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \; C(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int Q(x)e^{\int p(x)dx} + c$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية والدرجة الاولى :

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية والدرجة الاولى كل معادلة

من الشكل $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$

حيث a, b, c, g دوال مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ و $a \neq 0$

اذا كانت a, b, c اعداد حقيقية و $a \neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية :

المعادلة $ay'' + by' + cy = 0$ تسمى المعادلة المتجانسة للمعادلة التفاضلية خطية

من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية

لحل المعادلة المتجانسة نضع $y(x) = e^{rx}$ لحل

$$ay'' + by' + cy = 0 \;\; \Leftrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx}$$

$$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

المعادلة $ar^2 + br + c$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة $ay'' + by' + cy = 0$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$

نظرية :

(1) اذا كان $\Delta > 0$ المعادلة المميزة تقبل حلين r_1, r_2 والمعادلة المتجانسة تقبل

حلولا من الشكل : $y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$

(2) اذا كان $\Delta = 0$ المعادلة المميزة تقبل حل مضاعف $r_1 = r_2$ والمعادلة المتجانسة

حلولاتقبل من الشكل : $y(x)=(k_1+k_2)e^{r_1x}$

(3) اذ ا كان $\Delta<0$ المعادلة المميزة تقبل حلين مركبين مترافقين $\alpha+i\beta$ $\alpha-i\beta$

والمعادلة المتجانسة تقبل حلولا من الشكل :

$$y(x)=e^{\alpha x}(k_1cos\beta x+k_2cos\beta x)$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية والدرجة الاولى :

نظرية : $(Cauchy-Lipschitz)$

المعادلة : $ay''+by'+cy=g(x)$ تقبل حلا وحيدا من اجل $x_0\in \mathrm{I}$ ومن اجل

$(y_0,y_1)\in\mathbb{R}^2$ ويحقق الشروط الابتدائية $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1$

قضية : الحل العام للمعادلة (E) .... $ay''+by'+cy=g(x)$ هو مجموع

الحلين الحل الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة والحل الخاص للمعادلة (E)

طريقة البحث عن الحل الخاص للمعادلة (E) :

لتكن المعادلة (E) .... $ay''+by'+cy=g(x)$

(1) اذا كان $g(x)=e^{\alpha x}p(x)$ نبحث عن الحل الخاص على الشكل

$$y_0(x)=e^{\alpha x}x^mQ(x)$$

(1.1) $y_0(x)=e^{\alpha x}Q(x)$ اذا كان α ليس جذرا للمعادلة المميزة

(1.2) $y_0(x)=e^{\alpha x}xQ(x)$ اذا كان α جذربسيطا للمعادلة المميزة

(1.3) $y_0(x)=e^{\alpha x}x^2Q(x)$ اذا كان α جذرا مضاعف للمعادلة المميزة

(2) اذا كان $g(x)=e^{\alpha x}\big(p_1cos(\beta x)+p_2sin(\beta x)\big)$

الحل الخاص على الشكل :

(2.1) $y_0(x)=e^{\alpha x}\big(Q_1cos(\beta x)+Q_2sin(\beta x)\big)$ اذا كان $\alpha+i\beta$

ليس جذرا للمعادلة المميزة

$\alpha + i\beta$ اذا كان $y_0(x) = xe^{\alpha x}\left(Q_1 cos(\beta x) + Q_2 sin(\beta x)\right)$ (2.2)

جذرا للمعادلة المميزة

مثال : حل المعادلات التفاضلية التالية

$$(2)\ y'' - 5y' + 6y = 4xe^{x} \quad (1)\ y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(3)\ y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$$

اوجد الحل الخاص للمعادلة (2) حيث $y(0) = 1, y'(0) = 0$

الحل : المعادلة المميزة $r^2 - 5\text{r} + 6 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-3) = 0$

$$\Leftrightarrow r = 2\,, \qquad r = 3$$

مجموعة الحلول للمعادلة (1) هي من الشكل $\{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

$$y'' - 5y' + 6y = 4xe^{x} \quad (2)$$

نبحث عن حل خاص من الشكل $y_0(x) = (ax+b)e^{x}$ بالتعويض في (2) نجد

$$\left((ax+b)e^{x}\right)'' - 5\left((ax+b)e^{x}\right)' + 6\left((ax+b)e^{x}\right) = 4xe^{x} \Leftrightarrow$$

$$(ax + 2a + b)e^{x} - 5(ax + a + b)e^{x} + 6\left((ax+b)e^{x}\right) = 4xe^{x}$$

$$\Leftrightarrow (a - 5a + 6a)x + (2a + b - 5a - 5b + 6b) = 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\text{a} = 4, -3\text{a} + 2\text{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{a} = 2, \text{b} = 3$$

اذا $y_0(x) = (2x+3)e^{x}$

مجموعة الحلول للمعادلة (2) هي من الشكل :

$$\{\ (2x+3)e^{x} +\ \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$y(x) = (2x+3)e^{x} +\ \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \lambda + \mu = 1 \\ 5 + 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = -1$$

ومنه $$y(x) = (2x + 3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$$

طريقة تغيير الثوابت :

لتكن المعادلة $$ay'' + by' + cy = g(x) \dots \dots \dots (E)$$

لايجاد الحل العام للمعادلة (E) نستعمل طريقة تغيير الثوابت نضع

$$c_1 = c_1(x), \qquad c_2 = c_2(x)$$

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على الشكل

$$y(x) = c_1(x)\ y_1(x) + c_2(x)\ y_2(x)$$

لايجاد الدالتين c_1, c_2 يكفي حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} c_1{}'(x)\ y_1(x) + c_2{}'(x)\ y_2(x) = 0 \\ c_1{}'(x)\ y_1{}'(x) + c_2{}'(x)\ y_2{}'(x) = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

الاثبات :

$$y(x) = c_1(x)\ y_1(x) + c_2(x)\ y_2(x)$$

$$y'(x) = c_1{}'(x)\ y_1(x) + c_1(x)\ y_1{}'(x) + c_2{}'(x)\ y_2(x) + c_2(x)\ y_2{}'(x)$$

$$y'(x) = c_1(x)\ y_1{}'(x) + c_2(x)\ y_2{}'(x)$$

$$y''(x) = c_1{}'(x)\ y_1{}'(x) + c_2{}'(x)\ y_2{}'(x) + c_1(x)\ y_1{}''(x) c_1(x)\ y_1{}''(x)$$

بالتعويض في المعادلة (E) نجد

$$a[c_1{}'(x)\ \ y_1{}'(x)+c_2{}'(x)\ \ y_2{}'(x)+c_1(x)\ \ y_1{}''(x)+c_1(x)\ \ y_1{}''(x)]$$

$$b[c_1(x)\ \ y_1{}'(x)+c_2(x)\ \ y_2{}'(x)]+c[c_1(x)\ \ y_1(x)+c_2(x)\ \ y_2(x)]$$

$$=g(x)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ \ & c_1(x)\big(ay_1{}''(x)+by_1{}'(x)+c\ y_1(x)\big)\\ &+c_2(x)\big(ay_1{}''(x)+by_1{}'(x)+c\ y_1(x)\big)\\ &+a\big(c_1{}'(x)\ \ y_1{}'(x)+c_2{}'(x)\ \ y_2{}'(x)\big)=g(x)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a\big(c_1{}'(x)\ \ y_1{}'(x)+c_2{}'(x)\ \ y_2{}'(x)\big)=g(x)$$

$$\Leftrightarrow c_1{}'(x)\ \ y_1{}'(x)+c_2{}'(x)\ \ y_2{}'(x)=\frac{g(x)}{a}$$

مثال :اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$y''-5y'+6y=4xe^x$$

لدينا حل المعادلة المميزة $r=2, r=3$

الحل العام هو $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ نبحث عن الحل الخاص باستعمال

طريقة تغيير الثوابت

$$y(x)=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{3x}$$

$$\begin{cases} c_1{}'(x)\ \ y_1(x)+c_2{}'(x)\ \ y_2(x)=0\\ c_1{}'(x)\ \ y_1{}'(x)+c_2{}'(x)\ \ y_2{}'(x)=\dfrac{g(x)}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} c_1{}'(x)e^{2x}+c_2{}'(x)\ \ e^{3x}=0\\ 2c_1{}'(x)\ \ e^{2x}+3c_2{}'(x)e^{3x}\ =4xe^x\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x}\\ 2e^{2x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}=e^{5x}\neq 0$$

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} 0 & e^{3x}\\ 4xe^{x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}=-4xe^{4x}$$

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 4xe^{x} \end{vmatrix} = 4xe^{3x}$$

$$c_1{}'(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta} = \frac{-4xe^{4x}}{e^{5x}} = -4xe^{-x} \Longrightarrow c_1(x) = -4\int xe^{-x}dx$$
$$= 4(x+1)e^{-x} + c$$

$$c_2{}'(x) = \frac{\Delta(y)}{\Delta} = \frac{4xe^{3x}}{e^{5x}} = 4xe^{-2x} \Longrightarrow c_2(x) = 4\int xe^{-2x}dx$$
$$= (-2x-1)e^{-2x} + c$$

$$y(x) = (4(x+1)e^{-x} + c_1)e^{2x} + \left((-2x-1)e^{-2x} + c_2\right)e^{3x}$$

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + (2x+3)e^{x}$$

مثال :

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{x}$$

لدينا حل المعادلة المميزة $r_1 = r_2 = 2$

طريقة تغيير الثوابت

$$y(x) = c(x)e^{2x}$$

$$y'(x) = c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x}$$

$$y''(x) = c''(x)e^{2x} + 4c'(x)e^{2x} + 4c(x)e^{2x}$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$(c''(x)e^{2x} + 4c'(x)e^{2x} + 4c(x)e^{2x}) - 4(c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x})$$
$$+ 4c(x)e^{2x} = (x+1)e^{x}$$

$$\Leftrightarrow c''(x)e^{2x} = (x+1)e^{x}$$

$$\Leftrightarrow c''(x) = (x+1)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(x) = \int (x+1)e^{-x}dx + c_1 = -(x+2)e^{-x} + c_1$$

$$\Leftrightarrow c(x) = \int -(x+2)e^{-x}dx + c_1x + c_2$$

$$= (x+3)e^{-x} + c_1x + c_2$$

ومنه الحل العام هو

$$y(x) = \left((x+3)e^{-x} + c_1x + c_2\right)e^{2x}$$

$$= (x+3)e^{x} + (c_1x + c_2)e^{2x}$$

مثال : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 2y' + 5y = e^{x}sinx$$

الحل

المعادلة المميزة $r^2 - 2\text{r} + 5 = 0$ الحلولها $r_1 = 1 + 2i\ , r_2 = 1 - 2\text{i}$

المعادلة $y'' - 2y' + 5y = e^{x}sinx$ تقبل حلا

$$y(x) = c_1e^{x}cos2x + c_2e^{x}sin2x$$

نستعمل طريقة تغيير الثوابت

$$y(x) = c_1(x)e^{x}cos2x + c_2(x)e^{x}sin2x$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\ \ y_1(x) + c_2'(x)\ \ y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\ \ y_1'(x) + c_2'(x)\ \ y_2'(x) = e^{x}sinx \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\ \ cos2x + c_2'(x)\ \ sin2x = 0 \\ c_1'(x)\ \ (cos2x - 2sin2x) + c_2'(x)\ \ (sin2x + 2cos2x) = sinx \end{cases}$$

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} cos2x & sin2x \\ cos2x - 2sin2x & sin2x + 2cos2x \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sin2x \\ sinx & sin2x+2cos2x \end{vmatrix}}{2} =$$

$$= \frac{\sin(2x).\sin x}{2} = \cos x.\sin^2 x$$

$$c_1(x) = \int \cos x.\sin x \, dx = \frac{\sin^3(x)}{3} + c_1$$

$$c_2{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ cps2x - 2\sin 2x & \sin x \end{vmatrix}}{2} = \frac{\cos(2x).\sin x}{2} = \frac{(2\cos^2(x) - 1).\sin x}{2}$$

$$c_2(x) = \int \frac{(2\cos^2(x) - 1).\sin x}{2} \, dx = \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos x}{2} + c_2$$

$$y(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} e^x \cos 2x + \left(\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos x}{2}\right) e^x \sin 2x + c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$$

سلسلة تمارين رقم 3 حول المعادلات التفاضلية

التمرين 1 : حل المعادلات التفاضلية التالية

$$(1)\quad y' = \frac{y}{x} \;, \qquad (2)\quad y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \;, \qquad (3)\; y'(x^2-1) = 2xy$$

التمرين 2 : حل المعادلات التفاضلية المتجانسة التالية

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad (1)$$

$$2xy\, y' = x^2 - 3y^2 \quad (2)$$

$$, \qquad , \qquad xy'(2y-x) = y^2 \quad (3)$$

التمرين 3 : حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى التالية

$$y' + 2y = 2xe^{-2x} \quad (1)$$

$$y'(1-x^2) - yx = 1 \quad (2)$$

$y' - y = xy^2, \qquad y(1) = 1$ (3)

$y' + 2y = e^x\ , \qquad y(0) = 1$(4)

التمرين 4 : حل معادلات برنولي التالية

$y' - y = xy^2$ (1)

$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$ (2)

$xy' + y = y^2 lnx, \qquad y(1) = 1$ (3)

التمرين 5 : حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية

$y'' - 5y' + 6y = 0$ (1)

$y'' - 5y' + 6y = 0\ , y(0) = 1, y'(0) = 3$ (2)

$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)\ e^x$ (3)

$y'' + 4y = sin3x$ (4)

.اكتب المعادلة هنا