الفصل 4 : المحددات وجمل المعادلات الخطية

في كل هذا الفصل يرمز E إلى ف ش على $\mathbb{R}$.

4. 1. المحددات

4. 1. 1. المحددات من الرتبة 2

تعاريف:

ليكن f تطبيقا خطيا من E^2 نحو $\mathbb{R}$.

- نقول إن f شكل ثنائي الخطية على E إذا كان خطيا بالنسبة لكلا المتغيرين أي أن f يحقق ما يلي :

$$\forall x_1,x_2,y \in E,\ \forall a, b \in \mathbb{R} : f(ax_1+bx_2, y) = af(x_1, y)+bf(x_2, y)$$

$$\forall x,y_1,y_2 \in E,\ \forall a, b \in \mathbb{R} : f(x, ay_1+by_2) = af(x, y_1)+bf(x, y_2)$$

- نقول عن الشكل ثنائي الخطية f إنه متناوب إذا كان : $\forall x,y \in E : f(x, y) + f(y, x) = 0$

مبرهنة :

ليكن f شكلا ثنائي الخطية على . لدينا التكافؤ:
$\forall x \in E : f(x, x) = 0 \Leftrightarrow$ متناوب f

برهان :

نفرض أن f متناوب ومنه : من أجل كل x من E لدينا : $2f(x,x) = 0$ أي $f(x,x) =0$.

لنفرض الآن أن: $f(x, x) = 0$ من أجل كل x من E ومنه من أجل كل x, y من E لدينا :

$$0 = f(x+ y, x +y) = f(x, x) + f(x, y) +f(y, x) + f(y, y) = f(x, y) +f(y, x)$$

أي أن f متناوب.

قضية :

نفرض أن بعد E يساوي 2 و $B= (e_1, e_2)$ أساس له و ليكن f شكلا ثنائي الخطية متناوبا علىE.
إذا كان $x(a,b)$ و $y(c,d)$ في الأساس B فإن : $f(x, y) = (ad – bc) f(e_1, e_2)$.

برهان :

$f(x,y)= f(ae_1+be_2, ce_1+de_2) = a f(e_1, ce_1+de_2) + b f(e_2, ce_1+de_2)$

$= acf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1)+ bd f(e_2, e_2) = (ad – bc) f(e_1, e_2)$.

مبرهنة وتعاريف :

إذا كان بعد E يساوي 2 وكان $B=(e_1, e_2)$ أساسا له فإنه يوجد شكل ثنائي الخطية متناوب على E وحيد $\det_B$ يحقق : $\det_B(e_1, e_2) = 1$ يسمى محددا من الرتبة الثانية .
وإذا كان : $x(a, b)$ و $y(c, d)$ بالنسبة للأساس B فإن : $\det_B(x, y)= ad – bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

أمثلة :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 19, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -23$$

مبرهنة :

نفرض أن $B= (e_1, e_2)$ أساس لـ E وليكن x, y شعاعين من E . تكون الجملة {x, y} مستقلة إذا وفقط إذا كان $\det_B(x, y) \neq 0$.

نفرض أن الجملة {x, y} مرتبطة أي أن أحد الشعاعين يكتب بدلالة الآخر، نفرض مثلا أن $x= ay$ ومنه

$\det_B (x, y) = \det_B (x, ax) = a \det_B (x,x) =0$.

لنفرض الأن أن الجملة {x,y}مستقلة ولنبين أن $\det_B (x,y) \neq 0$.

بما أن بعد E يساوي 2 فإن الجملة {x, y} أساس لـ E ومنه توجد أعداد حقيقية a, b, c,d بحيث :

$$e_1 = ax + by$$

$$e_2 = cx +d y$$

ومنه $1 = \det_B (e_1, e_2) = \det_B (ax +by, cx+dy) = (ad-bc)f(x,y)$ أي أن $\det_B (x,y)$ ليس معدوما.

نتيجة :

نفرض أن ل$B=(e_1, e_2)$ أساس لـ E وليكن x, y شعاعين من E .

من أجل كل عدد جقيقي a لدينا : $\det_B(x, ay) = \det_B(ax, y) = 0$.

4. 1. 2. المحددات من الرتبة 3

تعاريف:

ليكن f تطبيقا خطيا من E^3 نحو $\mathbb{R}$.

- نقول إن f شكل ثلاثي الخطية على E إذا كان خطيا بالنسبة لكل متغير من متغيراته أي أن f يحقق ما يلي :

$$\forall x_1,x_2,y,z \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} : f(ax_1+bx_2, y, z) = af(x_1, y)+bf(x_2, y, z)$$

$$\forall x,y_1,y_2, z \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} : f(x, ay_1+by_2) = af(x, y_1, z)+bf(x, y_2, z)$$

$$\forall x,y,, z_1, z_2 \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} : f(x,y , az_1+bz_2) = af(x,y, z_1)+bf(x,y, z_2)$$

- نقول عن الشكل ثلاثي الخطية f إنه متناوب إذا كان من أجل كل x, y, z من E لدينا:

$$f(x, y, z) + f(y, x, z) = 0$$
$$f(x, y, z) + f(x, z, y) = 0$$
$$f(x, y, z) + f(z, y, x) = 0$$

نتيجة :

إذا كان f شكلا ثلاثي الخطية متناوبا على E. فإن : $\forall x, y \in E : f(x, x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = 0$

قضية :

نفرض أن بعد E يساوي 3 و (e_1, e_2, e_3) أساس له و ليكن f شكلا ثلاثي الخطية متناوبا علىE.
إذا كان $x(a,b,c)$ و $y(d,e,g)$ و $z(h, i, j)$ في الأساس (e_1, e_2, e_3) فإن :
$f(x, y, z) = (aej + dic + hbg – ceh – gia – jbd)\, f(e_1, e_2, e_3)$.

مبرهنة وتعاريف :

إذا كان بعد E يساوي 3 وكان $B=(e_1, e_2, e_3)$ أساسا له فإنه يوجد شكل ثلاثي الخطية متناوب على E وحيد $\det_B$ يحقق : $\det_B(e_1, e_2, e_3) = 1$ يسمى محددا من الرتبة الثالثة .
وإذا كان : $x(a, b,c)$ و $y(d, e, g)$ و $z(h, i, j)$ بالنسبة للاساس (e_1, e_2, e_3) فإن :

$$\det_B(x,y,z) = aej + dic + hbg - ceh - gia - jbd = \begin{vmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & g & j \end{vmatrix}$$

طريقة "ساروس" لحساب محدد من الرتبة الثالثة :

لحساب محدد من الرتبة الثالثة بهذه الطريقة نقوم بما يلي :

1) نكتب العمودين الأول والثاني على يمين المحدد

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ a & d & h \\ b & e & i \\ c & g & j \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & g \end{matrix}$$

2) نضرب عناصر كل قطر نازل ببعضها ثم نجمع الناتج ونلحقه بإشارة +.

3) نضرب عناصر كل قطر صاعد ببعضها ثم نجمع الناتج ونلحقه بإشارة – .

4) قيمة المحدد هي ناتج جمع العدد ين المحصل عليهما في المرحلتين 2) و 3).

مثال :

لنحسب المحدد: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{matrix}$$

ومنه :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ((1\times1\times1) + (2\times4\times8) + (3\times2\times1)) - ((8\times3\times1)+(1\times4\times1)+(1\times2\times2)) = 39.$$

مبرهنة :

نفرض أن $B=(e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E ولتكن x, y, z أشعة من E .

تكون الجملة $\{x, y, z\}$ مستقلة إذا وفقط إذا كان $f(x, y, z) \neq 0$.

نتيجة :

نفرض أن $B=(e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E ولتكن x, y, z أشعة من E. من أجل كل عدد حقيقيين a و b لدينا : $f(x, ax + bz, z) = f(ay + bz, y, z) = f(x, y, ax+ by) =0$.

حالة خاصة:

$$\begin{vmatrix} a & h & i \\ 0 & b & j \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ k & b & 0 \\ l & m & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ k & b & 0 \\ l & m & c \end{vmatrix} = abc$$

4 . 1. 3. المحدد من الرتبة n :

نسمي شكلا n – خطيا كل تطبيق n – خطي من E^n نحو الحقل $\mathbb{R}$.

- يقال عن الشكل الخطي f إنه متناوب إذا كان : $f(v_1, v_2, \dots v_n) = 0$ كلما كانت $v_1, v_2, \dots v_n$ غير متمايزة مثنى مثنى.
- من أجل كل شكل n خطي متناوب f لدينا:

1) إذا بدلنا بين الشعاعين v_i, v_j في العنصر $(v_1,\dots,v_n)$ يكون :

$$f(v_1, \dots v_i,\dots v_j,\dots,\dots v_n) = -f(v_1, \dots v_j,\dots v_i,\dots,\dots v_n)$$

2) إذا أضفنا إلى شعاع من $(v_1,\dots,v_n)$ عبارة خطية للأشعة الأخرى فإن الصورة لا تتغير.

3) إذا كانت الأشعة $v_1,\dots,v_n$ مرتبطة فإن $f(v_1,\dots, v_n) = 0$.

- ليكن E $\mathbb{R}$- فضاء شعاعيا بعده n . $B = (e_1, e_2, \dots e_n)$ أساس لـ E.

نســمي تطبيقا محددا وفق الأســاس B الشــكل n - الخطي المتناوب على E والمرموز له بالرمز $\det_B$ بحيث : $\det_B (e_1, e_2, \dots e_n) = 1$.

ليكن $(v_1,\dots, v_n)$ عنصرا من E^n. يسمى $\det_B (v_1,\dots, v_n)$ محدد الجماعة $(v_1,\dots, v_n)$ بالنسبة للأساس B.

- محدد مصفوفة مربعة A رتبتها n هو محدد جماعة أشعتها العمودية بالنسبة للأساس القانوني لــ $\mathbb{R}^n$ ونرمز له : $\det A$.

- E -K ف ش . بعده n و B, B' أساسان له.عندئذ لدينا :

$$\det_{B'} (v_1, v_2, ... v_n) = \det_B (v_1, v_2, ... v_n) \det_{B'} (B)$$

4 . 1 .4 خواص المحددات

- إذا كان عمودان متساويين أو أحد الأعمدة منعدما كان المحدد منعدما.

مثل : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

- إذا أضفنا لأحد الأعمدة عبارة خطية للأعمدة الأخرى فإن المحدد لا يتغير.

مثل :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ -4 & 2+5 & 2-2 \\ 2 & 4+3 & 4+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 1\times 7\times 10 = 70 .$$

- A مصفوفة مربعة عندئذ :

$$\det ({}^tA) = \det (A) \qquad \text{et} \qquad \det (a\,A) = a^n \det (A)\ (a \in \mathbb{R})$$

مثل :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 10 & 0 & -2 \\ 6 & 18 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- إذا كان سطران متساويان أو أحد الأسطر منعدما كان المحدد منعدما.

- إذا أضفنا لأحد الأسطر عبارة خطية للأسطر الأخرى فإن المحدد لا يتغير.

- A, B مصفوفتان مربعتان $\det (AB) = \det (A) \det (B)$.

- تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$ ولدينا عندئذ : $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

- محدد تماثل داخلي f هو محدد المصفوفة المربعة المرفقة به وفق أساس كيفي ونرمز له $\det f$.

- f تماثل داخلي و A المصفوفة المربعة المرفقة به. القضايا التالية متكافئة :

قابلة للقلبA　　　$\det A \neq 0$　　　تقابليf

نشر محدد وفق صف

ليكن $D = \det(a_{ij})$ محددا رتبته n.

نسـمي محددا أصـغر ملحقا بالحد a_{ij} المحدد ذا الرتبة $n-1$ المحصـول عليه من D بحذف الصـف i والعمود j ونرمز له بالرمز D_{ij}.

مثال : إذا كان $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ فإن : $D_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, D_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}, D_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$.

ولدينا ما يلي:

- نشر D وفق السطر i　$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$

مثال : لننشر المحدد التالي وفق السطر الأول:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 9 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

لننشر المحدد التالي وفق السطر الثاني :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -5 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 140 - 12 - 3 = 125$$

- يمكن النشر وفق العمود　$D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$

مثال :

لننشر المحدد التالي وفق العمود الثالث :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 204 - 3 - 76 = 125$$

- يستحسن النشر وفق السطر أو العمود الذي به أكبر عدد من الأصفار تقليلا للحسابات.

حساب مقلوب مصفوفة مربعة قابلة للقلب باستعمال المحدد

نضع من أجل كل $i, j = 1, 2, 3, \dots n$ ، $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$. تسمى (C) المصفوفة المرافقة للمصفوفة A.

إذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للقلب رتبتها n فإن : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(C_{i,j}\right)^t$

- من أجل n = 2 . $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ إذا كان $ad - cb \neq 0$ فإن A قابلة للقلب و مقلوبها

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t$$

- من أجل n = 3 نضع $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ ونفرض أن det A يختلف عن 0 . عندئذ:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t$$

4. 2. جمل المعادلات الخطية