الفصل 3 : المصفوفات

3. 1. تعاريف ومصطلحات

تعريف:

نسمي مصفوفة من النمط $m\times n$ كل جدول من عناصر $\mathbb{K}$ مكون من m سطرا و n عمودا. نرمز لمجموعة المصفوفات من النمط $m\times n$ بالرمز $M_{m,n}$.

لتكن A مصفوفة من النمط $m\times n$.

- عناصر الجدول تسمى معاملات المصفوفة.
- المعامل الذي يقع في السطر i والعمود j بالرمز $a_{i,j}$ ونكتب عندئذ $A=[a_{i,j}]$ أو $A=(a_{i,j})$ أو :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots a_{1,j} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,j} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} \dots & a_{i,j} \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \dots & a_{m,j} \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- إذا كان $m \neq n$ نقول إن A مصفوفة مستطيلة.
- إذا كان $m = n$ نقول إن A مصفوفة مربعة من الدرجة n ونرمز بالرمز M_n لمجموعة المصفوفات من النمط $n\times n$.

أمثلة:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 2 بينما $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستطيلة من النمط 2×3 .

تعريف:

نقول إن المصفوفتين $A=(a_{i,j})$ و $B=(b_{i,j})$ متساويتان إذا وفقط إذا كانتا من نفس النمط $m\times n$ وكان $a_{i,j}=b_{i,j}$ من أجل كل $1\leq i\leq m$ و $1\leq j\leq n$ ونكتب عندئذ $A=B$.

أمثلة :

$$A\backslash=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 3 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

لدينا : C=D بينما المصفوفات A, B, C, E مختلفة مثنى مثنى(كل اثنتين منها غير متساويتين).

3. 2. عمليات على المصفوفات

مجموع المصفوفتين $A=(a_{i,j})$ و $B=(b_{i,j})$ من النمط $m\times n$ هو المصفوفة $C=(c_{i,j})$ من نفس النمط بحيث : $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ من أجل كل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ ونكتب عندئذ $C=A+B$.

مثال : $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & 7\end{pmatrix}$ غير معرف لأن المصفوفتين ليستا من نفس النمط.

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 8\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 11\\ 4 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5 & 7\\ -3 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 5 & 4\\ 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 2 & 7\\ 10 & 3\end{pmatrix}$$

- إذا رمزنا بـ $0_{m,n}$ للمصفوفة التي جميع معاملتها معدومة فإن $A+0_{m,n}=A$ من أجل كل مصفوفة A من النمط $m\times n$.
- إذا رمزنا بـ $-A$ للمصفوفة التي معاملاتها هي معاكسات معملات المصفوفةA فإن

$A+(-A)=0_{m,n}$.

مبرهنة :

$\boxed{(M_{m,n},+)\ \text{زمرة تبديلية}}$

جداء مصفوفة $A=(a_{i,j})$ من النمط $m\times n$ بالسلمية α هي المصفوفة $C=(c_{i,j})$ من نفس النمط بحيث: $c_{i,j}=\alpha a_{i,j}$ من أجل كل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ ونكتب عندئذ $C=\alpha A$.

أمثلة :

$$2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & -6\end{pmatrix},-3\begin{pmatrix}-15 & -21\\ 9 & -9\\ -3 & 0\end{pmatrix},$$

مبرهنة :

$(M_{m,n}, +, .)$ هو $\mathbb{K}$ - ف ش بعده $m\times n$. حيث ترمز النقطة إلى عملية ضرب مصفوفة بسلمي.

تشكل الجملة $\{(a_{p,q}) : a_{p,q}= 1 \text{ si } (p ,q) =(i,j) \text{ et } a_{p,q} =1 \text{ si } (p,q)\neq(i ,j) : 1\leq i\leq m \text{ et } 1\leq j\leq n \}$ أساسا $(M_{m,n}, +, .)$ يدعى الأساس القانوني له.

الأساس القانوني لـ M_2 هو : $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

الأساس القانوني لـ M_3 هو :

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

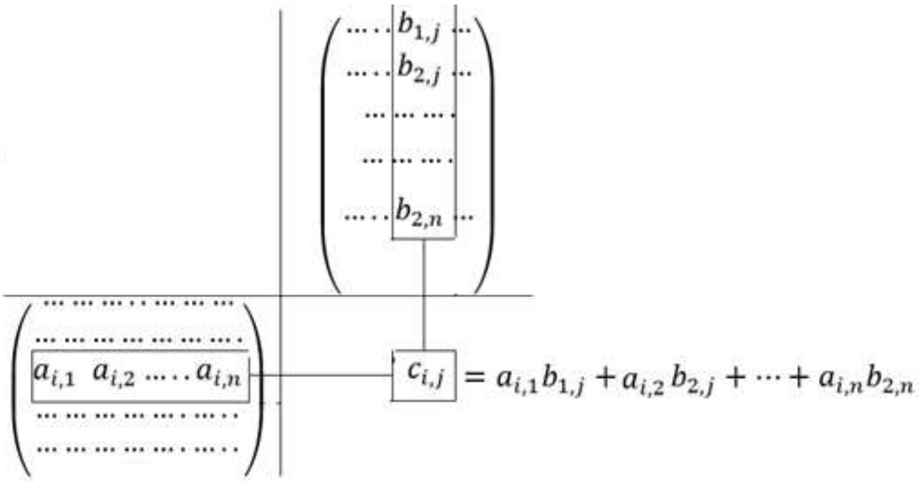
الأساس القانوي لـ $M_{3,2}$ هو:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

الأساس القانوي لـ $M_{2,3}$ هو:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

جداء المصفوفة $A=(a_{i,j})$ من النمط $m\times n$ والمصفوفة $B=(b_{i,j})$ من النمط $n\times p$ هي المصفوفة المصفوفة $C=(c_{i,j})$ من النمط $m\times p$ بحيث : $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ من أجل كل $1\leq i\leq m$ و $1\leq j\leq p$ ونكتب عندئذ $C=AB$. ينصح بحساب جداء مصفوفتين وفق الجدول :



أمثلة :

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\3&11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\4&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$$

خواص :

- يكون الجداء AB معرفا إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B.
- إذا كانت A و B غير مربعتين فإن جداء واحدا على الأكثر من الجداءين AB و BA معرف.

$\begin{pmatrix}8&11\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7\\-3&3\\1&0\end{pmatrix}$ معرف بينما $\begin{pmatrix}5&7\\-3&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&11\\4&1\end{pmatrix}$ غير معرف.

كلا الجداءين $\begin{pmatrix}2&9\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9\\1&5\end{pmatrix}$ غير معرف.

- إذا كانت A وB مربعتين فإن الجداءين AB و BA معرفان معا ولكنهما عموما غير متساويين.
- إذا كانت Bو C من النمط $M_{m,n}$ وكانت A من النمط $M_{p,n}$ فإن : A(B + C) = AB + AC.
- إذا كانت Aو B من النمط $M_{m,n}$ وكانت C من النمط $M_{n,p}$ فإن : (A + B)C = AC + BC.
- AB=AC لا يعني بالضرورة أن A=B.
- إذا كانت A , B, C مصفوفات مربعة من نفس الدرجة فإن : (AB)C = A(BC).
- إذا رمزنا بـ 0 للمصفوفة المعدومة كان الجداء 0A معرفا فإن 0 = 0A. (نفس الملاحظة بالنسبة لـ A 0 =0).
- AB =0 لا يعني بالضرورة أن A معدومة أو B معدومة.

منقول المصفوفة : A هي المصفوفة A^t الناتجة عن المبادلة بين أسطر ةأعمدة A.

مثال : $\begin{pmatrix}2&6&-1\\3&1&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}2&3\\6&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

خوا ص:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
3. $(AB)^t = A^t B^t$.

.4 = $(A^t)^t$ A.

أثر المصفوفة المربعة A هو مجموع عناصر قطرها الرئيسي ونرمز له بالرمز tr(A).

$$tr\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 2\end{pmatrix} = -1+2 = 1, tr\begin{pmatrix}2 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 5\\ 11 & 2 & -4\end{pmatrix} = 2+0-4$$

خواص :

- يعرف tr شكلا خطيا على M_n مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة n. أي
  $tr(\alpha A+\beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$
- من أجل كل مصفوفتين مربعتين من نفس الدرجة لدينا : $tr(AB) = tr(A)tr(B)$.
- $Tr(A^t) = tr(A)$.

3 .3. المصفوفات المربعة

نتعرض في هذه الفقرة لبعض خواص المصفوفات المربعة. في كل هذه الفقرة n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

نرمز بـ 0_n للمصفوفة المربعة من الدرجة n التي جميع معاملاتها معدومة.

و بـ I_n للمصفوفة المربعة من الدرجة n التي معاملات قطرها الرئيسي تساوي 1 وبقية المعاملات معدومة. $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

من أجل كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n لدينا : $A + 0_n = A_n$ و $AI_n = I_n A = A$.

مبرهنة :

$(M_n, +, \times)$ هي حلقة واحدية غير تبديلية وغير تامة صفرها 0_n وواحدها I_n حيث يرمز $\times$ إلى ضرب المصفوفات.

مصفوفات خاصة : لتكن $A= (a_{i,j})$ مصفوفة مربعة درجتها n $(1\leq i,j \leq n)$.

- إذا كان $a_{i,j} = 0$ من أجل كل i>j نقول إن A مثلثية علوية مثل : $\begin{pmatrix}8 & -1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 8 & 0\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.
- إذا كان $a_{i,j} = 0$ من أجل كل i<j نقول إن A مثلثية سفلية مثل : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$.

- إذا كان $a_{i,j} = 0$ من أجل كل $i \neq j$ نقول إن A قطرية مثل : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.
- إذا كان $A^t = A$ أي $a_{i,j} = a_{j,i}$ من أجل كل i,j نقول إن A تناظرية مثل :
$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 7 \\ -6 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.
- إذا كان $A^t = -A$ أي $a_{i,j} = -a_{j,i}$ من أجل كل i,j نقول إن A ضد تناظرية مثل :
$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 8 \\ 6 & -8 & 0 \end{pmatrix}$.

تعريف :

نقول إن المصفوفة المربعة A قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة مربعة B من نفس الدرجة بحيث يكون: $AB = BA = I_n$. تسمى B مقلوب A و نكتب عندئذ $B = A^{-1}$.

مثال : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

خواص :

- إذا وجد مقلوب مصفوفة مربعة فهو وحيد.
- توجد مصفوفات مربعة غير قابلة للقلب مثل : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ذلك أننا لو فرضنا أن لها مقلوبا $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ لكان $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وهذا مستحيل.
- إذا كانت A و B قابلتين للقلب فإن AB قابلة للقلب و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ذلك أن :
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ حيث يرمز A^t إلى منقول A .

3. 4. المصفوفة المرفقة بتطبيق خطي

في هذه الفقرة يرمز E و F إلى $\mathbb{K}$ - فضاءين شعاعيين ذوي بعد منته.

تعريف:

ليكن A أساس لـ E و B أساسا لـ F و $f \in \mathcal{L}(E, F)$. المصفوفة المرفقة بالتطبيق الخطي f وفق الأساسين A و B هي المصفوفة $M(f, A, B)$ من النمط $M_{\text{Dim } F, \text{Dim } E}$ التي تتكون أعمدتها من صور احداثيات أشعة الأساس A في الأساس B.

ليكن $A = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ و $B = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. نضع : $f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \dots + a_{p,j}$ من أجل كل $1 \le j \le n$ ومنه العمود ذو الرتبة j في المصفوفة $M(f, A,B)$ هو $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ . \\ . \\ a_{p-1,j} \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$.

أمثلة :

- ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \to (2x+y, x-y, 6x+y)$ المصفوفة المرفقة بالتطبيق الخطي f وفق الأساسين القانونين لـ $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ هي : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
- ليكن $g : E \to F$, $p \to p'$ حيث E هو فضاء كثيرات الحدود ذات درجة أقل أو يساوي 3 و F فضاء كثيرات الحدود ذات درجة أقل أو يساوي 2. المصفوفة المرفقة بالتطبيق الخطي g وفق الأساسين القانونين لـ E و F هي : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

خواص :

- يتعين التطبيق الخطي f تماما بإعطاء مصفوفة له وفق أساس لمجموعة البدء وأساس لمجموعة الوصول.
- $M(f + g, A,B) = M(f, A,B) + M(g, A,B)$
- $M(\alpha f, A,B) = \alpha M(f, A,B)$.
- f تقابلي إذا وفقط إذا كانت $M(f, A,B)$ مربعة قابلة للقلب.
- إذا كان f تقابليا فإن : $M(f^{-1}, B,A) = (M(f ,A,B))^{-1}$.
- $M(1_E, A, A) = I_{Dim(E)}$ حيث يرمز 1_E إلى التطبيق الحيادي لـ E.
- إذا كان $f \in \mathcal{L}(F, G)$ و $g \in \mathcal{L}(E, F)$ و A, B,C أسس لـ E, F, G على التوالي فإن :

$$M(f \circ g , A, B) = M(f, B, C)\, M(g, A, B)$$

تعريف :

رتبة مصفوفة هي رتبة التطبيق الخطي المرفقة به وفق اساسين معينين.

ليكن $f\in\mathcal{L}(E, F)$ و A المصفوفة المرفقة بـ f وفق أساسين لـ E و F . نرمز لرتبة A بالرمز rg(A) .

- إذا كان f متباينا فإن $rg(A) = Dim(E) = Dim(F)$.
- إذا كان f غير متباين فإن $rg(A) < Dim (E)$.
- نفرض أن $f\in\mathcal{L}(E)$ عندئذ : $rg(A) = Dim (E)$ إذا وفقط إذا كانت A قابلة للقلب.
- رتبة A هي العدد الأكبر للأشعة العمودية لـ A والمستقلة خطيا.
- رتبة A هي العدد الأكبر للأشعة الأفقية لـ A والمستقلة خطيا.
- $rg(A) = rg(A^t)$.

3. 5. تغيير الأساس

رأينا أن المصفوفة المرفقة بتطبيق $f\in\mathcal{L}(E, F)$ خطي تتعلق بالأساسين المختارين لـ E و F فإذا غيرنا هذين الأساسين فإن المصفوفة تتغير عموما، في هذه الفقرة سنتطرق إلى بعض القواعد التي تحكم هذا التغيير.

قضية :

- المصفوفة المرفقة بالتطبيق الحيادي 1_E وفق نفس الأساس هي $I_{Dim(E)}$.
- المصفوفة المرفقة بالتطبيق الحيادي 1_E وفق أساسين مختلفين تختلف عن $I_{Dim(E)}$.

مصفوفة الانتقال

تعريف :

ليكن A و B أساسين مختلفين لنفس الفضاء الشعاعي E. مصفوفة العبور (الانتقال) من الأساس A إلى الأساس B هي $P_{A, B} = M(1_E, A, B)$ باعتبار 1_E تطبيقا من E مزودا بالأساس A في E مزودا بالأساس B.

خواص :

- تتكون أعمدة مصفوفة الانتقال من A إلى B من احداثيات أشعة الأساس A بالنسبة للأساس B.
- إذا كان A = B فإن $P_{A, B} = I_{Dim(E)}$
- إذا كان $x=(a_1, a_2, \dots, a_n)_A$ وكان $x=(b_1, b_2, \dots, b_n)_B$ فإن :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = P_{A,B} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

- $P_{A,B}$ قابلة للقلب ومقلوبها هي $P_{B,A}$.
- إذا كانت A, B, C ثلاثة أساسات لنفس الفضاء فإن : $P_{A,C} = P_{AB} \times P_{B,C}$.

مثال :

ليكن $A= (e_1, e_2)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ و$B = (u_1, u_2)$ أساسا آخر حيث :

$u_1 = 2e_1 + 3e_2$ ، $u_2 = e_1 + 2 e_2$. لدينا $u_1=(1, 1)_A$ و $u_2 = (1, -1)A$.

ومنه $P_{B,A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

لنعبر عن e_1 و e_2 بدلالة u_1 و u_2، لدينا : $\begin{cases} 2e_1 + 3e_2 = u_1 \\ e_1 + 2e_2 = u_2 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} e_1 = 2u_1 - 3u_2 \\ e_2 = -u_1 + 2u_2 \end{cases}$

إذن : $P_{A,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. ليكن $v = (1, 6)_A$ لدينا : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ ومنه $v = (-4 , 9)_B$.

مبرهنة:

ليكن: $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ، A,A' أساسان لـ E ،B,B' أساسان لـ F، M المصفوفة المرفقة بـ f وفق الأساسين A و B ، M' المصفوفة المرفقة بـ f وفق الأساسين A' وB'. لدينا : $\mathbf{M' = Q^{-1} MP}$ حيث: $P= P_{A, A'}$ و $Q = P_{B, B'}$.

حالة خاصة :

ليكن: $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ، A,B أساسان لـ E ، M المصفوفة المرفقة بـ f وفق الأساس A ، M' المصفوفة المرفقة بـ f وفق الأساس B. لدينا : $\mathbf{M' = P^{-1} MP}$ حيث: $P= P_{A, A'}$.

تعريف :

• نقول عن مصفوفتين $A,B \in M_{n,p}$ إنهما **متكافئتان** إذا وجدت مصفوفة مربعة Q قابلة للقلب درجتها P ومصفوفة مربعة قابلة للقلب درجتها n بحيث : $B = QAP$. • نقول عن المصفوفتين المربعتين من نفس الدرجة إنهما **متشابهتان** إذا وجدت مصفوفة مربعة من نفس الدرجة وقابلة للقلب بحيث : $B = P^{-1} A P$.