الفصل 2 : التطبيقات الخطية

في كل ما يلي E و F ف ش على $\mathbb{K}$.

2. 1. تعريف ونتائج أولية

تعريف :

ليكن f تطبيقا معرفا من E نحو F نقول إن f تطبيق خطي إذا تحقق ما يلي :
1) $\forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y)$ 2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

أمثلة :

التطبيقات التالية هي تطبيقات خطية.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ حيث a عدد حقيقي .
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ax + by$ حيث a و b عددان حقيقيان .
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$
4) $P : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], g \mapsto g'$ حيث g' هو مشتق g.
5) $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3, g \mapsto (g(0), g(1), g(2))$.

التطبيقات التالية ليست خطية :

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x + y, x - y)$

نتائج :

ليكن E,F ف ش على $\mathbb{K}$ و ليكن f تطبيقا خطيا معرفا من E في F.

- $f(0_E) = 0_F$ لأن $f(0_E) = f(0 . x) = 0 . f(x) = 0_F$.
- من أجل كل $x \in E$ لدينا : $f(-x) = (-1)f(x) = -f(x)$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ وبالعكس إذا كان g تطبيقا معرفا على E بحيث $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$ فإن g خطي.
- إذا رمزنا بـ $\mathcal{L}(E, F)$ لمجموعة التطبيقات الخطية المعرفة من E نحو F فإن $\mathcal{L}(E, F)$ مزودة بعمليتي جمع التطبيقات وضرب تطبيق بعدد هي $\mathbb{R}$ - ف ش. نضع $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$.

ملاحظة :

إذا كان f تطبيقا خطيا من E في $\mathbb{K}$ فإن f يسمى شكلا خطيا. نسمي $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ الثنوي الجبري لـ E ونرمز له بالرمز E^*.

قضية :

ليكن $f\in \mathcal{L}(E, F)$.
- صورة عائلة أشعة من E مرتبطة خطيا هي عائلة من F مرتبطة خطيا.
- إذا كان E ذا بعد منته فإن صورة عائلة مولدة لـ E هي عائلة مولدة لـ Im f .
- صورة ف ش ج من E بالتطبيق f هي ف ش ج من F.
- الصورة العكسية لـ ف ش ج من F هي ف ش ج من E .

برهان :

- لتكن $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ عائلة مرتبطة من E ومنه توجد $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\in \mathbb{K}$ لا تنعدم معا بحيث

$\alpha_1x_1+ \alpha_2x_2+ ..., \alpha_px_p = 0_E$ ومنه $\alpha_1f(x_1)+ \alpha_2f(x_2)+ ..., \alpha_pf(x_p) = f(0_E)=0_F$ أي

$\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_p)\}$ عائلة مرتبطة خطيا من F.

- لتكن $A= \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ عائلة مولدة لـ E (أي كل عنصر من E يكتب كمزج خطي لعناصر من A).

إذا كان $y \in \text{Im } f$ فإنه يوجد $x \in E$ بحيث : $f(x) = y$. من جهة أخرى توجد $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\in \mathbb{K}$ بحيث : $x = \alpha_1x_1+ \alpha_2x_2+ ..., \alpha_px$ ومنه $y = \alpha_1f(x_1)+ \alpha_2f(x_2)+ ..., \alpha_pf(x_p)$ إذن الجملة :

$\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_p)\}$ مولدة لـ Im f .

- ليكن G ف ش ج منE. $F(G) = \{y \in F : \exists\, x \in G \text{ avec } y = f(x) \} \subseteq F$

إذا كان $y_1, y_2 \in f(G)$ فإنه يوجد $x_1, x_2 \in G$ بحيث : $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. من أجل كل $\alpha, \beta\in \mathbb{K}$ لدينا : $\alpha y_1 + \beta\, y_2 = \alpha f(x_1)+ \beta\, f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta\, x_2)$ و بما أن G ف ش ج منE فإن :

$\alpha x_1 + \beta\, x_2\in G$ ومنه $\alpha y_1 + \beta\, y_2\in f(G)$ ومنه f(G) ف ش ج من F .

- ليكن H ف ش ج من F . إذا كان $x_1, x_2 \in f^{-1}(H)$ فإن $f(x_1), f(x_2) \in H$. $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. من أجل كل $\alpha, \beta\in \mathbb{K}$ لدينا : $f(\alpha x_1 + \beta\, x_2) = \alpha f(x_1)+ \beta\, f(x_2) \in H$ لأن H ف ش ج منF ومنه

$\alpha x_1 + \beta\, x_2\in f^{-1}(H)$ إذن $f^{-1}(H)$ ف ش ج من E .

2 .2. صورة ونواة تطبيق خطي

تعريف :

ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
نسمي نواة f المجموعة : $\text{Ker } f = \{x \in E : f(x) = 0_F\} \subseteq E$.
نسمي صورة f المجموعة : $\text{Im } f = \{y \in F : \exists\, x \in E \text{ avec } y = f(x)\} \subseteq F$.

أمثلة:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax\ k$. $\text{Im } f = \mathbb{R}$ $\text{Ker } f = \{0\}$.

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ax + by$ حيث a و b عددان حقيقيان .

$\text{Im } f = \mathbb{R}$ $\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$

$\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$

4) $P : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], g \mapsto g'$ حيث g' هو مشتق g.

Ker P هي مجموعة كثيرات الحدود الثابتة على $\mathbb{R}$. Im P هي $\mathbb{R}[X]$.

5) $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3, g \mapsto (g(0), g(1), g(2))$.

Ker g هي مجموعة كثيرات الحدود ذات درجة أصغر أو تساوي 3 والتي تنعدم عند كل من 0 و 1 و 2.

Im g هو $\mathbb{R}^3$.

مبرهنة :

إذا كان $f \in \mathcal{L}(E, F)$ فإن Ker f و Im f هما ف ش ج من E و F على الترتيب .

برهان :

- ليكن $x, y \in E$. إذا كان $x_1, x_2 \in \text{Ker } f$ فإن : $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

من أجل كل $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ لدينا $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = 0$ ومنه $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \text{Ker } f$
ومنه Ker f ف ش ج من E .

- ليكن $y_1, y_2 \in F$. إذا كان $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\, f$ فإنه يوجد $x_1, x_2 \in E$ بحيث : $y_1 = f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$. من أجل كل $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ لدينا: $\alpha y_1+ \beta y_2= \alpha f(x_1)+ \beta f(x_2) = f(\alpha x_1+ \beta x_2)$ ومنه $\alpha y_1+ \beta y_2 \in \mathrm{Im}\, f$ إذن $\mathrm{Im}\, F$ ف ش ج من F .

مبرهنة :

ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- f متباين $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
- f غامر $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = F$.
- إذا كان E ذا بعد منته فإن : f متباين $\Leftrightarrow \mathrm{Dim}\, E = \mathrm{Dim}\, (\mathrm{Im}\, E)$

وبصورة خاصة : إذا كان E ذا بعد منته و $\mathrm{Dim}(E) = \mathrm{Dim}(F)$ فإن القضايا التالية متكافئة :

1) f متباين 2) f غامر 3) f تقابلي

برهان :

- نفرض أن f متباين. إذا كان $x \in \mathrm{Ker}\, f$ فإن $f(x)= 0_F =f(0_E)$ ومنه $x = 0_E$.

نفرض أن $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. ليكن $x, y \in E$ إذا كان $f(x) = f(y)$ فإن $f(x - y)= 0_F$ ومنه $x - y = 0_E$ ومنه $x = y$ إذن f متباين.

- واضح من تعريف $\mathrm{Im}\, f$ أن f غامر يكافئ أن $\mathrm{Im}\, f = F$ (الخطية لا تلعب أي دور في هذه الخاصية).
- لنفرض الآن أن E ذا بعد منته. إذا كان f متباينا فإن $\mathrm{Ker}\, f =\{0_E\}$.

لتكن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساسا لـ E ، بما أن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مولدة لـ E فإن $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}$ مولدة $\mathrm{Im}\, f$. لتكن $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ عناصر من $\mathbb{K}$ بحيث: $\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+ ...+\alpha_n f(x_n) = 0_F$

بما أن f متباين و $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مستقلة فإن:

$$\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+ ...+\alpha_n f(x_n) = 0_F \Rightarrow f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+ ...+\alpha_n x_n) = 0_F$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+ ...+\alpha_n x_n = 0_E$$

$$\Longrightarrow \alpha_1= \alpha_2= ...= \alpha_n=0$$

ومنه $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}$ مستقلة فهي إذن أساس لـ$\mathrm{Im}\, f$ ومنه $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Dim}\, E$.

لنفرض الآن أن $\mathrm{Dim}\, E = \mathrm{Dim}\, \mathrm{Im}\, f$

لتكن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساسا لـ E . بما أن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مولدة لـ E فإن $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}$ مولدة لـ $\mathrm{Im}\, f$ وبما أن عدد عناصرها يساوي $\mathrm{Dim}\, \mathrm{Im}\, f$ فهي أساس لـ $\mathrm{Im}\, f$.

ليكن : $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...+\alpha_n x_n,\ y = \beta_1 x_1+\beta_2 x_2 +...+\beta_n x_n \in E$ ومنه :

$f(x) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2(x_2) + \ldots + \alpha_n(x_n)$ et $y = \beta_1(x_1) + \beta_2(x_2) + \ldots + \beta_n(x_n)$

إذا كان $f(x) = f(y)$ فإن $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ لأن كل عنصر من Im f يكتب بصورة وحيدة كمزج خطي لـ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ومنه $x = y$ أي f متباين.

3. 2 . رتبة تطبيق خطي

ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$ رأينا أنه إذا كانت عائلة مولدة لـE فإن صورتها بـ f مولدة لـ Im f فإذا كان E ذا بعد منته فإن Im f كذلك .

تعريف :

ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$ بحيث E ذ وبعد منته. نسمي بعد Im f برتبة f نرمز لها بالرمز rg(f).

ملاحظات:

- نفرض أن F ذا بعد منته. بما أن Im f ف ش ج من F فإن $rg(f) \leq Dim\ F$ و إذا كان f غامرا فإن : rg(f) = Dim F.
- إذا كان $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ أساسا لـ E فإن : $rg(f) = Dim\,(vect(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

مبرهنة (مبرهنة الرتبة)

إذا كان $f \in \mathcal{L}(E, F)$ بحيث E ذ وبعد منته فإن : $Dim\ E = Dim(\ker f) + rg(f)$.

مثال :

نعتبر التطبيق $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x + y, x - z)$

إذا كان $(x, y, z) \in Ker\ f$ فإن $2x + y = 0$ و $x - z = 0$ ومنه

$$Ker\ f = \{(x, -2x, x) = x(1, -2, 1) : x \in \mathbb{R}\} = vect((1, -2, 1))$$

ومنه $Dim(Ker\ f) = 1$ ومن مبرهنة الرتبة لدينا : $3 = 1 + rg(f)$ ومنه $rg(f) = 2$.

4.2 تركيب تطبيقين خطيين، التطبيق العكسي لتطبيق خطي تقابلي

في هذه الفقرة يشير E, F, G إلى ثلاثة فضاءان شعاعية على الحقل $\mathbb{K}$.

مبرهنة:

إذا كان $g \in \mathcal{L}(E,F)$ و $f \in \mathcal{L}(F,G)$ فإن $f \circ g \in \mathcal{L}(E,G)$.

برهان :

من أجل كل $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ وكل $x, y \in E$ لدينا :

$$f \circ g(\alpha x+\beta y) = f(g(\alpha x+\beta y)) = f(\alpha g(x)+\beta g(y))$$

$$= \alpha f(g(x))+\beta f(g(y)) = \alpha f \circ g(x)+\beta f \circ g(y).$$

خواص:

- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(F,G), \forall g \in \mathcal{L}(E,F) : (f_1+f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$
- $\forall f \in \mathcal{L}(F,G), \forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E,F) : f \circ (g_1+g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$

هتان الخاصيتان تفسران تسمية $f \circ g$ بجداء التطبيقين f و g ومنها جاء الترميز $f^2 = f \circ f$ حيث $f \in \mathcal{L}(E)$.

مبرهنة:

إذا كان f تقابليا بحيث $f \in \mathcal{L}(E,F)$ فإن $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ حيث f^{-1} يرمز إلى التطبيق العكسي لـ f .

برهان :

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ و $y_1, y_2 \in F$. يوجد $x_1, x_2 \in F$ بحيث : $\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha f^{-1}(y_1)+\beta f^{-1}(y_2)$

ومن جهة أخرى $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1)+\beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$ ومنه

$\alpha x_1 + \beta x_2 = f^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$ ومنه $f^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f^{-1}(y_1)+\beta f^{-1}(y_2)$.