الفصل 1 : الفضاءات الشعاعية

في كل ما يلي يرمز $\mathbb{K}$ إلى أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

1. 1. تعريف ونتائج أولية

تعريف :

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية "+" : $(x, y) \to x+y$ وعملية خارجية "." مجموعة مؤثراتها $\mathbb{K}$: $(\lambda, x) \to \lambda.x$.
نقول إن المجموعة $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ أو $\mathbb{K}$- فضاء شعاعي ($\mathbb{K}$- ف ش) إذا تحققت الشروط التالية :
1) $(E, +)$ زمرة تبديلية.
2) أ) $\forall x, y \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$
ب) $\forall x \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$
جـ) $\forall x \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$
د) $\forall x \in E : 1.x = x$

أمثلة :

1) $\mathbb{K}$ هو $\mathbb{K}$- ف ش إذا اعتبرنا عملية الضرب كعملية خارجية.
2) $\mathbb{C}$ هو $\mathbb{R}$- ف ش.
3) $\mathbb{R}^2$ مزودة بالعمليتين : $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$ و $a.(x, y) = (ax, ay)$ هي $\mathbb{R}$- ف ش.
4) مجموعة التوابع المعرفة على مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$ مزودة بعملية جمع التوابع وضرب تابع بعنصر من $\mathbb{K}$ هي $\mathbb{K}$- ف ش.
5) مجموعة المتتاليات التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ مزودة بعملية جمع المتتاليات وضرب متتالية بعدد حقيقي هي $\mathbb{R}$- ف ش.

اصطلاحات وترميزات

ليكن E فضاء شعاعيا على $\mathbb{K}$.

- عناصر E تسمى أشعة ونرمز لها بـ : $x, y, z, t, \ldots$ بينما عناصر $\mathbb{K}$ تسمى سلميات ونرمز لها $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.
- فيما يلي نكتب αx بدلا من $\alpha.\ x$.
- العنصر الحيادي لعملية جمع الأشعة يسمى الشعاع المعدوم ونرمزله بالرمز 0_E أو ببساطة 0 وفي هذه الحالة يفرق بينه وبين العنصر الحيادي لعملية جمع الأعداد من خلال السياق الرياضي.

- نرمز لنظير x بالنسبة لعملية جمع الاشعة بالرمز $-x$.

نتائج من التعريف (قواعد الحساب في ف ش)

لتكن x, y عنصرين كيفيين من E و α, β عنصرين كيفيين من $\mathbb{K}$. لدينا الخواص التالية :

- $\boldsymbol{0.x = 0_E}$

لأن : $\alpha.x = (\alpha + 0).x = \alpha.\, x + 0.\, x$.

- $\boldsymbol{\alpha.0_E = 0_E}$

لأن : $\alpha.x = \alpha.(0_E+x) = \alpha.\, 0_E+ \alpha.x$.

- $\boldsymbol{\alpha.x= 0 \Leftrightarrow \alpha = 0}$ **أو** $\boldsymbol{x = 0_E}$.

رأينا في الخاصيتين السابقتين أنه إذا كان $\alpha = 0$ أو $x = 0_E$ فإن $\alpha.x = 0_E$.

نفرض أن : $\alpha.x = 0_E$ و α غير معدوم عندئذ $\alpha^{-1}\, \alpha.x = \alpha^{-1}.\, 0_E$ ومنه $1.x = 0_E$ أي $x = 0_E$.

- $\boldsymbol{-(\alpha.x) = (-\alpha).x = \alpha.(-x)}$

لأن : $0_E = 0.\, x = (-\alpha + \alpha).x = (-\alpha).x + \alpha.\, x$

و $0_E = 0.\, x = \alpha.(-x + x)= \alpha.(-x) + \alpha.\, x$.

- $\boldsymbol{\alpha.(x - y) = \alpha.\, x - \alpha.\, y}$.

1 .2. الفضاءات الشعاعية الجزئية

تعريف :

ليكن E ف ش على $\mathbb{K}$ و F جزءا غير خال من E. نقول إن F فضاء شعاعي جزئي من E *(ف ش ج) إذا كان F مستقرا بالعملية الداخلية "+"والعملية الخارجية "." . أي إذا تحقق الشرطان:*

1) $\forall x, y \in F : x + y \in F$ 2) $\forall x \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha.x \in F$

أمثلة:

1) إذا كان E ف ش على $\mathbb{K}$ فإن كل من E و $\{0_E\}$ فضاءان شعاعيان جزئيان من E.
2) المجموعة $F= \{(x, y)\in \mathbb{R}^2 : ax +by = 0 \}$ هي ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.
3) مجموعة المتتاليات الحقيقية المتقاربة هي ف ش ج من فضاء المتتاليات الحقيقية.
4) مجموعة المتتاليات الحقيقية المتباعدة ليست ف ش ج من فضاء المتتاليات الحقيقية.
5) مجموعة المتتاليات الحقيقية الموجبة ليست ف ش ج من فضاء المتتاليات الحقيقية.

6) مجموعة كثيرات الحدود ذات الدرجة الأصغر أو تساوي n هي ف ش ج من فضاء التوابع الحقيقية التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

7) مجموعة كثيرات الحدود ذات الدرجة n ليست ف ش ج من فضاء التوابع الحقيقية التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

ملاحظة :

الشعاع المعدوم ينتمي إلى كل فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{K}$ ف ش

بالفعل، إذا كان F فضاء شعاعيا جزئيا من $\mathbb{K}$-ف ش E، فإن F غير خال أي يوجد x ينتمي إلى F ومنه $0_E = 0.\, x \in F$.

قضية :

كل ف ش ج من $\mathbb{K}$-ف ش هو بدوره $\mathbb{K}$-ف ش

برهان :

ليكن F ف ش ج من $\mathbb{K}$-ف ش E . بما أن F جزء من E فإن الشروط أ) و ب) و ج) و د) في تعريف ف ش محققة. من جهة أخرى إذا كان x عنصرا من F فإن $0_E = 0.x \in F$ و $-x = (-1).x \in F$

ومنه $(F, +)$ زمرة تبديلية إذن $(F, +, .)$ هو $\mathbb{K}$ – ف ش.

ملاحظة :

إذا كان F ف ش ج من $\mathbb{K}$ ف ش E فإن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(E, +)$

قضية :

لكي يكون F ف ش ج من $\mathbb{K}$-ف ش يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط : $\forall x, y \in F,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha.\, x + \beta.\, y \in F$

برهان :

إذا كان F ف ش ج من $\mathbb{K}$-ف ش فإن : $\alpha.\, x\,,\ \beta.\, y \in F$ ومنه $\alpha.\, x + \beta.\, y \in F$.

بالعكس، نفرض أن : $\forall x, y \in F,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha.\, x + \beta.\, y \in F$.

بأخذ: $\alpha = \beta = 1$ نجد $\forall x, y \in F,\ \forall x,y \in F:\ x + y \in F$ وبأخذ $\beta = 0$ نجد

$\forall x \in F,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha.\, x \in F$ ومن F $\mathbb{K}$-ف ش ج.

قضية :

إذا كان F و G ف ش ج من $\mathbb{K}$-ف ش E فإن : $F\cap G$ ف ش ج من E.

برهان:

ليكن $x, y\in F\cap G$ ومنه $x, y\in F$ و $x, y\in G$ إذن :

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{K} :\ \alpha.x+\beta.y\in F \quad و \quad \alpha.x+\beta.y\in G$$

أي :

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{K} :\ \alpha.x+\beta.y\in F\cap G.$$

ملاحظة :

اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس بالضرورة فضاء شعاعيا جزئيا

نضع : $F_1 = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ و $F_2 = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$

رأينا أن F_1 و F_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من $\mathbb{R}^2$.

لدينا : $(1, 1), (1, -1) \in F_1\cup F_2$ و $(1, 1)+(1, -1)=(2, 0) \notin F_1\cup F_2$ ومنه $F_1\cup F_2$ ليس ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.

تعريف :

ليكن E $\mathbb{K}$- فضاء شعاعيا و لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_p$ عناصر من E و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ عناصر من $\mathbb{K}$.
كل عنصر من E يكتب على الشكل $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_px_p$ حيث : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ عناصر من $\mathbb{K}$ يسمى مزجا خطيا للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

أمثلة :

1) الشعاع : $(2, 3)=2(1, 0)+3(0, 1)$ هو مزج خطي للشعاعين $(1, 0)$ و $(0, 1)$.
2) في فضاء كثيرات الحدود ذات المتغير الحقيقي. الشعاع $2x^3 - 4x^2 + x$ هو مزج خطي للأشعة x^3, x^2, x.
3) في فضاء التوابع العددية ذات المتغير الحقيقي. الشعاع $2e^x + 7\cos x + \sin x$ هو مزج خطي للأشعة $e^x, \cos x, \sin x$.
4) في فضاء المتتاليات الحقيقية. الشعاع $(1/2)u_n - 6v_n$ هو مزج خطي للشعاعين u_n, v_n.

قضية :

ليكن E $\mathbb{K}$- فضاء شعاعيا و لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_p$ عناصر من E. مجموعة كل المزوج الخطية للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_p$ هي ف ش ج من E.

برهان :

لتكن F مجموعة كل المزوج الخطية للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

إذا كان $x, y \in F$ فإنه يوجد $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$ بحيث :

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p \quad \text{et} \quad y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p$$

من أجل كل $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ لدينا

$$\lambda x + \mu y = (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1) x_1 + (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2) x_2 + \ldots + (\lambda \alpha_p + \mu \beta_p) x_p \in F .$$

تعريف :

ليكن A جزءا من $\mathbb{K}$- فضاء شعاعي E. الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ A هو أصغر فضاء شعاعي جزئي من E يحوي A. ونرمز له بالرمز : $vect(A)$.

مبرهنة :

إذا كان $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ جزءا من $\mathbb{K}$- فضاء شعاعي E فإن $vect(A)$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي المشكل من كل المزوج الخطية للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

برهان:

ليكن F الفضاء الشعاعي الجزئي المشكل من كل المزوج الخطية للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

بما أن $vect(A)$ ف ش على الحقل $\mathbb{K}$ فإن كل مزج خطي للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_p$ هو عنصر من $vect(A)$ ومنه $F \subseteq vect(A)$. F هو فضاء شعاعي جزئي يحوي A وبما أن $vect(A)$ هو اصغر ف ش ج يحوي A فإن $vect(A) \subseteq F$ ومنه $F = verct(A)$.

أمثلة :

1) في $\mathbb{R}^2$: $vect((-1, 2)) = \{\alpha(-1, 2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
2) في مجموعة التوابع ذا ت المتغير الحقيقي التي تصب في $\mathbb{R}$

$$vect(e^x, \sin x) = \{\alpha e^x + \beta \sin x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

3) في فضاء كثيرات الحدود ذات المتغير الحقيقي :

$$vect(1, x , x^2, x^3) = \{a + bx +cx^2 +dx^3 : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

4) لدينا اصطلاحا : $vectg(\Phi) = \{0\}$.

تعريف :

نقول عن فضاء شعاعي E إنه ذو بعد منته إذا أمكن توليده بجملة عدد عناصرها منته.

أمثلة :

1) $\mathbb{R}^n$ ذو بعد منته.
2) فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة التي لا تزيد عن n هو فضاء دو بعد منته.

1 .3 . أساس ف ش

تعريف :

نقول عن جملة أشعة $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ من $\mathbb{K}$- فضاء شعاعي إنها مستقلة خطيا إذا كان :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in et \;\; x_1, \alpha_2 x_2 , \dots, \alpha_p x_{3=0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

إذا كانت جملة أشعة غير مستقلة خطيا نقول إنها مرتبطة خطيا.

مثال:

1) في $\mathbb{R}^2$ الشعاعان $(1, 0), (0, 1)$ مستقلان خطيا. بينما الشعاعان $(2 - 2), (-2, 1), (2, -2)$ *مرتبطان خطيا.*
2) في فضاء كثيرات الحدود ذات المتغير الحقيقي الجملة $\{1, x , x^2, x^3\}$ مستقلة خطيا *بينما الجملة* $\{1, x , x^2, 1 - x\}$ مرتبطة خطيا.

ملاحظات :

1) تكون جملة أشعة غير منتهية مستقلة خطيا إذا كانت كل جملة جزئية منتهية مستخرجة منها مستقلة خطيا.
2) إذا كانت جملة مستقلة خطية فإن كل جملة جزئية منها مستقلة خطيا.
3) إذا كانت جملة مرتبطة خطيا فإن كل جملة تحويها مرتبطة خطيا.
4) إذا كانت جملة مستقلة فإن الصفر لا ينتمي لهذه الجملة. وبصورة خاصة الجملة $\{x\}$ مستقلة إذا وفقط إذا كان x غير معدوم.

5) إذا كانت جملة مستقلة فلا يمكن لأحد عناصرها أن يكتب على شكل مزج خطي لبقية العناصر.
6) إذا كانت جملة منتهية مرتبطة فإن أحد عناصرها على الأقل يكتب على شكل مزج خطي لبقية العناصر.

قضية:

لتكن $\{x_1 , x_2, \ldots, x_p\}$ جملة أشعة في $\mathbb{K}$- ف ش و x مزج خطي للأشعة $x_1 , x_2, \ldots, x_p$. لدينا التكافؤ: $\{x_1 , x_2, \ldots, x_p\}$ جملة مستقلة $\Leftrightarrow$ x يكتب بصورة وحيدة بدلالة $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

برهان :

نفرض أن $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ مستقلة. وأن

$x = a_1x_1+ a_2x_2+ \ldots + a_px_p$ و $x = b_1x_1+ b_2x_2+ \ldots + b_p x_p$

عندئذ : $(a_1 - b_1)x_1+ (a_2 - b_2) x_2+\ldots +,(ap - b) x_p = 0$ ومنه :

$$a_1=b_1,\ a_2= b_2 ,\ \ldots,\ a_p=b_p$$

لنفرض الآن وحدانية الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_p$ التي تحقق : $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots +a_px_p$

لنفرض أن : $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_px_p = 0$ عندئذ :

$x= (a_1+c_1)x_1 + (a_2+c_2)x_2 + \ldots + (a_p+c_p)x_p$ ومن وحدانية $a_1, a_2, \ldots, a_p$ نجد

$c_1 =c_2=\ldots=c_p = 0$ ومنه الجملة مستقلة خطيا.

تعريف :

نقول إن جملة A أساس لـ $\mathbb{K}$- ف ش E إذا تحقق ما يلي : • A مولدة لـ E أي كل عنصر من E يكتب على شكل مزج خطي لعناصر من A . • A مستقلة خطيا.

أمثلة :

1) كل عنصر (x, y) من $\mathbb{R}^2$ يكتب على الشكل $(x, y) = x.(1, 0) + y.(0,1)$ ومنه الجملة $\{(1, 0), (0, 1)\}$ مولدة لـ $\mathbb{R}^2$، واضح أن هذه الجملة مستقلة فهي إذن أساس لـ $\mathbb{R}^2$.
بالمثل نجد أن $\{(1,0, \ldots, 0),\ldots , (0, 1, \ldots,0), (0, 0,\ldots,1)\}$ أساس لـ$\mathbb{R}^n$ يدعى الأساس القانوني له.

2) كل كثير حدود درجته أقل من n يكتب على الشكل $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ ومن الواضح أن $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ مستقلة فهي أساس لفضاء كثيرات الحدود التي درجتها لا تتعدى n ويدعى الأساس القانوني لهذا الفضاء.

خواص :

إذا كان $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ أساسا لـ ف ش فإن كل عنصر x من هذا الفضاء يكتب بصورة وحيدة على الشكل $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ وتسمى الاعداد $a_1, a_2, \ldots, a_3$ مركبات x في الأساس $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1) إذا كانت $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ أساسا لـ ف ش وكانت الجملة $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ مستقلة خطيا فهي أيضا أساس لهذا الفضاء الشعاعي.

قضية:

كل فضاء شعاعي يقبل أساسا.

1. 4. بعض خواص الفضاءات الشعاعية ذات البعد المنتهي

مبرهنة وتعريف :

ليكن E ف ش ذا بعد منته حيث $E \neq \{0\}$.
1) كل أسس E لها نفس عدد الأشعة. يسمى هذا العدد بعد الفضاء E ونرمز له $dim(E)$.
نكتب $dim(\{0\}) = 0$ إصطلاحا.
2) كل ف ش ج من E ذو بعد منته.
3) إذا كان F ف ش ج من E فإن : $dim(E) \leq dim(F)$.
4) إذا كان F ف ش ج من E و $dim(F) = dim(E)$ فإن $E = F$.

تطبيق :

رأينا أن الجملة $\{(1,0), (0, 1)\}$ أساس $\mathbb{R}^2$ ومنه $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

إذا كان F ف ش ج من $\mathbb{R}^2$ فإن F ذو بعد منته و $dim(F) \leq 2$ ومنه $dim(F) \in \{0, 1, 2\}$

إذا كان $dim(F) = 2$ فإن $F = \mathbb{R}^2$.

إذا كان $dim(F) = 1$ فإن F مولد بشعاع وحيد ويمثل هندسيا بمستقيم يشمل المبدأ.

إذا كان $dim(F) = 0$ فإن $F = \{(0, 0)\}$.

مبرهنة

ليكن E ف ش حيث $dim\ (E) = n \neq 0$.
1) إذا وجدت جملة مكونة من m شعاع من E مستقلة خطيا فإن $m \leq n$. بالإضافة لذلك يوجد أساس لـ E يحوي هذه الجملة.
2) كل جملة مشكلة من $(n+1)$ عنصرا هي جملة مرتبطة خطيا.
3) لا يمكن توليد E بـ $n - 1$ شعاعا.
4) كل جملة مستقلة خطية هي جزء من أساس لـ E.
5) كل جملة مولدة لـ E تحوي أساسا لـ E .
6) إذا كان $dim(F) = n$ وكانت (u) عائلة من E بها n عنصر، فإن القضايا التالية متكافئة (u) مستقلة (u) تولد E (u) أساس لـ E
7) لتكن (e) عائلة مولدة للفضاء E و (u) عائلة منتهية ومستقلة ولكن لا تولد E، يمكننا تكميل (u) بواسطة أشعة من (e) للحصول على أساس لـ E.

1. 5. الفضاءات الشعاعية الجزئية المتكاملة

تعريف :

ليكن F و G ف ش ج من $\mathbb{K}$- ف ش E. المجموعة $F + G = \{f + g \,/\, f \in F\, ,\ g \in G\}$ *تسمى* مجموع الفضاءين الجزئيين F و G .

مبرهنة

إذا كان F و G ف ش ج من $\mathbb{K}$- ف ش E فإن $F + G$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي من E المولد بـ $F \cup G$.

مبرهنة وتعريف :

إذا كان F و G ف ش ج من $\mathbb{K}$- ف ش E بحيث: $F + G = E$ فإن القضيتين التاليتين متكافئتان:
1) *كل عنصر x من E يكتب بصورة وحيدة على الشكل :* $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F$ و $x_2 \in G$.
2) $G \cap F = \{0\}$.

إذا تحقق أحد هذين الشرطين نقول إن E مجموع مباشرلـ G و F ونكتب : $E = F \oplus G$.
في هذه الحالة نقول إن F و G متكاملان.

مثال:

يمكننا أن نثبت بساطة أن : $F\oplus G = \mathbb{R}^2$ حيث: $F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ و $G = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

مبرهنة :

ليكن E $\mathbb{K}$- ف ش ذا بعد منته.

1) إذا كان: $E = F\oplus G$ فإن : $dim(E) = dim(F) + dim(G)$. بصفة عامة إذا كان A و B فضاءين شعاعيين جزئيين من E

$$dim(A+B) = dim(A) + dim(B) - dim\ (A\cap B)$$

2) كل ف ش ج من E يقبل على الأقل مكملا.

3) إذا كان F_1 و F_2 مكملين لنفس الفضاء الشعاعي الجزئي من E فإن لهما نفس البعد.