Chapitre II : Vibrations forcées des systèmes à 1 degré de liberté

1. Définition d'un Système forcé (Oscillateurs forcé)

Un système oscillant en présence de toute force d'excitation, est appelé oscillateur forcé. Le nombre de grandeurs indépendantes intervenant dans le mouvement est appelé degré de liberté (ddl).

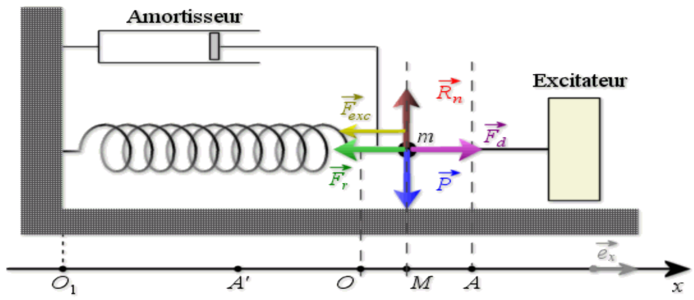


Figure 1. Le schéma du système mécanique étudié

2. Force d'excitation

Pour éviter les frottements responsables des pertes d'énergie et du ralentissement aux systèmes en mouvement, il faut appliquer une force externe qu'ont appelé Force d'excitation.

Un système physique de type « oscillateur harmonique amorti » est soumis à une excitation permanente, décrite par la fonction ***F(t)*** et produite par un dispositif extérieur appelé *excitateur*.

L'excitateur fournit à tout instant de l'énergie au système.

3. Equation de Lagrange des systèmes forcés

A la présence d'une force d'excitation ***F(t)***, l'équation de Lagrange s'écrit : $L=E_C-E_P$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}+f(t) \qquad (1)$$

4. Equation du mouvement des systèmes forcés

Dans ce cas la grandeur ***q(t)*** décrivant l'évolution du système au cours du temps satisfait à l'équation différentielle avec second membre :

$$\ddot{q}(t)+2\lambda\dot{q}(t)+w_0^2 q(t)=h(t) \qquad (2)$$

L'équation ci-dessus est une *équation différentielle du second ordre*, à coefficients constants, avec un second membre noté ***h(t)*** .

Le second membre ***h(t)*** diffère de l'excitation ***F(t)***.

h(t) s'exprime simplement en fonction de *F(t)* (multiplication par une constante, déphasage),

h(t) = F(t)/a

(a est une constante), son expression dépend :

- du **type de système excité** : électrique, mécanique, acoustique, moléculaire, atomique...
- du **type de l'excitation** : électrique, mécanique (en force, en déplacement), excitation par de la lumière...
- de la **forme de l'excitation** : sinusoïdale, en échelon, en impulsions rectangulaires, en dents de scie, en impulsions de Dirac...

Alors l'équation (2) revient :

$$\ddot{q}(t) + 2\lambda\dot{q}(t) + w_0^2 q(t) = F(t)/a \qquad (3)$$

Les principales excitations h(t) sont représentées dans la figure ci-dessous :

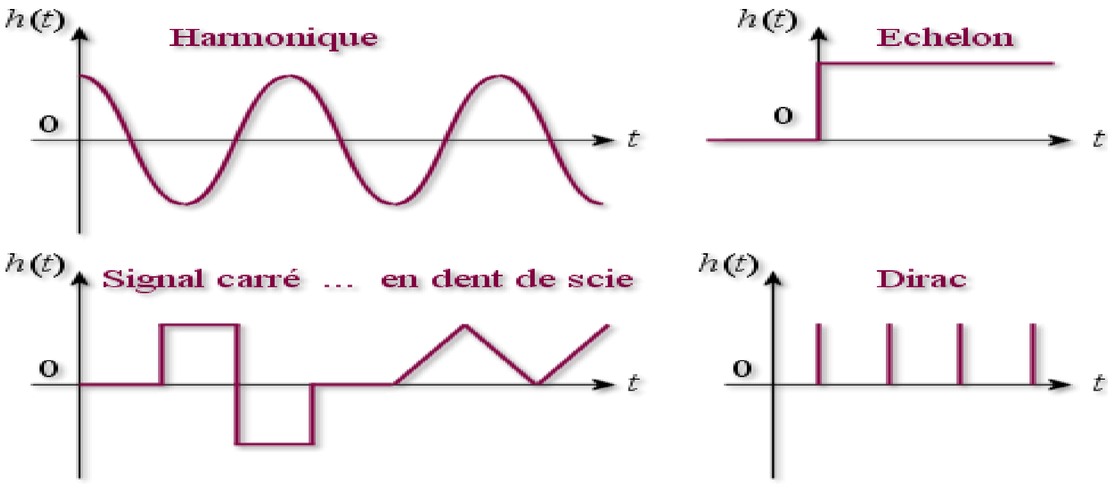


Figure 2 : types des fonctions d'excitations

5. Résolution de l'équation du mouvement

La résolution de l'équation différentielle ci-dessus pour une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ est égale à la somme de la solution homogène (transitoire), notée $q_T(t)$, et d'une solution particulière, notée $q_p(t)$. Soit :

$$q(t) = q_T(t) + q_p(t) \qquad (4)$$

La solution (transitoire) de l'équation homogène sans second membre (sans F) dépend du signe de $\Delta' = \lambda^2 + w_0^2$. Elle est dite transitoire car elle s'éteint (tend vers zéro) au bout d'une certaine durée (a fonction de l'amortissement).

La solution permanente de l'équation non homogène avec second membre (avec F) est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement. Et sera à la pulsation d'entretient Ω, où Ω est la pulsation de la force d'excitation F.

On peut donc proposer une solution permanant $X_p(t)$ de la forme sinusoïdale suivante :

$$q_p(t) = A(\Omega)\, cos(\Omega t + \varphi) \qquad (5)$$

$A(\Omega)$: représente l'amplitude des oscillations en régime permanent.

φ : représente le déphasage de ces oscillations par rapport à l'excitation.

Dès que l'amplitude correspondant au régime transitoire devient négligeable on a :

$$q(t) \approx q_p(t) = A(\Omega)\, cos(\Omega t + \varphi) \qquad (6)$$

On détermine A et φ par la représentation complexe comme suite :

$$F_0 \cos \Omega t \;\rightarrow\; F_0 e^{j\Omega t} \qquad (7)$$

$$q(t) = A(\Omega)\, cos(\Omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{q}(t) = Ae^{j(\Omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{j\Omega t} \qquad (8)$$

Sous la forme de nombre complexe on a :

$q(t) = \underline{A} e^{j\Omega t}$ (a)

$\dot{q}(t) = \underline{A}\, j\, \Omega\, e^{j\Omega t}$ (b)

$\ddot{q}(t) = -\underline{A}\; \Omega^2\; e^{j\Omega t}$ (c)

On remplacer les formes a,b et c dans l'équation (3) :

$$\ddot{q}(t) + 2\lambda \dot{q}(t) + w_0^2 q(t) = \left(\frac{F_0}{a}\right) \cos \Omega t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\underline{A}\; \Omega^2\; e^{j\Omega t} + 2\lambda\, \underline{A}\, j\, \Omega\, e^{j\Omega t} + w_0^2\, \underline{A} e^{j\Omega t} = \left(\frac{F_0}{a}\right) e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad (-\Omega^2 + 2\lambda\, j\Omega + w_0^2\,)\, \underline{A}\, e^{j\Omega t} = \left(\frac{F_0}{a}\right) e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{a}}{((w_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda\, j\, \Omega)} \qquad (9)$$

Alors l'amplitude du mouvement donné par :

$$A = |\underline{A}| = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \qquad (10)$$

La phase ϕ du mouvement est donnée par :

$$\tan \emptyset = \frac{I_m(\underline{A})}{R_e(\underline{A})} = -\frac{2\lambda\Omega}{(w_0^2 - \Omega^2)} \qquad (11)$$

$\boldsymbol{I_m}$: la partie Imaginaire. $\boldsymbol{R_e}$: la partie Réelle .

Donc, la solution du mouvement en régime permanant est :

$$q(t) = A\,cos(\Omega t + \varphi)$$

avec A : $donné par\ l'équation\ (10)$ $.et\ \emptyset : donné\ par\ l'éqution\ (11)$

6. La Résonnance :

La pulsation d'excitation Ω pour là qu'elle l'amplitude A atteint sont maximum est appelé **pulsation de résonance Ω_R** .

A est maximal lorsque

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Omega}\left(\frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\right) = 0 \qquad (12)$$

Après la dérivation de l'équation (12) on trouve la pulsation de résonnance :

$$\Omega_R = \sqrt{w_0^2 - 2\lambda^2} \qquad (13)$$

A cette pulsation, l'amplitude est maximal, noté par A_{max} :

$$A_{max} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{4\,\lambda^2\,w_0^2 - 4\lambda^4}} \qquad (14)$$

7. Facteur de qualité Q :

Le facteur de qualité est donné par :

$$Q = \frac{w_0}{2\lambda} \qquad (15)$$

Donc $\Omega = \sqrt{w_0^2 - 2\lambda^2} \equiv \Omega_R \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_R = w_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (16)

D'après l'équation (14) , on peut écrire A_{max} en fonction de Q :

$$A_{max} = \frac{F_0}{a\,w_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \qquad (17)$$

Pour qu'il y a de résonnance il faut que :

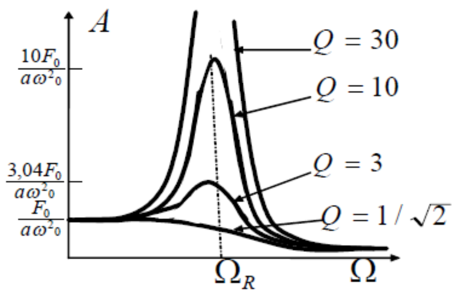
$$w_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (18)$$

Le facteur de qualité doit être supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$ l'amortissement être faible.

D'après l'équation (11) :

$$\tan\phi = -\infty \qquad \left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) \quad lorsque \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{w_0}$$

$$A = \frac{\dfrac{F_0}{a}}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$



$$\phi = \tan^{-1}\left[-\frac{2\lambda\Omega}{(w_0^2 - \Omega^2)}\right]$$