Introduction

Dans ce chapitre, la problématique du comportement dynamique des solides et structures est présentée. Á travers l'exemple de l'*oscillateur élémentaire*, on peut illustrer les grands types de réponses (*sur-amorti*, *critique*, *sous-amorti*) dynamiques d'un système soumis à des excitations variées (*impulsionnelle*, *régime forcé*).

1.1 Objectif et champ d'application

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, l'étude dynamique d'une structure a pour but essentiel de caractériser les déplacements, les déformations et les contraintes qui règnent au sein de cette structure et qui résultent d'un chargement (thermo-)mécanique quelconque.

En effet, dans de nombreux secteurs industriels, il est primordial de déterminer, pour le dimensionnement et la conception, les niveaux d'efforts que les structures peuvent soutenir, mais également les propriétés *amortissantes* qu'elles peuvent développer. C'est le cas dans les secteurs du transport :

- aéronautique ⇝ confort acoustique, vibrations aérodynamiques, vibrations propulseurs, ...
- ferroviaire ⇝ confort acoustique, chocs de roulement, ...
- automobile ⇝ confort habitacle, fréquences propres boîtes de vitesse, crash (=dynamique rapide), ...

et dans le secteur du génie civil (séismes, explosions, propagations dynamiques d'ondes, ...)

On distingue deux grands types d'approche des problèmes de dynamique, selon que le chargement est connu ou non :

- chargement connu ⇝ approche *déterministe* : explosions, efforts connus impulsionnels ou périodiques, ...
- chargement aléatoire ⇝ approche *non déterministe - statistique* : choc d'un oiseau en vol pour un avion, impacts de roulement pour les trains, collision de véhicules, séismes, ...

Dans le cadre de ce cours, nous nous restreindrons à la dynamique déterministe. De façon générale, on utilisera une approche *en déplacements*, c'est-à-dire où les déplacements sont les inconnues du problème, par exemple les *calculs de modes propres*. Les déformations et, via la loi de comportement du milieu les contraintes, sont déduites de ces déplacements par simples dérivations en espace.

1.2 Sources d'excitation, réponse des structures

1.2.1 Sources d'excitation

On distingue deux grandes classes de chargements, ils sont *périodiques* ou bien *non périodiques*. Le schéma ci-dessous (figure 1.1.1) représente les divers cas de chargements possibles.

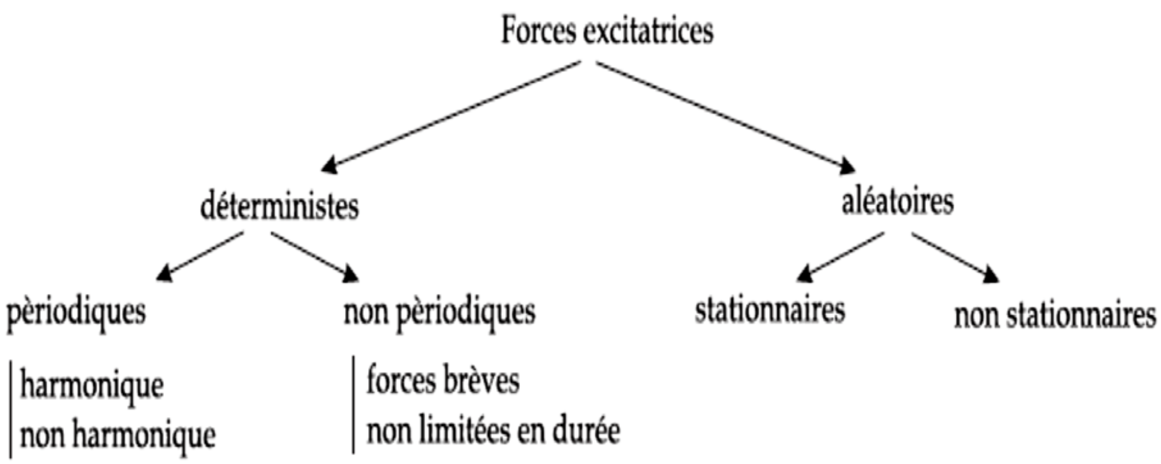


FIGURE 1.1.1 – Différents types de chargements possibles

Si un chargement périodique, agissant pendant un temps suffisamment long (par opposition à *impulsionnel*), ne contient qu'une fréquence (sinusoïde), il est dit *harmonique*. On verra que tout chargement périodique se décompose en la somme de chargements harmoniques.

Pour les chargement non-périodiques, on peut distinguer 2 types : très brefs - de type impulsionnel- et long. La notion de durée étant relative, elle est à comparer aux

périodes caractéristiques (*propres*) de la structure.

1.2.2 Réponse des structures

Dans leur majorité, les structures répondent de manière linéaire à une sollicitation extérieure (figure 1.1.2) : $\lambda \times$ chargement $= \lambda \times$ réponse. On est alors dans le cadre dit des *petites perturbations* (HPP), ce qui permet, par exemple, de linéariser les équations caractérisant l'équilibre.

De plus, au niveau des matériaux constitutifs, on se restreindra à des comportements linéaires, de type loi de Hooke, les contraintes s'exprimant linéairement en fonction des déformations, et inversement. Il faut rappeler que cette linéarité peu s'accommoder de dissipation d'énergie, ce qui donne lieu notamment aux phénomènes d'amortissement.

Notre cadre d'étude se limitera donc aux mouvements vibratoires de faibles amplitudes. Ceci entre naturellement dans le cadre HPP, et les matériaux constitutifs étant linéaires élastiques, la réponse intrinsèque (propre) de la structure restera indépendante du chargement qui s'exerce sur elle.

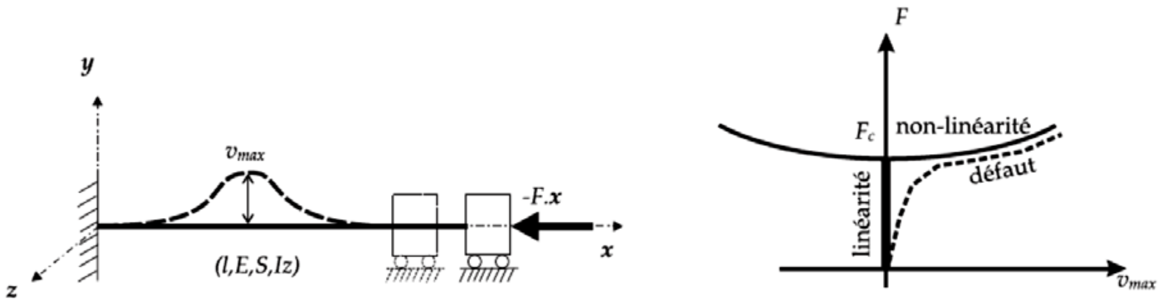


FIGURE 1.1.2 – Exemple de réponse non-linéaire géométrique : flambage

Chapitre II : Vibrations forcées des systèmes à 1 degré de liberté

Systèmes linéaires libres à un degré de liberté

1. Oscillateurs libres

Un système oscillant en absence de toute force d'excitation, est appelé oscillateur libre. Le nombre de grandeurs indépendantes intervenant dans le mouvement est appelé degré de liberté.

Les objectifs à atteindre dans ce chapitre sont:

- Savoir décrire le modèle de l'oscillateur harmonique et savoir l'appliquer à l'étude des systèmes physiques oscillants,
- Savoir étudier les réponses de ces systèmes, en tenant compte des paramètres caractéristiques et des conditions initiales,
- Savoir étudier l'énergie de tels systèmes.

Exemples d'Oscillateurs :

Ils peuvent être de types différents : mécanique, électrique, acoustique,

- ✓ la masse accrochée à un ressort,
- ✓ le pendule,
- ✓ le circuit électrique RLC,
- ✓ un enfant sur une balançoire,
- ✓ le balancier d'une horloge,
- ✓ sismographe,
- ✓ haut-parleur,
- ✓ microphone,
- ✓ instruments de musique à vent ou à cordes,
- ✓ amortisseurs d'un véhicule,
- ✓ structure d'une molécule diatomique

2. Oscillateur harmonique

2.1. Vibrations

Les vibrations sont des petites variations provoquées par une excitation d'une grandeur q autour d'une valeur moyenne q_e .

La fonction $q(t)$ décrit la réponse du système à l'excitation appliquée. Quand l'évolution de l'oscillateur peut-être décrite par n variables indépendantes, l'oscillateur possède n degrés de liberté.

Le système physique est appelé oscillateur lorsque $q(t)$ varie périodiquement. Un oscillateur est linéaire si son mouvement est décrit par une équation différentielle linéaire. L'oscillateur élémentaire linéaire possède un seul degré de liberté. Un oscillateur est libre s'il oscille sans interventions extérieures pendant son retour à l'équilibre. Un oscillateur est forcé si une action extérieure lui communique de l'énergie.

2.2. Oscillateur harmonique

En mécanique, on appelle oscillateur harmonique un oscillateur qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x ou θ :

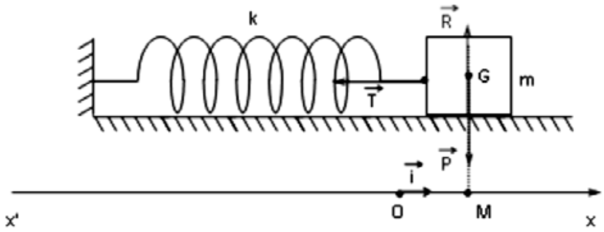
$$F = -Cx \quad \text{(C est une constante positive)}$$

- La forme des oscillations est sinusoïdale,
- L'excitation appliquée au système est très brève, elle disparaît dès que le système oscille et les oscillations sont dites libres,
- L'énergie totale du système se conserve au cours du temps.

2.3. Exemples

2.3.1. Système masse-ressort horizontal

Un solide de masse m, guidé rectilignement sur un support plan, est attaché à un ressort horizontal de raideur k. Ce ressort, de masse supposée nulle et à spires non jointives, peut travailler en extension comme en compression. Le ressort est attaché à un obstacle fixe. La position d'équilibre du centre d'inertie du solide est notée O, et une de ses positions quelconques M.



La force de rappel exercée par le ressort sur le solide fixé à son extrémité est définie par :

$$\vec{F}_{\text{ressort}\rightarrow\text{solide}} = -k.x.\vec{i}$$

où x est l'allongement du ressort, c'est-à-dire la différence entre la longueur du ressort (étiré ou comprimé) ℓ et sa longueur à vide ℓ_0 : ($x = \ell - \ell_0$) et $\vec{i}$ le vecteur unitaire parallèle à l'axe du ressort.

Appliquons la deuxième loi de Newton puis projetons-la sur la base de projection choisie:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

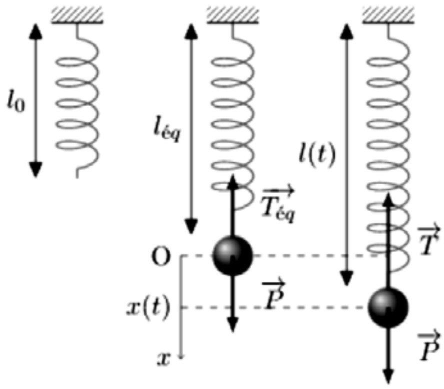
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{projexion sur ox} \Rightarrow \ -kx = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

2.3.2. *Système solide ressort vertical*

Le système est toujours le point M de masse m, le référentiel toujours terrestre et galiléen et le bilan des forces est identique. On choisira aussi une base cartésienne à une dimension, un axe Ox, vertical descendant.



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse et projeté sur l'axe Ox:

$$m\ddot{x} = mg - k(l - l_0)$$

$$m\ddot{x} = mg - k(x + l_{eq} - l_0)$$

$$m\ddot{x} = mg - kx - k(l_{eq} - l_0)$$

Or à l'équilibre :

$$mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On retrouve donc la même équation que celle obtenue pour le ressort horizontal.

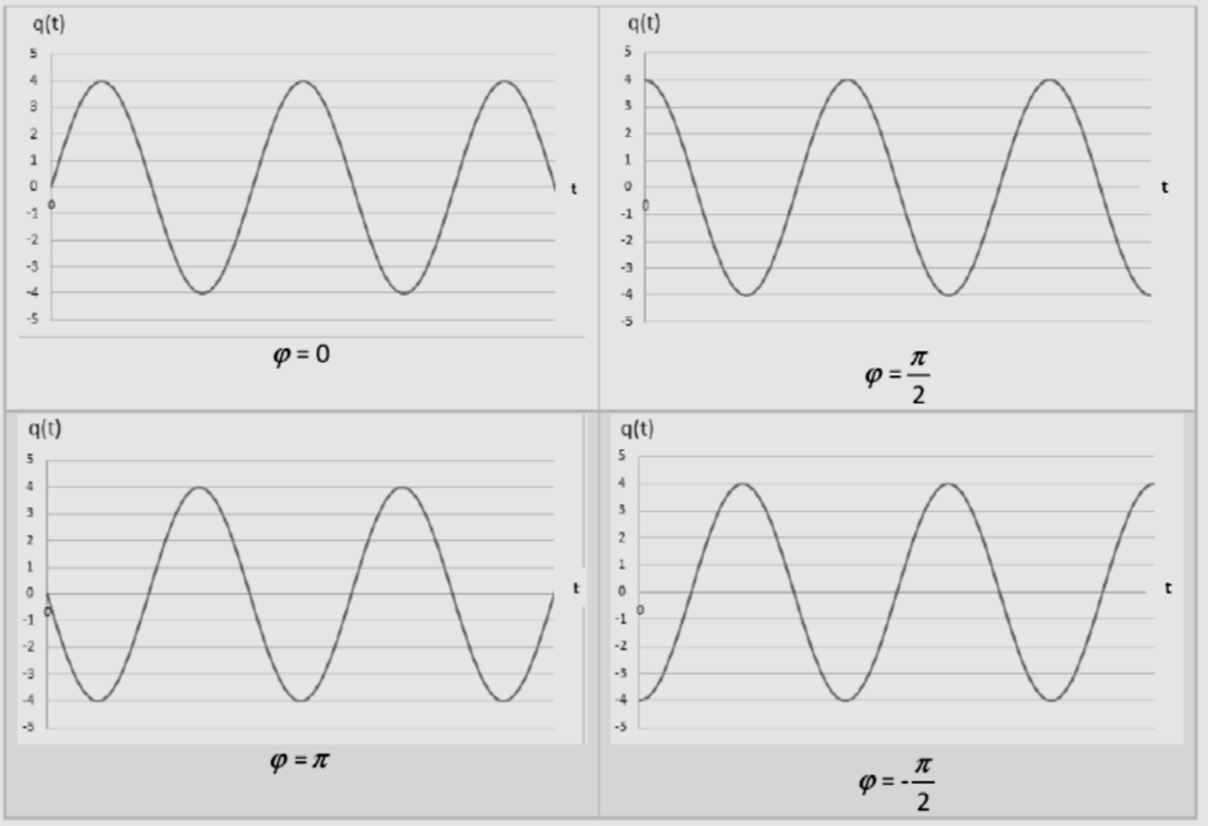
L'oscillateur harmonique obéit à une équation différentielle linéaire de la forme :

$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ (1)	$\begin{cases} \text{en mécanique} : q = x, y, z, \theta, \varphi, \ldots \\ \text{en électricité} : q = i, u, q, \ldots \end{cases}$

ω_0 est appelée pulsation propre car elle ne dépend que des grandeurs propres à l'oscillateur. L'équation horaire $q(t)$ solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est de la forme :

$$q(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

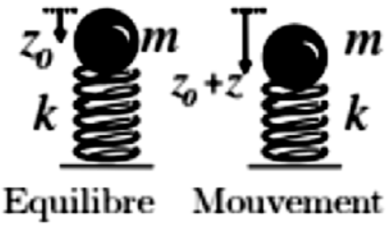
L'amplitude A et la phase φ dépendent des conditions initiales. Quatre situations se présentent généralement.



3. Application

Soit le système ci-contre :

- Trouvez à l'aide du principe fondamental de la dynamique l'équation du mouvement du système.
- Calculer sa pulsation propre pour $m = 1$ kg et $k = 3$ N.m^{-1}
- Trouvez l'amplitude A et la phase φ sachant qu'initialement lamasse est poussée $2\ cm$ vers le bas puis lancée vers le haut avec une vitesse de $2\ cm.s^{-1}$.



Solution :

La seconde loi de Newton à l'équilibre s'écrit :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$mg - kz_0 = 0$$

En mouvement :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$mg - k(z + z_0) = m\ddot{z}$$

La condition d'équilibre donne :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant dont la solution est de type sinusoïdale qui se met sous la forme : $z(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

La pulsation propre est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3}\ \text{rad.s}^{-1}$

L'équation horaire est : $z(t) = A\sin(\sqrt{3}\ t + \varphi)$. Pour trouver A et φ, on utilise les conditions initiales.

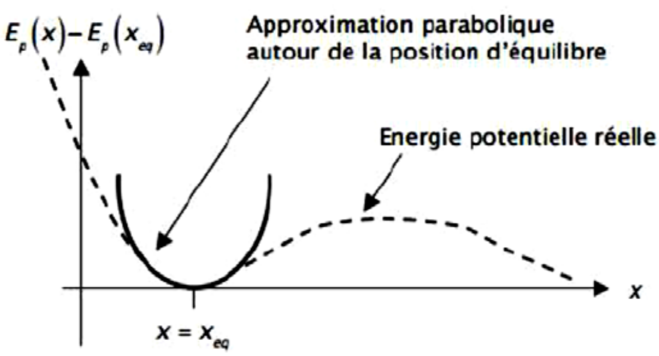
$$\begin{cases} z(0) = \text{A}\sin(\varphi) = \ 2\ \text{cm} \\ \dot{z}(0) = \text{A}\sqrt{3}\cos(\varphi) = \text{-}2\ cm.s^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\varphi) = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi}{3} \\ A = \dfrac{2}{\sin(\varphi)} = 2,3\ \text{cm} \end{cases}$$

4. Energie d'un oscillateur harmonique

L'énergie totale ou énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et de ses énergies potentielles notées respectivement E_c et E_p.

L'Oscillateur Harmonique à un degré de liberté x évolue dans un puits parabolique d'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte$.



Ceci revient à dire que l'Oscillateur Harmonique est soumis à une force conservative $F(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$.

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (L'origine des énergies potentielles est choisie en x = 0)

Comme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

On en déduit :

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec} \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Finalement :

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2 \text{ ou } E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{cte}$$

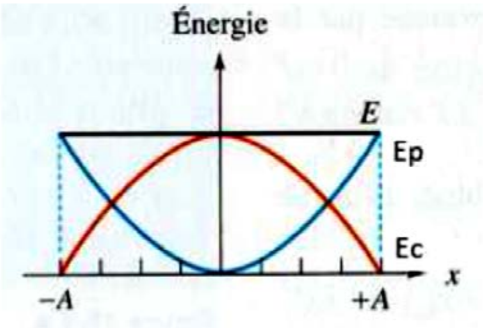
Cette propriété est générale : quel que soit le type de système, l'énergie totale d'un système se comportant comme un oscillateur harmonique se conserve au cours des oscillations.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Energie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v.
$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2$	Energie cinétique de rotation d'un corps de moment cinétique J_Δ autour d'un axe Δ et de vitesse de rotation $\dot{\theta}$.

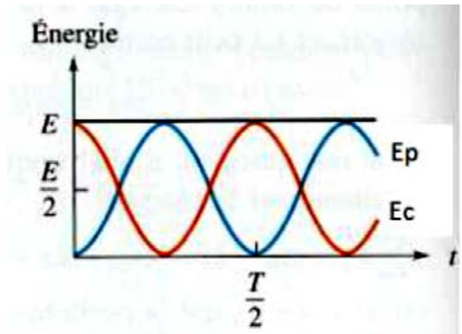
$E_{pp} = mgh$	Energie potentielle de pesanteur lors d'une ascension d'une hauteur h par rapport à la position d'équilibre.
$E_{pp} = -mgh$	Energie potentielle de pesanteur lors d'une descente d'une hauteur h par rapport à la position d'équilibre.
$E_{pe} = \frac{1}{2}k\,d^2$	Energie potentielle élastique pour un ressort de raideur k lors d'une déformation d.
$E_{pt} = \frac{1}{2}k\,d^2$	Energie potentielle de torsion pour un pendule de constante de torsion C lors d'une déformation θ.

L'énergie totale est conservée durant le mouvement pour un oscillateur harmonique $\frac{dE}{dt} = 0$.

Cette équation de conservation donne l'équation du mouvement des systèmes conservés lors d'une étude énergétique.

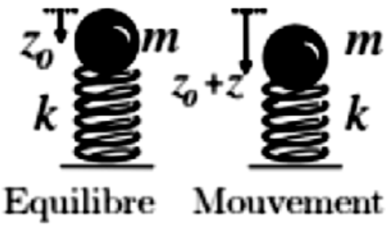


Les variations de l'énergie potentielle (courbe bleu), de l'énergie cinétique (courbe rouge) et de l'énergie totale (courbe noire) en fonction de la position



Les variations de l'énergie potentielle (courbe bleu), de l'énergie cinétique (courbe rouge) et de l'énergie totale (courbe noire) en fonction du temps

Exemple : Si on considère le système suivant :



$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{z}^2$$

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

$$E_p = -mg\left(z + z_0\right) + \frac{1}{2} k \left(z + z_0\right)^2$$

En développant et en tenant compte de la condition d'équilibre $mg - kz_0 = 0$, on trouve :

$$E_p = \frac{1}{2} k\, z^2 + cte$$

Soit donc : $E = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} kz^2 + cte$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Leftrightarrow m\dot{z}\ddot{z} + kz\dot{z} = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

5. Condition d'équilibre

La condition d'équilibre est $F = 0$. Si l'équilibre est en $x = x_0$, on écrit : $F\big|_{x=x_0} = 0$.

Pour une force dérivant d'un potentiel $\left(F = -\frac{dE_p}{dx} \right)$, la condition d'équilibre devient :

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$$

L'équilibre d'un système est stable si, une fois écarté de sa position d'équilibre, il y retourne.

Le système retourne à son équilibre si F est une force de rappel. Puisque $F = -C\,x$, on aura une force de rappel si $C > 0$.

Comme $C = -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}$, la condition d'équilibre stable s'écrit :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Cette condition est aussi une **condition d'oscillation**.

L'équilibre d'un système est instable si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement, c'est-à-dire si $C < 0$.

La condition d'équilibre instable s'écrit donc : $\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} < 0$.