III Chapitre 3. Modèle Géométrique Direct d'un robot

III.1 Introduction à la modélisation

La conception et la commande des robots manipulateurs nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que les :

- Modèles de transformation entre :
  - ✓ *L'espace opérationnel* $\boldsymbol{X}$ (dans lequel on définit la situation de l'organe terminal)
  - ✓ *L'espace articulaire* $\boldsymbol{q}$ (dans lequel on définit la configuration du robot)

$$X \longleftrightarrow q$$

- Modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples et les forces exercés par les actionneurs et, les positions, vitesses et accélérations articulaires :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, F)$$

Parmi les modèles de transformation, on distingue les modèles géométriques direct **MGD** et inverse **MGI** qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme articulaire et inversement.

Il existe des méthodes et notations utilisées pour la modélisation des robots. La plus répandue est celle de **Denavit-Hartenberg**. Elle est bien adaptée pour des structures ouvertes simples, mais présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots à structures fermées ou arborescentes. Dans les années 80, ***Wisama Khalil*** propose une modification de cette méthode: méthode de **Denavit-Hartenberg** modifiée (dite méthode de Khalil). Cette méthode permet la description homogène en un nombre minimum de paramètres pour la représentation des différentes structures de robots généralement rencontrés.

III.2 Paramétrage de Denavit-Hartenberg

Les paramètres de **Denavit-Hartenberg** permettent de disposer d'un paramétrage des liaisons tel que les matrices de passage aient toutes la même forme littérale, ce qui facilite les calculs.

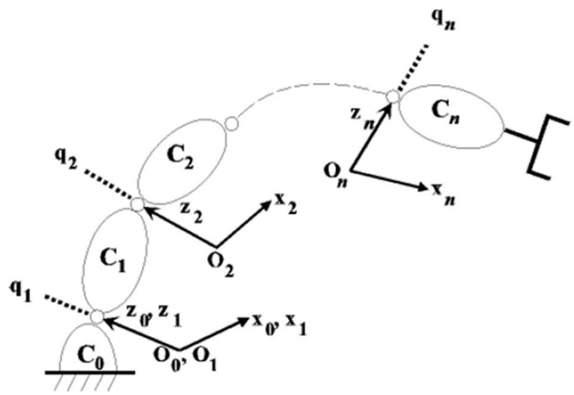
La méthode qui suit s'applique lorsque le robot correspond à une chaîne simple ouverte et que ses articulations sont rotoïdes, ou prismatiques (ce qui est le cas en général). Les corps constituant le robot sont supposés *parfaitement rigides* et connectés par des articulations idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité).

III.2.1 Notations :

La méthode générale est basée sur les règles et conventions suivantes :

- le corps j est noté $\boldsymbol{C_j}$, Le corps $\boldsymbol{C_0}$ désigne le socle (la base) du robot
- la variable de l'articulation j qui lie le corps C_j au corps C_{j-1} est notée $\boldsymbol{q_j}$
- les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales.
- le repère R_j est lié au corps C_j
- l'axe du z_j de repère R_j, est porté par l'axe articulaire j

III.2.2 Détermination des paramètres de Denavit-Hartenberg modifié



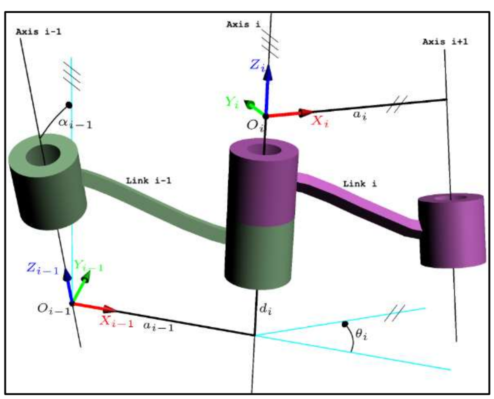
❖ ***Détermination du repère R_j (lié au corps C_j) :***

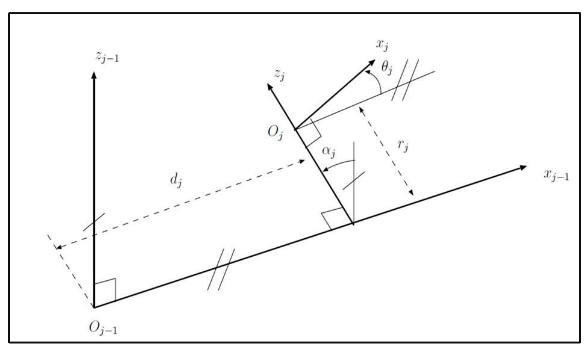
- L'axe $\overrightarrow{o_j z_j}$ est porté par l'axe de rotation, ou de translation, de l'articulation j.
- L'axe $\overrightarrow{o_j x_j}$ est porté par la perpendiculaire commune aux axes $\overrightarrow{o_j z_j}$ et $\overrightarrow{o_{j+1} z_{j+1}}$. Si les axes $\overrightarrow{o_j z_j}$ et $\overrightarrow{o_{j+1} z_{j+1}}$ sont parallèles, le choix de $\overrightarrow{o_j x_j}$ n'est pas unique, il est alors dicté par des considérations de symétrie ou de simplicité.

❖ ***Passage du repère $R_{j\text{-}1}$ au repère R_j***

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j , s'exprime en fonction de 4 paramètres suivants

– α_j est l'angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1}
– d_j est la distance entre les axes z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1}
– θ_j est l'angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j
– r_j est la distance entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j





La variable articulaire q_j (associée à la jeme articulation) est soit :
– θ_j si l'articulation est de type rotoïde ($\sigma_j = 0$)
– r_j si l'articulation est de type prismatique ($\sigma_j = 1$)

$$q_j = (1-\sigma_j)\,\theta_j + \sigma_j\, r_j$$

avec $\sigma_j = 0$ si l'articulation *j* est rotoïde et $\sigma_j = 1$ si elle est prismatique.

Autrement dit, si l'articulation est une *rotation* alors $\begin{cases} q_j = \theta_j \text{ est variable} \\ \alpha_j, d_j, r_j \text{ sont constants} \end{cases}$.

Si l'articulation est une *translation* alors $\begin{cases} q_j = r_j \text{ est variable} \\ \alpha_j, d_j, \theta_j \text{ sont constants} \end{cases}$.

Bien souvent, la rotation d'angle α_j est multiple de $\frac{\pi}{2}$.

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j se fait à travers 4 étapes :

- Une rotation d'angle α_j autour de l'axe $\overrightarrow{x_{j-1}}$,
- Une translation de distance d_j mesurée le long de l'axe $\overrightarrow{x_{j-1}}$,
- Une rotation d'angle θ_j autour de l'axe $\overrightarrow{z_j}$,
- Une translation de distance r_j mesurée le long de l'axe $\overrightarrow{z_j}$.

Il en résulte la matrice de transformation homogène $T_{j-1,\,j}$ suivante :

$$
\begin{aligned}
T_{j-1,\,j} &= Rot(x_{j-1},\alpha_j)\times Trans(x_{j-1},d_j)\times Rot(z_j,\theta_j)\times Trans(z_j,r_j) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_j) & -\sin(\alpha_j) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & d_j \\ \cos(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \cos(\alpha_j)\cos(\theta_j) & -\sin(\alpha_j) & -r_j\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \sin(\alpha_j)\cos(\theta_j) & \cos(\alpha_j) & r_j\cos(\alpha_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$