

## **Chapitre1. Matériaux magnétiques**

### **1. Classification des matériaux magnétiques**

#### **1.1. Matériaux diamagnétiques**

Le diamagnétisme est un comportement des matériaux qui les conduit, lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique, à créer une très faible aimantation opposée au champ extérieur, et donc à générer un champ magnétique opposé au champ extérieur. Lorsque le champ n'est plus appliqué, l'aimantation disparaît. Le diamagnétisme est un phénomène qui apparaît dans toute la matière atomique, mais il est masqué par les effets du paramagnétisme ou du ferromagnétisme lorsque ceux-ci coexistent avec lui dans le matériau.

#### **1.2. Matériaux paramagnétiques**

Le paramagnétisme est le comportement d'un milieu matériel qui ne possède pas d'aimantation spontanée mais qui, sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, acquiert une aimantation dirigée dans le même sens que ce champ d'excitation. Un matériau paramagnétique possède donc une susceptibilité magnétique de valeur positive, en général assez faible. Cette aimantation disparaît lorsque le champ d'excitation est coupé, il n'y a donc pas de phénomène d'hystérésis. Le paramagnétisme ne désigne pas une propriété intrinsèque d'un matériau mais un comportement en réponse à un champ magnétique, comportement qui peut changer selon les conditions considérées. Ainsi, un matériau ferromagnétique devient paramagnétique quand sa température dépasse sa température de Curie.

#### **1.3. Matériaux ferromagnétiques**

Le ferromagnétisme désigne la capacité de certains corps de s'aimanter sous l'effet d'un champ magnétique extérieur et de garder une partie de cette aimantation<sup>1</sup>. Ils se distinguent des paramagnétiques qui ne conservent pas leur aimantation à champ nul. Il existe deux sous-catégories, à savoir les ferromagnétiques durs (que l'on appelle aimants permanents) et les ferromagnétiques doux. Ces matériaux se rencontrent dans l'industrie, comme dans la vie quotidienne.

#### **1.4. Matériaux ferrimagnétiques et antiferromagnétiques**

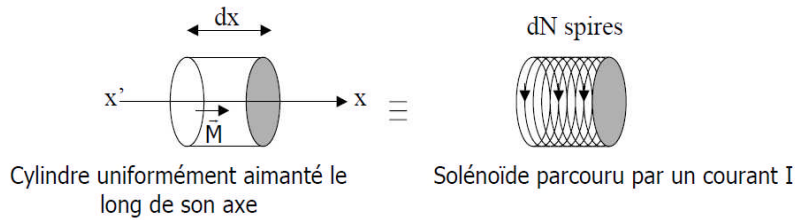
Le ferrimagnétisme est le magnétisme d'une classe d'oxydes connus sous le nom de ferrites. Dans leur structure on peut distinguer deux réseaux cristallins A et B, possédant les moments magnétiques antiparallèles et le plus souvent différents, provoquant une aimantation spontanée qui diminue par l'accroissement de la température. Au-dessus de la température Curie ces matériaux deviennent paramagnétiques. Les antiferromagnétiques ont la même

structure que les matériaux ferrimagnétiques mais les moments sont égaux en module. Lorsque la température augmente, l'alignement des moments est perturbé par l'agitation thermique et la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  croît jusqu'à une température appelée température de Néel. Au-dessus de la température Néel, ces matériaux deviennent paramagnétiques.

## 2. Caractéristique de l'aimantation

### 2.1 Induction magnétique B

Considérons un volume élémentaire  $dV$  de matière aimantée par un champ excitateur  $\vec{B}_{ext}$ . On peut définir  $dV$  par le produit  $dx \cdot dS$  où  $dx$  est la longueur du cylindre et  $dS$  la surface de sa section droite de telle sorte que  $dx \gg dS$ . Il peut être considéré comme un solénoïde de longueur  $dx$  ayant  $dN$  spires parcourues par le courant  $I$ .



L'induction magnétique créée par le solénoïde d'ampériens locaux s'écrit à l'intérieur de son volume:

$$\vec{B}_l = \mu_0 \frac{dN}{dx} I \vec{u}_x$$

Par ailleurs le moment magnétique de ce solénoïde élémentaire s'écrit :  $d\vec{m} = dN I dS \vec{u}_x$

Le milieu présente donc une aimantation :  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} = \frac{dN I dS}{dS dx} \vec{u}_x = \frac{dN}{dx} I \vec{u}_x$

On obtient donc :  $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{M}$

Cette induction est la réponse du milieu à l'excitation et est colinéaire et proportionnelle à l'aimantation qu'a induit  $\vec{B}_{ext}$

L'induction magnétique totale est la superposition des deux inductions :  $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_l$

Contrairement à l'induction, le champ magnétique continue à vérifier dans la matière le théorème d'Ampère au sens des courants libres, c'est-à-dire qu'il ignore les courants d'aimantation, =>

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_{ext}}{\mu_0}$$

L'induction magnétique totale s'écrit donc :  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$  est la perméabilité de la substance (absolue)

La polarisation magnétique est définie par :

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M}$$

- B : champ magnétique induit (Tesla; 1 Gauss = 1.10<sup>-4</sup>T)
- μ: perméabilité magnétique du matériau en Henry/mètre
- H : excitation magnétique H, A.m<sup>2</sup>

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} \vec{H} - \vec{M} = \vec{H}$$

Dans un but de simplification on utilise l'expression de la susceptibilité magnétique :

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} \vec{H} - \chi \vec{H} = \vec{H}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} - \chi = 1 \rightarrow \chi = \mu_r - 1$$

## 2.2. Cycles d'hystérésis

Pour un matériau magnétique on trace B=f(H), on obtient la courbe ci-dessous. On distingue deux zones sur la courbe :

- Une zone linéaire : B et H sont proportionnels : μ est constant
- Une zone de saturation : B et H ne sont pas proportionnels. Quand H augmente, B tend vers une valeur limite appelée Bsat.

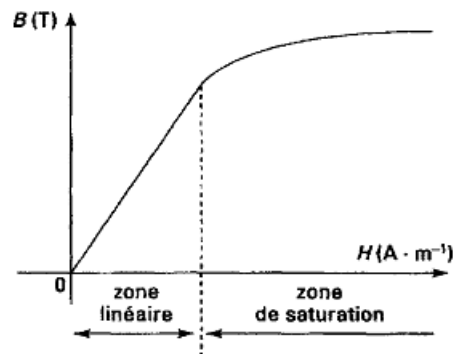


Fig.1. Courbe de première aimantation d'un matériau magnétique.

À partir de l'état de saturation magnétique obtenu par une première aimantation (point ① sur la figure 2), nous voulons maintenant démagnétiser le matériau en diminuant l'excitation :

- Nous constatons d'abord que la désaimantation se fait avec un retard (c'est la signification du mot hystérésis en grec) par rapport à l'aimantation : lorsque l'excitation est devenue nulle (point ②), le champ magnétique ne s'est pas annulé, il subsiste un champ appelé champ rémanent d'intensité  $B_r$  :

champ rémanent d'intensité  $B_r$  :

Champ magnétique rémanent :

$$H = 0 ; B = B_r$$

- Pour démagnétiser totalement le matériau, il faut inverser le sens de l'excitation  $H$  jusqu'à la valeur  $-H_c$ , appelée excitation coercitive, où  $B$  devient nul :

Excitation coercitive :

$$H = -H_c ; B = 0$$

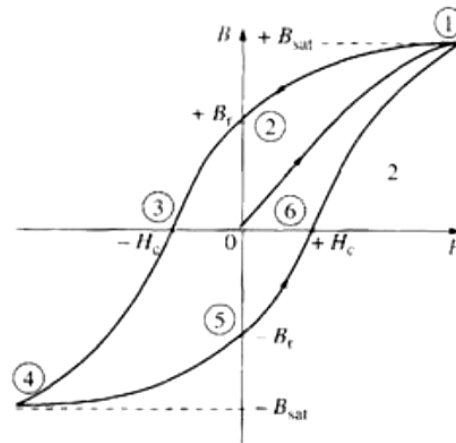


Fig.2. Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique

- Il est possible de continuer à diminuer  $H$  : le champ magnétique s'inverse et sa valeur absolue croît jusqu'à une nouvelle saturation :  $B = -B_{sat}$  (point ④) ;
- Nous terminons le cycle en décrivant le chemin inverse symétrique du chemin aller par rapport à l'origine des axes (points ⑤, ⑥ et ①).

On peut classer les matériaux magnétiques (cela concerne aussi bien les matériaux ferromagnétiques que les ferrites) en deux catégories très différentes : les matériaux doux et les matériaux durs.

L'observation de leurs cycles d'hystérésis permet de les caractériser facilement (fig. 3).

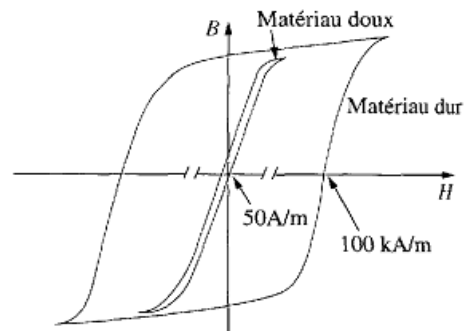


Fig.3. Cycles d'hystérésis.

## Chapitre2. Matériaux ferromagnétiques

### 1. Matériaux doux

- Les plus courants : FeSi, FeNi, FeCo, ferrites, amorphes, SMC.
- Perméabilité magnétique élevée, coercitif et rémanent faibles, pertes magnétiques faibles.
- Aimantation/désaimantation aisée : utilisation pour des applications où le flux magnétique doit être maximisé.
- Applications : transformateurs, machines électriques, inductances, électro-aimants, relais, ...

## 1.1. Organisation en domaines

- ◆ **Domaine de Weiss** (Weiss (Pierre), physicien français (1865-1940)):

Au niveau de chaque atome, un moment magnétique apparaît :  $\vec{M} = M \cdot \vec{n}$

Un domaine de Weiss est une région où tous les moments magnétiques sont identiques.

Ce sont des moments résultants (flèches) de ces domaines qui ont tendance à s'aligner dans la direction du champ appliqué, produisant ainsi une aimantation.

- ◆ **Paroi de Bloch** (Bloch (Félix), physicien américain d'origine suisse (1905-1983)) :

Lors du transit d'un domaine de Weiss à un autre, les moments magnétiques changent de direction dans les parois de Bloch pour atteindre celle du nouveau domaine.

- ◆ Le processus d'aimantation est fortement non linéaire et est accompagné de pertes ( $P_{\text{hystérésis}} + P_{\text{courants induits}}$ ).

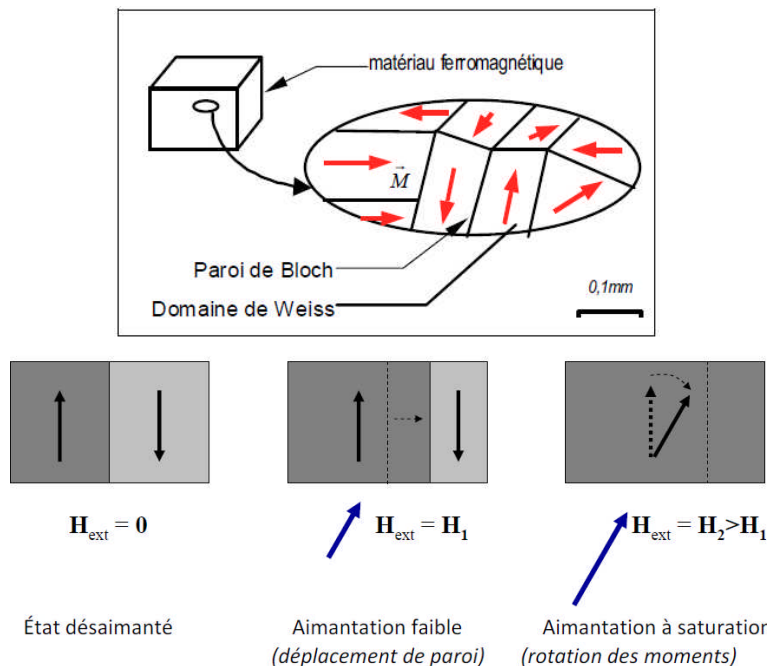


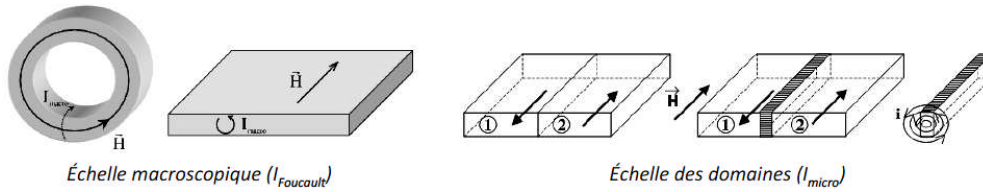
Fig.4. Observations des domaines magnétiques et processus d'aimantation à l'échelle des domaines.

## 1.2. Pertes fer

### 1.2.1. Décomposition des pertes (G. Bertotti)

- Pertes par hystérésis (ou pertes quasi-statiques) :  $P_{\text{qs}}$  - Surface du cycle d'hystérésis (pertes propres au matériau).
- Pertes par courants induits (ou pertes classiques) :  $P_{\text{cl}}$  - Courants induits macroscopiques

et microscopiques (pertes qui dépendent de la dynamique d'évolution du champ magnétique).



- ◆ Pertes excédentaires :  $P_{sup}$  - Comportement collectif des parois : notion d'objet magnétique (dépend de la dynamique d'évolution du champ magnétique).

$$P = P_{qs} + P_{cl} + P_{sup}$$

On exprime les pertes en termes d'énergie :

$$P = Wf = wfV$$

$$w = w_{qs} + w_{cl} + w_{sup}$$

En résumé on a :

Exprimé en $J/m^3$	Exprimé en $W/m^3$
$w_{qs} = k_0 B^2$	$p_{qs} = k_0 B^2 f$
$w_{cl} = k_1 B^2 f$	$p_{cl} = k_1 B^2 f^2$
$w_{sup} = k_2 B^2 \sqrt{f}$	$p_{sup} = k_2 B^2 f^{3/2}$

### 1.2.2. Pertes classiques (Approche qualitative)

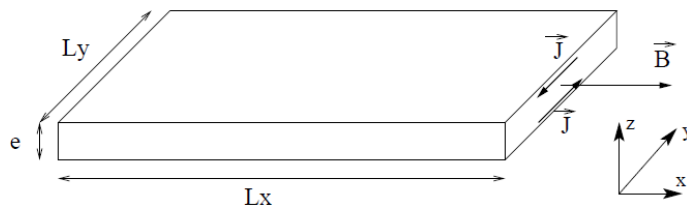


Fig. 5. Tôle magnétique conductrice d'épaisseur négligeable par rapport à la largeur et à la longueur.

$L_x \gg e, L_y \gg e$ , densité de courant uniforme sur chaque demi-épaisseur, flux sinusoïdal. La puissance dissipée dans l'échantillon s'écrit :

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Comme on a l'équivalent d'une spire,

$$V(t) = -\frac{d\phi}{dt}$$

d'où la valeur efficace de la tension efficace,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \hat{B} e L_y$$

La valeur de la résistance équivalente s'écrit dans notre hypothèse :

$$R = \rho \frac{2L_y}{\frac{1}{2}eL_x}$$

En introduisant  $R$  &  $V$  dans l'expression de  $P$ , on obtient :

$$P = \frac{1}{8} \sigma \omega^2 \widehat{B}^2 e^3 L_x L_y$$

En divisant par le volume  $L_x L_y e$  et en substituant la fréquence  $f$  à la pulsation  $\omega$ , on obtient l'expression des pertes "classiques" par unité de volume :

$$p_{cl} = \frac{\pi^2}{2} \sigma f^2 \widehat{B}^2 e^2$$

### 1.3. Tôles ferromagnétiques

❖ En électrotechnique ces critères sont :

- Résistivité faible (Fer pur environ  $10^{-7} \Omega \cdot m$ )- ajout de silicium, aluminium ou germanium pour augmenter la résistivité sans « trop » impacter les performances magnétiques.
- Processus de fabrication simplifié, l'ajout de silicium :
  - o augmente la dureté et la rigidité pour la manutention.
  - o facilite le traitement haute température pour l'amélioration des performances.
- Amélioration de la pureté (diminuer les impuretés présentes dans le matériau).

### 1.4. Contrainte thermique

Les propriétés thermiques des matériaux magnétiques ont été étudiées par Pierre Curie (1859-1906). Ses expériences ont montré que dans les matériaux magnétiques, l'aimantation diminue avec l'augmentation de la température. Au dessus d'une température critique  $\theta_c$  (température de Curie), les matériaux magnétiques perdent leurs propriétés ferromagnétiques et se comportent comme des substances paramagnétiques. La susceptibilité magnétique des particules magnétiques indépendantes était formulée par l'équation

$$\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H} = \frac{C}{\theta}$$

Avec  $C$ , la constante de Curie qui dépend du type de matériau,  $\theta$  en kelvin. L'étape suivante dans les recherches des matériaux magnétiques était faite par Paul Langevin (1872-1946) qui a expliqué le paramagnétisme et introduit sa fameuse théorie décrivant par une fonction mathématique la relation entre l'aimantation  $M$ , le champ magnétique appliqué  $H$  et la température  $\theta$ :

$$M = \mathfrak{L} \left( a \frac{H}{k \cdot \theta} \right)$$

avec :

- $k = 1.381E^{-23}$  (J/K), est la constante de Boltzmann (Ludvig Eduard Boltzmann, 1844-1906).
- $a$  est une constante exprimée en  $Vms^{-1}$ . La fonction de Langevin  $\mathfrak{L}(x)$  définie par :

$$\mathfrak{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

La plus grande étape dans la théorie moderne des matériaux ferromagnétiques résulte dans la prise en considération de l'interaction entre les particules magnétiques. Pierre Weiss (1865-1940) simulait cette interaction entre les dipôles magnétiques et leurs moments avec une boucle fermée en modifiant la formulation de Langevin :

$$M = \mathfrak{L} \left( a \frac{H + \alpha M}{k \cdot \theta} \right)$$

où  $\alpha M$  est le champ d'interaction,  $g$  le paramètre de bouclage (facteur de correction de Weiss). A haute température au dessus du point de Curie, la relation précédente nous ramène à la loi de Curie-Weiss :

$$\chi = \frac{C}{\theta - \theta_c}$$

## 2. Matériaux magnétiques durs

### 2.1. Notion de champ démagnétisant

Lorsque le champ change de milieu il ce produit un phénomène de réfraction identique à celui de la lumière traversant la surface de l'eau. Fig.6.1 est représenté le cas du champ magnétique passant du fer à l'air. L'induction au bord de la surface s'écrit respectivement côté matériau et côté extérieur :

$$\begin{aligned} B_m &= J_m + \mu_0 H_m \\ B_e &= \mu_0 H_e \end{aligned}$$

La continuité de la composante normale de l'induction nous donne :

$$\begin{aligned} B_m &= B_e \\ \mu_0 \mu_R H_m &= \mu_0 H_e \\ H_m &= H_e - \frac{J_m}{\mu_0} = H_e - \chi H_m = H_e - \chi \frac{H_e}{\mu_R} \\ H_m &= H_e - \frac{\chi}{1 + \chi} H_e \end{aligned}$$



On appelle champ démagnétisant le terme :

$$H_d = \frac{\chi}{1 + \chi} H_e$$

- Si  $\chi \gg 1$ , cas des matériaux doux  $H_d = H_e \Rightarrow H_m = 0$
- Si  $\chi \approx 1$ , cas des matériaux durs  $H_d = \frac{1}{2} H_e \Rightarrow H_m = \frac{1}{2} H_e$

## 2.2. Circuits magnétiques avec aimants

Théorème d'Ampère

$$H_a \ell_a + H_f \ell_f + H_e \ell_e = 0$$

$$\lim_{\mu_R \rightarrow \infty} H_f = \lim_{\mu_R \rightarrow \infty} \frac{B_f}{\mu_0 \mu_R} = 0$$

$$H_a = -\frac{H_e \ell_e}{\ell_a} = -\frac{B_e \ell_e}{\mu_0 \ell_a}$$

Conservation du flux

$$B_a S_a = B_f S_f = B_e S_e$$

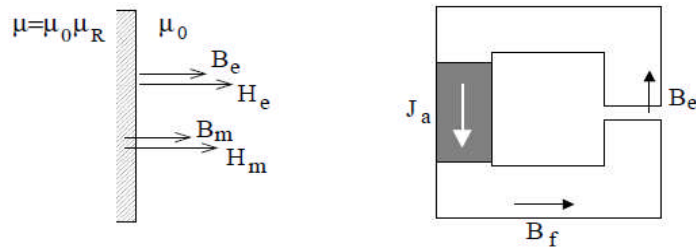


Fig. 6. Conservation de l'induction normale au passage d'un milieu à un autre (gauche).  
Circuit magnétique avec aimant (droite).

$$B_e = \frac{B_a S_a}{S_e}$$

D'où l'expression de l'induction dans l'aimant

$$B_a = -\mu_0 H_a \frac{\ell_a S_e}{\ell_e S_a}$$

Cette expression représente une droite appelée **droite d'entrefer**. L'intersection entre le cycle d'hystérésis et la droite d'entrefer donne le point de fonctionnement de l'aimant, celui-ci est donc déterminé par les propriétés intrinsèques de l'aimant et les paramètres géométriques du circuit.

Lorsque l'entrefer varie, la pente de la droite d'entrefer varie et le point de fonctionnement se déplace. Ce déplacement (toujours à l'intérieur du cycle) se fait sur le bord du cycle si l'entrefer

augmente et suivant la **droite de recul** si l'entrefer diminue. La pente de la droite de recul varie entre  $\mu_0$  pour un très bon aimant et  $5 \mu_0$  pour un aimant de mauvaise qualité. Il en résulte que lorsque l'entrefer s'agrandit puis retrouve sa taille initiale, l'aimantation initiale n'est recouvrée que si la pente de la droite de recul est  $\mu_0$  (pour les aimants dont  $\mu_0 H_C^J \geq J_R$ )

### 2.3. Energie stockée dans l'entrefer

$$W_e = \frac{1}{2} B_e H_e V_e$$

D'après les expressions d'Ampère et la conservation du flux:

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{B_a S_a}{S_e} \times \left( -H_a \frac{\ell_a}{\ell_e} \right) V_e$$

Comme  $V_e = S_e \ell_e$  et  $V_a = S_a \ell_a$ ,

$$B_e H_e V_e = -B_a H_a V_a$$

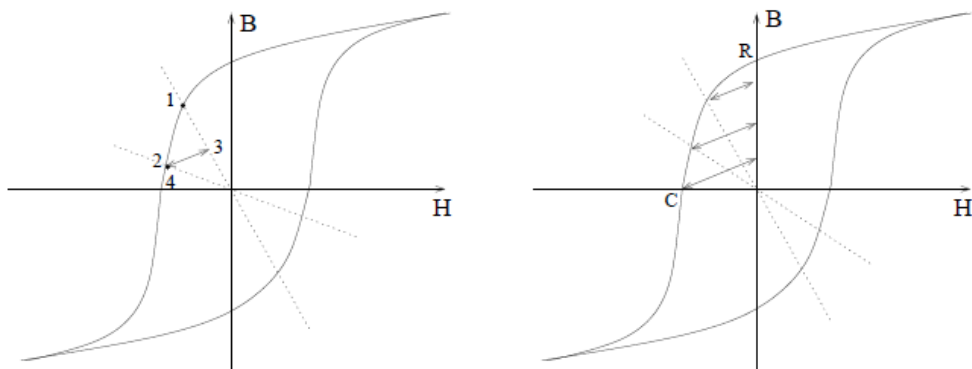


Fig. 7. A gauche : 1, point de polarisation initial ; 2, ouverture de l'entrefer ; 3, entrefer initial ; la droite de recul (3,4) est réversible. A droite : R, point rémanent  $\ell_e = 0$  ; C, point coercitif  $\ell_e \gg \ell_a$ .

On déduit donc l'énergie stockée dans l'entrefer du point de fonctionnement dans le cycle d'hystérésis.

Pour trouver le point de fonctionnement idéal, il faut trouver celui où le produit BH est maximum.

Dans le cas d'un aimant idéal pour lequel  $\mu_0 H_C^J \geq J_R$ , le cycle d'hystérésis dans le troisième cadran du plan (B, H) est une droite d'équation :

$$B = \frac{B_R}{\mu_0 H_C^B} H - H_C^B$$

$$BH = \frac{B_R}{\mu_0 H_C^B} H^2 - H_C^B H$$

$$\frac{d}{dH} (BH) = \frac{2B_R}{\mu_0 H_C^B} H - H_C^B = 0$$

$$H = \frac{\mu_0 H_C^B}{2B_R}$$

Comme  $\mu_0 H_C^B = J_R$ ,

$$H = \frac{1}{2} H_C^B \Rightarrow B = \frac{1}{2} B_R$$

$$(BH)_{max} = \frac{1}{4} B_R H_C^B$$

Dans le cas d'un aimant quelconque, ne disposant pas d'une équation de la branche du cycle, on trace les courbes "d'iso-BH" c'est à dire celles pour lesquelles ce produit est une constante. Le point d'intersection entre le cycle et la courbe appartenant à la famille d'hyperboles d'équation  $B = -k/H$  qui le tangente donne de point de fonctionnement optimal de cet aimant.

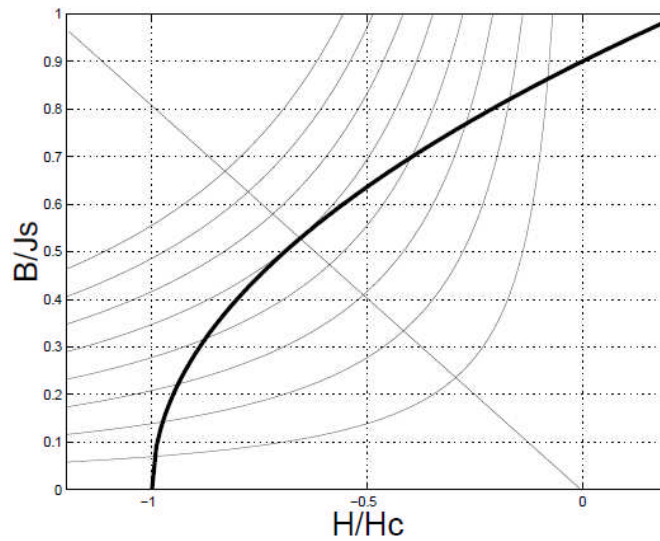


Fig. 8. Recherche du point d'énergie maximum pour un aimant quelconque.

#### 2.4. Réaction magnétique d'induit

$$H_a \ell_a + H_f \ell_f + H_e \ell_e = NI$$

$$H_e = \frac{NI}{\ell_e} - H_a \frac{\ell_a}{\ell_e}$$

$$B_e = \mu_0 H_e$$

$$B_e = \mu_0 \left( \frac{NI}{\ell_e} - H_a \frac{\ell_a}{\ell_e} \right)$$

$$B_a S_a = B_f S_f = B_e S_e$$

$$B_a = \mu_0 N I \frac{S_e}{\ell_e S_a} - \mu_0 H_a \frac{\ell_a S_e}{\ell_e S_a}$$

On reconnaît l'équation de la droite d'entrefer dans le deuxième terme. L'intersection avec l'axe des abscisses donne :

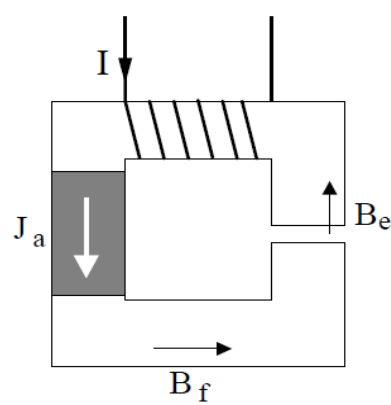
$$\mu_0 N I \frac{S_e}{\ell_e S_a} = \mu_0 H_a \frac{\ell_a S_e}{\ell_e S_a}$$


Fig.9. Circuit magnétique avec aimant et bobinage.

$$H = \frac{NI}{\ell_a}$$

### Chapitre3. Diélectriques

#### 1. Relations de l'électrostatique

Dans le vide l'application d'un champ électrique  $E$ , exprimé en V/m, produit une induction électrique  $D$ , exprimée en C/m<sup>2</sup>, donnée par l'équation du milieu

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

où la permittivité du vide est  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-8}$  F/m (farad par mètre).

Lorsqu'un volume est rempli de charges électriques avec une répartition uniforme de densité volumique  $\rho$  la charge totale est donnée par le théorème de Gauss

$$Q = \int_v \rho dv = \int_S \vec{D} d\vec{S}$$

Dans la matière le champ électrique peut générer un déplacement du centre de gravité des charges dans un cristal qui se manifeste par une polarisation électrique  $P$  de la matière. L'équation du milieu devient :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Dans le cas où la polarisation dépend linéairement de du champ, on définit  $\chi_d$  la susceptibilité diélectrique

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_d \vec{E}$$

d'où la reformulation de l'induction électrique  $D$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_d) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_R \vec{E}$$

où  $\epsilon_R$  est la permittivité. Dans un milieu homogène et isotrope la susceptibilité et la permittivité sont des grandeurs scalaires. Si le milieu est anisotrope ces grandeurs sont des tenseurs  $3 \times 3$  symétriques.

Les grandeurs électriques macroscopiques sont reliées aux grandeurs électriques microscopique définies ci-dessous au travers des équations suivantes

$$V = \oint \vec{E} d\vec{\ell}$$

$$Q = \int_S \vec{D} d\vec{S}$$

où  $V$  est une difference de potentiel qui correspond au travail nécessaire pour amener une charge unité de l'infini jusqu'à une position donnée par rapport à une autre charge ponctuelle. On dit que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire car sa direction correspond à celle où  $V$  varie le plus rapidement, ce qui s'exprime sous forme vectorielle comme suit

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

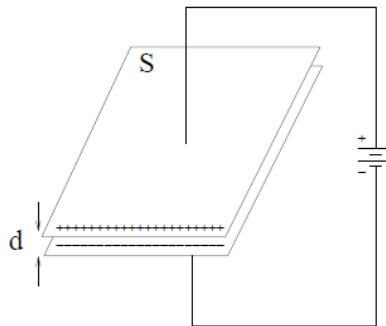


Fig.9. Circuit magnétique avec aimant et bobinage.

Pour simplifier, on considère que le champ électrique est créé par l'application d'une différence de potentiel entre deux plaques conductrices infinies séparées par un diélectrique d'épaisseur  $d$  (voir Fig. 2.1), on a alors

$$V = Ed$$

$$Q = DS$$

La capacité d'un condensateur relie la charge et la tension

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D}{E} \cdot \frac{S}{d}$$

d'où en utilisant la relation  $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_d) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_R \vec{E}$

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_R S}{d}$$

## 2. Energie stockée

L'énergie du champ électrique dans le vide par unité de volume est définie par l'intégrale

$$w = \int_0^D E dD = \epsilon_0 \int_0^E E dE$$

exprimée en  $J.m^{-3}$  correspondant à la surface à gauche de la trajectoire dans le plan (D, E) comme indiqué Fig. 10.

Dans un milieu linéaire, la densité d'énergie est définie par la même intégrale qui devient :

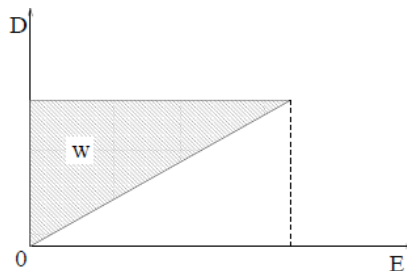


Fig.10. Densité d'énergie du champ électrique.

$$w = \epsilon_0 \epsilon_R \int_0^E E dE = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_R E^2$$

L'énergie stockée dans un condensateur s'obtient par intégration sur le volume

$$W = \int_v w dv = w S d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_R E^2 S d$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_R S}{d} d \cdot E^2 d = \frac{1}{2} C (Ed)^2$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

## 2. Grandeurs caractéristiques des milieux diélectriques.

Un matériau est **diélectrique** s'il ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Autrement dit, c'est un milieu qui ne peut pas conduire le courant électrique. A ce titre, on l'appelle parfois **isolant électrique**. On compte parmi ces

milieux le verre et de nombreux plastiques.

Malgré l'impossibilité des milieux diélectriques de conduire le courant, ils présentent de nombreuses caractéristiques électriques.

- Rigidité diélectrique
- Permittivité diélectrique (constante diélectrique)

### 2.1. Rigidité diélectrique

La rigidité diélectrique d'un milieu isolant représente la valeur maximum du champ électrique que le milieu peut supporter avant le déclenchement d'un arc électrique (donc d'un court-circuit). On utilise aussi l'expression **champ disruptif**. Pour un condensateur, quand cette valeur est dépassée, l'élément est détruit. La valeur maximale de la tension électrique appliquée aux bornes, est appelée tension de claquage du condensateur. Si le champ électrique dépasse la rigidité diélectrique du matériau, on parle de **claquage**, et le matériau peut voir ses propriétés physiques modifiées, parfois de façon réversible, et parfois de façon irréversible.

### 2.2 Rigidité diélectrique de quelques diélectriques usuels

Materiau	Rigidité Diélectrique (MV/m)
Air	3
Quartz	8
titanate de Strontium	8
Néoprène	12
Nylon	14
Pyrex	14
huile silicone	15
Papier	16
Bakelite	24
Polystyrene	24
Teflon	60

### 2.3. Constante diélectrique

La constante diélectrique ou constante électrique, également nommée permittivité du vide ou encore permittivité diélectrique du vide, est une constante physique. Elle est notée par  $\epsilon_0$ .

La constante diélectrique se définit comme le rapport entre la permittivité  $\epsilon$  du matériau considéré et la permittivité du vide.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

où :

-  $\mu_0$  est la constante magnétique

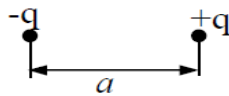
-  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le système d'unité SI  $\epsilon_0$  a pour valeur:  $\epsilon_0 = 8,854187817... \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$

### 3. Polarisation diélectrique

#### 3.1. Moment électrique d'un dipôle :

Un dipôle est formé de deux charges égales et de signes opposés. La valeur du moment électrique d'un dipôle est  $p_0 = q a$ . Où  $q$  est la charge positive (ou la valeur absolue de la charge négative) et  $a$  la longueur du dipôle. Il va de soit que pour les molécules ou  $a = 0$ , le moment dipolaire est nul.



**Remarque :** jusqu'à présent, les scientifiques ne se sont pas mis d'accord quant au sens à donner au dipôle électrique, de la charge positive vers la charge négative ou vice versa.

#### 3.2. Description de la polarisation

La propriété la plus importante d'un diélectrique est la polarisation sous l'action d'un champ électrique externe.

**1. A l'échelle atomique :** En l'absence d'un champ électrique, le moment électrique est nul car la somme algébrique des charges dans toutes les molécules dans un volume donné est nulle, du fait que les centres de gravité des charges positives et négatives coïncident. Lors de l'application d'un champ électrique, les centres de gravité ne coïncident plus et les particules (atomes et molécules) sont alignées suivant la direction de  $E$  et acquièrent un moment  $p_0$  (voir figure).

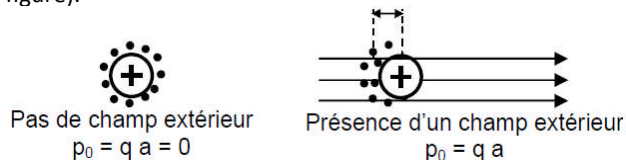
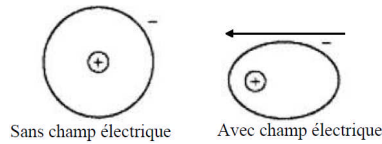


Fig. 11. Polarisation électronique.

**1.1. Polarisation électronique :** Elle est due au déplacement du nuage d'électrons par rapport au noyau positif, sous l'action d'un champ  $E$ . dans ce cas, la polarisation se produit rapidement durant un bref moment (de l'ordre de  $10^{-15}$  s). Elle se produit dans



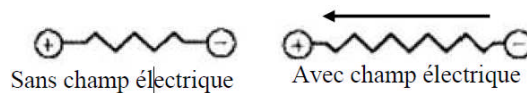
les atomes et les ions.



Le processus de la polarisation électronique peut être compris en considérant l'atome le plus simple, à savoir l'atome d'hydrogène (1 électron en orbite d'un noyau contenant un proton). L'orbite à gauche est celle qui existe avant l'application d'un champ électrique (pas de polarisation), tandis que celle de droite est obtenue après polarisation, et donc un déplacement d'orbite d'une distance  $a$ . durant la polarisation, l'atome acquiert un dipôle  $p = e a$ .

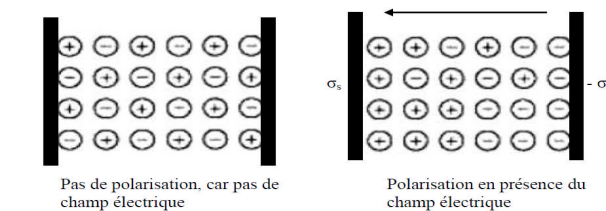
**1.2. Polarisation ionique :** Elle est due au déplacement mutuel des ions formant ainsi une molécule asymétrique. Le temps requis pour ce déplacement, afin d'assurer la polarisation est de l'ordre de  $10^{-12}$  à  $10^{-13}$  s.

Les polarisations électronique et ionique ont beaucoup en commun. Dans les deux cas, il s'agit de déplacement de charges (et non pas rotation) dans la direction du champ électrique.



**2. A l'échelle macroscopique :** Est due a des déplacements de charges dans l'ensemble du matériau.

Considérons simplement un condensateur plan de surface  $S$  et d'épaisseur  $a$ . Posons que la charge de polarisation apparaissant à chaque surface du condensateur est  $\sigma_s$  [C/m<sup>2</sup>].



Comme la charge totale à l'intérieur est compensée et donc nulle, le moment diélectrique total est :  $\sigma_s \cdot S \cdot a$

En divisant par le volume  $V = Sa$ , nous obtenons la polarisation  $P : P = \sigma_s$

Conclusion : la polarisation  $P$  est égale à la densité de charge apparaissant à la surface.

4. Diélectriques polaires et non polaires :

Tous les diélectriques peuvent être divisés en deux catégories : Diélectriques polaires et diélectriques non polaires.

La somme totale des charges dans une molécule est nulle, mais l'arrangement (la structure) de ces charges peut être différent d'une matière à une autre. Les centres de gravité peuvent coïncider ou ne pas coïncider :

- Dans le 1er cas : la molécule est non polaire.
- Dans le 2eme cas : la molécule (et donc la matière en question) est dite polaire. Même en l'absence de champ électrique externe, la molécule possède un moment dipolaire.

Il est clair que les molécules arrangées de façon symétrique (qui possèdent un centre de symétrie) sont non polaires du moment que les centres de gravité des charges positives et négatives coïncident avec le centre de symétrie. Par contre, les molécules asymétriques sont polaires.

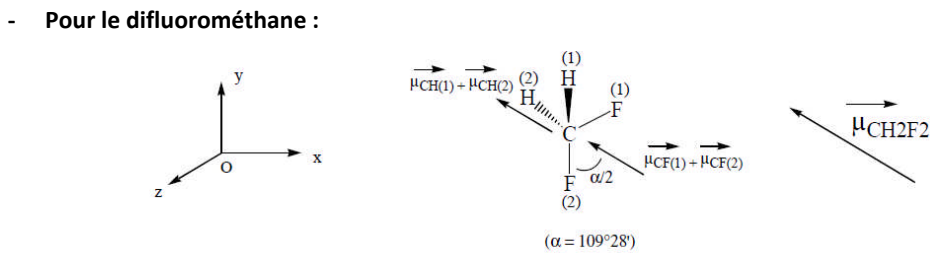
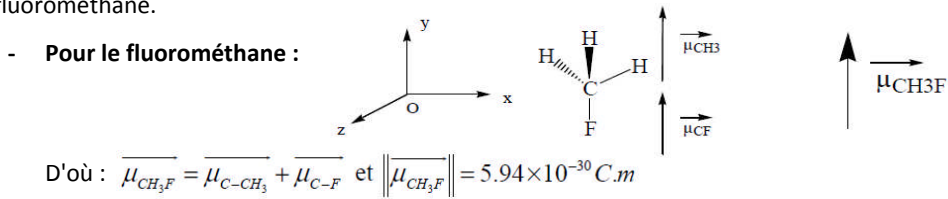
Les molécules monoatomiques (He, Ne, Ar, Kr, Xe) et les molécules formées de deux atomes identiques (H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, etc....) sont non polaires. Par contre, les molécules à composition ionique telles que l'iode de potassium KI ont un moment dipolaire élevé.

**Exemple** : Les molécules CH<sub>4</sub> et CCl<sub>4</sub> sont symétriques et donc non polaires. Les autres molécules sont asymétriques et donc polaires.

**Activités de compréhension**

1. Calculer les moments dipolaires de CH<sub>3</sub>F, CH<sub>2</sub>F<sub>2</sub> et CHF<sub>3</sub>. Comment se nomment ces molécules ?

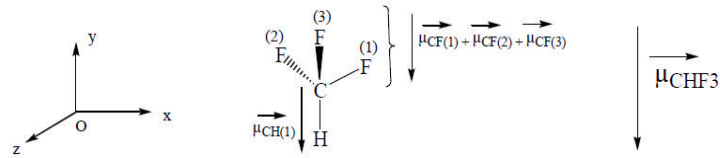
CH<sub>3</sub>F, CH<sub>2</sub>F<sub>2</sub> et CHF<sub>3</sub> sont respectivement le fluorométhane, le difluorométhane et le trifluorométhane.



D'où :  $\vec{\mu}_{CH_2F_2} = \vec{\mu}_{CH(1)} + \vec{\mu}_{CH(2)} + \vec{\mu}_{CF(1)} + \vec{\mu}_{CF(2)}$  et

$$\|\vec{\mu}_{CH_2F_2}\| = 2 \times \mu_{CH} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \times \mu_{CF} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6.86 \times 10^{-30} \text{ C.m}$$

- Pour le trifluorométhane :



D'où :  $\vec{\mu}_{CHF_3} = \vec{\mu}_{CF(1)} + \vec{\mu}_{CF(2)} + \vec{\mu}_{CF(3)} + \vec{\mu}_{CH}$  et  $\|\vec{\mu}_{CHF_3}\| = 3 \times \mu_{CF} \times \cos(\pi - \alpha) + \mu_{CH} = 5.94 \times 10^{-30} \text{ C.m}$

Données :

Liaison	Norme moyenne du moment dipolaire associé à la liaison
C tétraédrique-H	$1.30 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$
C-F	$4.64 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$

Angle dans un tétraèdre régulier :  $109^\circ 28'$

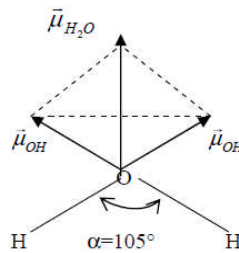
2. Dans la molécule d'eau, l'angle HÔH a pour valeur expérimentale  $105^\circ$ .

2.1. Calculer le moment dipolaire de cette molécule, en considérant qu'il est égal à la somme vectorielle des moments dipolaires des deux liaisons O-H.

2.2. Calculer le pourcentage ionique de la liaison O-H dans H<sub>2</sub>O.

On donne  $\mu_{O-H} = 1,51\text{D}$  et  $d_{O-H} = 0,96\text{Å}$ .

1. Moment dipolaire de la molécule H<sub>2</sub>O :



L'oxygène étant plus électronégatif que l'hydrogène, la liaison O-H est polarisée. Il existe donc un moment dipolaire  $\mu_{OH}$  ayant pour direction chaque liaison O-H, le sens étant par convention dirigé des charges positives vers les charges négatives. En faisant la somme des deux vecteurs  $\mu_{OH}$ , on obtient le moment dipolaire  $\mu_{H_2O}$  de la molécule qui est dirigé suivant la bissectrice de l'angle HÔH.

$$\vec{\mu}_{H_2O} = 2\vec{\mu}_{OH}$$

$$\mu_{H_2O} = 2\mu_{OH} \cdot \cos(\alpha/2) = 2 \cdot 1,51 \cos(105/2) = 1,84 \text{ Debye}$$

## 2. Pourcentage ionique de la liaison O-H dans H<sub>2</sub>O.

Le pourcentage ionique =  $(\mu \text{ expérimental} / \mu \text{ théorique}) \times 100\%$

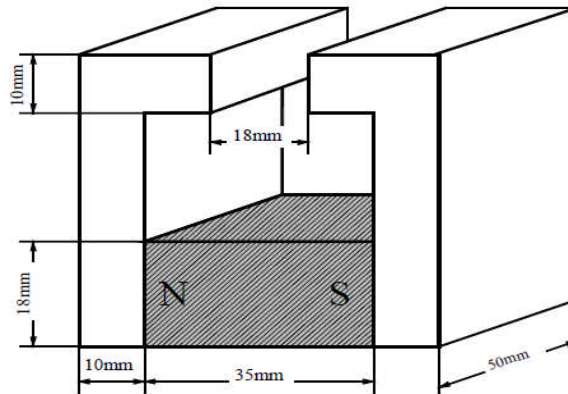
Le moment dipolaire théorique :  $\mu = \delta \cdot e \cdot d$ , 4,8 (en Debye) avec  $\delta = 1$

$\mu_{\text{O-H}} = 1,51\text{D}$  et  $d_{\text{O-H}} = 0,96\text{\AA}$ .

## 3. Circuit magnétique avec aimant permanent

### 3.1. Données

Le circuit magnétique suivant est muni d'un aimant permanent dont la caractéristique BH est donnée à la page suivante.



Circuit magnétique et aimant

**Hypothèse :** La perméabilité relative du circuit magnétique est infinie  $\mu_r = \infty$

### 3.2. Questions

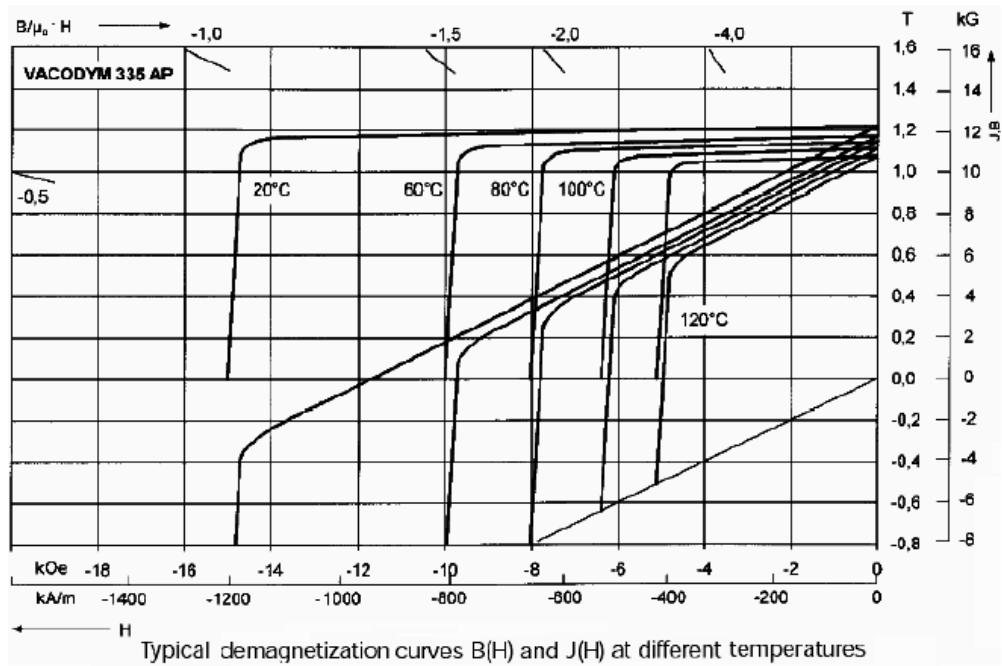
**3.2.1.** Déterminer, pour une température de 20°C les valeurs caractéristiques de la droite de retour, soit  $\mu_d$ ,  $H_0$ ,  $B_0$ .

**3.2.2.** Déterminer graphiquement puis calculer le point de fonctionnement de l'aimant  $\{B_a, H_a\}$  à 20°C pour la configuration du circuit magnétique donnée.

**3.2.3.** Calculer le champ d'induction magnétique  $B_\delta$  dans l'entrefer.

**3.2.4.** Si l'aimant est sorti puis réinsérer dans le circuit magnétique peut-on observer une variation du champ d'induction magnétique dans l'entrefer  $B_\delta$  On admet que cette opération se fait à une température de 20°C.

**3.2.5.** Quelle serait la valeur de l'entrefer optimum c'est à dire permettant d'avoir le produit  $B_a H_a$  de l'aimant maximum.



Material Code	Remanence		Coercivity				Energy Density		max. Continuous Temperature
	$B_r$ typ	$B_r$ min	$H_{cB}$ typ	$H_{cB}$ min	$H_{cJ}$ typ	$H_{cJ}$ min	$(BH)_{max}$ typ <sup>325</sup>	$(BH)_{max}$ min	$T_{max}$
VACODYM 335 AP	1.23T 12.3kG	1.12T 11.2kG	950 kA/m 11.9 kOe	765 kA/m 9.6 kOe	1200 kA/m 15 kOe	966 kA/m 12.1 kOe	292 KJ/m <sup>3</sup> 37 MGOe	214 KJ/m <sup>3</sup> 27 MGOe	70°C 160 °F

## **CORRIGÉ**

### **3.2.1. Droite de retour**

Des données du constructeur, on peut déterminer  $H_0 = H_c$  et  $B_0 = B_r$ . On a donc :

$$H_0 = 950 \text{ kA/m}, B_0 = 1.23 \text{ T} @ 20^\circ\text{C}$$

L'équation de la droite de retour vaut donc

$$B_a = B_0 + \mu_d H_a$$

Avec pour la pente (permeabilité magnétique de l'aimant)

$$\mu_d = \frac{B_0}{H_0} \quad \text{AN: } \mu_d = \frac{1.23}{950 \cdot 10^3} = 1.29 \cdot 10^{-6} = 1.03 \mu_0$$

### **3.2.2. Droite de charge**

Théorème d'Ampère :

$$H_a l_a + H_\delta \delta = 0$$

Conservation du flux

$$B_a S_a = B_\delta S_\delta$$

Propriété du milieu

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta$$

A l'aide des relations précédentes, on peut écrire pour la droite de charge :

$$B_a = -\frac{l_a}{\delta} \frac{\mu_0 S_\delta}{S_a} H_a \quad AN : B_a = -\frac{35}{18} \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 18}{50 \cdot 10} H_a = 1.36 \cdot 10^{-6} H_a$$

A l'aide des relations 4.1 et 4.6

$$B_a = B_0 - \frac{\mu_d S_a}{l_a} \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} B_a = B_0 - \frac{\Lambda_i}{\Lambda_\delta} B_a$$

avec

$$\Lambda_i : \text{perméance interne de l'aimant} : \Lambda_i = \frac{\mu_d S_a}{l_a}$$

$$\Lambda_\delta : \text{perméance de l'entrefer} : \Lambda_\delta = \frac{\mu_0 S_\delta}{\delta}$$

Finalement

$$B_a = \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0 \quad AN : B_a = 0.63T$$

Pour les champs magnétiques, on a :

$$\left. \begin{array}{l} B_a = \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0 \\ B_a = B_0 + \mu_d H_a \end{array} \right\} H_a = \frac{1}{\mu_d} (B_a - B_0) = \left( \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} - 1 \right) \frac{B_0}{\frac{\mu_d}{\mu_0}}$$

Puis finalement

$$H_a = -\frac{\Lambda_i}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} H_0 \quad AN : H_a = -464kA/m$$

### 3.2.3. Champ d'induction dans l'entrefer

A l'aide de la relation de la conservation du flux

$$B_\delta = \frac{S_a}{S_\delta} B_a = \frac{S_a}{S_\delta} \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0 \quad AN : B_\delta = 1.13T$$

### 3.2.4. Extraction de l'aimant

A 20°C, le coude de la caractéristique d'aimantation se trouve dans le 3<sup>ème</sup> quadrant, on peut donc dire que le point de fonctionnement se déplacera sur la droite de retour. Il n'y a donc pas perte de magnétisation.

### 3.2.5. Entrefer optimum

L'entrefer optimum correspond à un produit  $B_a H_a$  maximum. La courbe d'aimantation dans le 2<sup>ème</sup> quadrant étant une droite, on peut dire que le point de fonctionnement vaut

$$\{B_a, H_a\} \begin{cases} B_a = \frac{1}{2} B_0 \\ H_a = -\frac{1}{2} H_0 \end{cases}$$

A l'aide des relations  $B_a = \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0$  et  $H_a = -\frac{\Lambda_i}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} H_0$ , on peut écrire :

$$B_a = \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0 = \frac{1}{2} B_0 \Rightarrow \Lambda_\delta = \Lambda_i$$

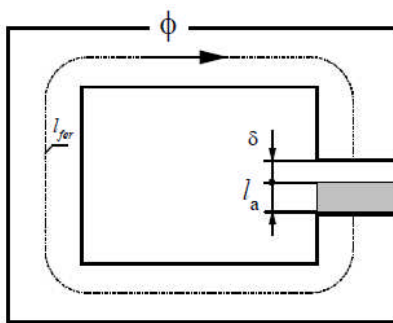
Fort de ces considérations, on peut écrire

$$\frac{\mu_0 S_\delta}{\delta} = \frac{\mu_a S_a}{l_a} \Rightarrow \delta = \frac{\mu_0 S_\delta}{\mu_a S_a} l_a \quad AN: \delta = 18.9mm$$

## 4. BILAN ÉNERGÉTIQUE

### 4.1. DONNÉE

Soit le circuit magnétique suivant



- $l_{fer}$  : longueur de la partie fer
- $l_a$  : longueur de l'aimant
- $\delta$  : longueur de l'entrefer
- $S_a$  : surface normale de l'aimant traversée par le flux
- $S_\delta$  : surface normale de l'entrefer traversée par le flux

Circuit magnétique déformable

Hypothèse :

Perméabilité relative du fer infinie ( $\mu_r = \infty$ ), flux de fuite nul (tout le flux passe par l'entrefer  $\delta$ ), pas de phénomène de frange.

La caractéristique de l'aimant est identique à celle de l'exercice 3.

### 4.2. QUESTIONS

- 4.2.1 Par un calcul littéral, déterminer l'énergie magnétique confinée dans l'aimant en fonction des perméances  $\Lambda_i$  interne de l'aimant et  $\Lambda_\delta$  d'entrefer.

4.2.2 Déterminer ensuite l'énergie magnétique dans l'entrefer.

On rappelle ici que  $W_{mag} = \int_V \int_0^B H dB dV$ . Il faut donc commencer par déterminer  $B_a$  et  $H_a$  (point de fonctionnement de l'aimant), puis  $B_\delta$  et  $H_\delta$ .

**CORRIGÉ**

**4.2.1. Energie magnétique dans l'aimant**

$$\begin{aligned}
 W_{mag[a]} &= \int_{V_a} \int_0^{B_a} H_a dB_a dV_a \underset{\substack{\text{Droite de charge} \\ B_a = -\frac{l_a \mu_0 \delta}{S_a} H_a}}{=} \int_{V_a} \int_0^{B_a} -\frac{\delta}{l_a} \frac{S_a}{\mu_0 S_\delta} B_a dB_a dV_a \\
 &= -\frac{1}{2\mu_d} \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} \underbrace{\frac{\mu_d S_a}{l_a}}_{\Lambda_i} B_a^2 \int_{V_a} dV_a \underset{B_a = \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0}{=} -\frac{1}{2\mu_d} \frac{\Lambda_i \Lambda_\delta}{(\Lambda_i + \Lambda_\delta)^2} B_0^2 S_a l_a \\
 &= -\frac{1}{2\mu_d} \frac{\Lambda_i \Lambda_\delta}{(\Lambda_i + \Lambda_\delta)^2} B_0^2 S_a l_a
 \end{aligned}$$

**4.2.2. Energie magnétique dans l'entrefer**

$$\begin{aligned}
 W_{mag[\delta]} &= \int_{V_\delta} \int_0^{B_\delta} H_\delta dB_\delta dV_\delta = \frac{1}{\mu_0} \int_{V_\delta} \int_0^{B_\delta} B_\delta dB_\delta dV_\delta \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} B_\delta^2 \int_{V_\delta} dV_\delta \underset{B_\delta = \frac{S_a}{S_\delta} \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} B_0}{=} \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{S_a}{S_\delta} \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} \right)^2 B_0^2 S_\delta \delta \\
 &= \frac{1}{2\mu_d} \underbrace{\frac{\mu_d S_a}{l_a}}_{\Lambda_i} \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} \left( \frac{\Lambda_\delta}{\Lambda_i + \Lambda_\delta} \right)^2 B_0^2 S_a l_a = \frac{1}{2\mu_d} \frac{\Lambda_\delta \Lambda_i}{(\Lambda_i + \Lambda_\delta)^2} B_0^2 S_a l_a
 \end{aligned}$$

On voit ici que l'énergie globale confinée dans l'aimant est égale au signe près à l'énergie magnétisante confinée dans l'entrefer.

**4.2.3. Energie magnétique dans le système**

L'énergie magnétisante totale est la somme des énergies dans l'aimant et dans l'entrefer.

$$W_{mag[\delta]} + W_{mag[a]} = 0$$

Cette valeur est nulle car il n'y a pas d'apport d'énergie externe au système.



## Exercice d'application

### 1. CALCUL D'UN CIRCUIT MAGNÉTIQUE SIMPLE

#### 1.1 DONNÉE

Soit le circuit magnétique de la Figure 1-1 traversé par un conducteur dans lequel circule un courant  $I$ . Chaque branche du circuit a une longueur moyenne  $l_x$  et une section  $S_x$ . De plus la branche 3 possède un entrefer de longueur  $\delta$ .

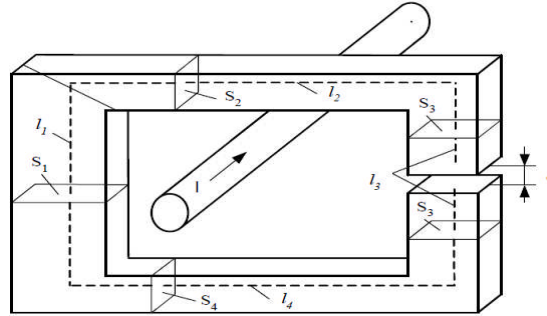


Figure 1-1 : Circuit magnétique

Hypothèses :

Pas de flux de fuite, par d'effet de frange autour de l'entrefer

La perméabilité relative du fer  $\mu_r$ .

#### 1.2 QUESTIONS

1.2.1 Déterminer le champ d'induction magnétique  $B$  dans chaque branche

1.2.2 Déterminer le champ d'induction magnétique dans l'entrefer

#### 1.2 CORRIGÉ

##### 1.2.1 Déterminer le champ d'induction magnétique $B$ dans chaque branche

Loi d'ampère :

$$I = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta + H_3 l_3 + H_4 l_4$$

Conservation du flux

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_\delta S_\delta = B_3 S_3 = B_4 S_4$$

Caractéristique des matériaux

$$B_1 = \mu_0 \mu_r H_1$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_r H_2$$

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta$$

$$B_3 = \mu_0 \mu_r H_3$$

$$B_4 = \mu_0 \mu_r H_4$$

Champ d'induction magnétique dans chaque branche

$$\begin{aligned} I &= \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} l_1 + \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} l_2 + \frac{B_\delta}{\mu_0} \delta + \frac{B_3}{\mu_0 \mu_r} l_3 + \frac{B_4}{\mu_0 \mu_r} l_4 \\ &= \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} l_1 + \frac{S_1}{S_2} \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} l_2 + \frac{S_1}{S_\delta} \frac{B_1}{\mu_0} \delta + \frac{S_1}{S_3} \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} l_3 + \frac{S_1}{S_4} \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} l_4 \\ \Rightarrow B_1 &= \frac{I}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S_2} + \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S_3} + \frac{l_4}{\mu_0 \mu_r S_4}} \frac{1}{S_1} \end{aligned}$$

### 1.2.2 Déterminer le champ d'induction magnétique dans l'entrefer

Champ d'induction magnétique dans chaque branche

$$B_{\delta} = \frac{I}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S_2} + \frac{\delta}{\mu_0 S_{\delta}} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S_3} + \frac{l_4}{\mu_0 \mu_r S_4}} \frac{1}{S_{\delta}}$$