Fagel

سلسلة تمارين رقم (1)

نعتبر $p,q\in(1,+\infty)$ حيث : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(1) اثبات صحة متباينة يونغ : نعتبر الدالة : $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ، $\varphi(t)=\frac{1}{p}t^p+\frac{1}{q}b^q-tb$

لندرس اتجاه تغيرها على $\mathbb{R}_+$.

$$\varphi'(t)=t^{p-1}-b=0\Rightarrow t=b^{\frac{1}{p-1}}$$

t	0		$b^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$		$\searrow$	$\varphi(b^{\frac{1}{p-1}})$	$\nearrow$	

إذا $\varphi(t)\geq\varphi(b^{\frac{1}{p-1}})$; $\forall t\geq0$

$$\varphi(b^{\frac{1}{p-1}})=\frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}b^q-b^{1+\frac{1}{p-1}}=\frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}+\frac{1}{q}b^q-b^{\frac{p}{p-1}}$$

ولدينا : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فإن : $pq=p+q$ ومنه : $q(p-1)=p$

إذا : $\frac{p}{p-1}=q$ وبالتالي نجد : $\varphi(b^{\frac{1}{p-1}})=\frac{1}{p}b^q+\frac{1}{q}b^q-b^q=0$

وعليه : $\varphi(a)\geq0$ أي : $\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab\geq0$.

(2) لتكن $f\in L^p(\Omega)$ ، $g\in L^q(\Omega)$.

a) من أجل كل $\alpha>0$ (حسب يونغ) :
$$|f\cdot g|=|\alpha f|\cdot|\tfrac{1}{\alpha}g|\leq\frac{1}{p}|\alpha f|^p+\frac{1}{q}|\tfrac{1}{\alpha}g|^q$$

أي أن :
$$|fg|\leq\frac{\alpha^p}{p}\cdot|f|^p+\frac{\alpha^{-q}}{q}|g|^q$$

وبالتالي :
$$\int_\Omega|fg|\,d\mu\leq\frac{\alpha^p}{p}\int_\Omega|f|^p\,d\mu+\frac{\alpha^{-q}}{q}\int_\Omega|g|^q$$

حسب خاصيتي الترتيب والخطية لتكامل لبيغ .

b) إيجاد القيمة الصغرى للطرف الثاني عندما تتغير α في $]0,+\infty[$.

لتكن الدالة $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+$

$$\varphi(\alpha)=\alpha^p\cdot\frac{A}{p}+\alpha^{-q}\cdot\frac{B}{q}\ ;\quad A=\int_\Omega|f|^p\,d\mu\ ,\quad B=\int_\Omega|g|^q\,d\mu .$$

$$\varphi'(\alpha)=A\cdot\alpha^{p-1}-\frac{B}{\alpha^{q+1}}=\frac{A\,\alpha^{p+q}-B}{\alpha^{q+1}}$$

نفرض $A\neq0$ و $B\neq0$ نجد : $\varphi'(\alpha)=0\Rightarrow\alpha=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{p+q}}$

وعليه تكون أصغر قيمة للطرف الثاني هي :
$$\varphi\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right)=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{p}{p+q}}\cdot\frac{A}{p}+\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{q}{p+q}}\cdot\frac{B}{q}$$

لدينا $p+q=p\cdot q$

$$=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\frac{A}{p}+\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{B}{q}=\frac{B^{\frac{1}{q}}\cdot A^{\frac{1}{p}}}{p}+\frac{A^{\frac{1}{p}}\cdot B^{\frac{1}{q}}}{q}=A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\underbrace{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}_{=1}$$

إذا من (2) ينتج أن :
$$\int_\Omega|fg|\,d\mu\leq\inf\left(\frac{\alpha^p}{p}\int_\Omega|f|^p\,d\mu+\frac{\alpha^{-q}}{q}\int_\Omega|g|^q\,d\mu\right)$$

$$\|f\cdot g\|_1\leq\|f\|_p\cdot\|g\|_q .$$ (متباينة هولدر)

في حالة $A=0$ مثلاً أو $B=0$ نجد الطرفان معدومان

Page 2

التمرين ③ : a) نفرض أن $f \in L^p \cap L^q$ مع $1 \leq p < q$. إذا كان $p < r < q$
فيمكن أن نكتب : $|f(x)|^r = |f(x)|^r \cdot 1_{\{|f| \geq 1\}} + |f(x)|^r \cdot 1_{\{|f| < 1\}}$ ومنه :

$$\int_\Omega |f|^r d\mu = \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^r d\mu + \int_{\{|f|<1\}} |f|^r d\mu \leq \int_\Omega |f|^q d\mu + \int_\Omega |f|^p d\mu$$

$$\|f\|_q + \|f\|_p < \infty$$

ومنه : $f \in L^r$. (لأن: $f \in L^q$ ، $f \in L^p$) (حيث $\{|f| \leq 1\} = \{x \in \Omega / |f(x)| \leq 1\}$

b) لتكن $p \geq 1$ و $f \in L^\infty(\Omega)$ فإذا لدينا : $\exists C > 0, |f(t)| \leq C$ ، μ-p.p

وكذلك $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ μ-p.p ومنه $\int_\Omega |f(t)|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < \infty$ ...

لأن : $\mu(\Omega) < \infty$ (μ قياس منته) ومنه $f \in L^p(\Omega)$

إذا $\bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega) \supset L^\infty(\Omega)$.

من المتباينة : $\int_\Omega |f(t)|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega)$ نجد : $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$

إذا : $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \cdot 1$ ...(1)

من جهة أخرى من أجل كل $\varepsilon > 0$:

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \geq \int_{\{|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}} |f|^p d\mu \geq \int_{\{|f| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p d\mu = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \cdot \mu(|f| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon)$$

(لأن : $\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_{\{|f| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}} |f|^p d\mu + \int_{\{|f| < \|f\|_\infty - \varepsilon\}} |f|^p d\mu$)

ومنه :

$$\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot [\mu(|f| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon)]^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

إذا . $\underset{\varepsilon \to 0}{} \quad \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

c) $f \in L^p$ ، $g \in L^q$ حيث : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \iff \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ ، $p' = \frac{p}{r}$ ، $q' = \frac{q}{r}$

وتطبق متباينة هولدر على الدالتين f^r ، g^r والأساس المترافقان p', q'

$$\int_\Omega |f \cdot g|^r d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^{r \cdot p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^{r \cdot q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^r$$

فأخذ الجذر من الرتبة r من الطرفين نجد المطلوب .

d) $f \in L^r$ سبق اثباتها في a . $\frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} = \frac{1}{r}$ على كتابتها : $\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha r}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{q}{(1-\alpha) r}\right)} = 1$ ، $= p'$ ، $= q'$

نطبق متباينة هولدر على الدالتين $f^{\alpha r}$ ، $f^{(1-\alpha) r}$ ونستخدم الاسس المترافقين p', q' .

وبصفة عامة: إذا كان القياس μ منتهيا أي $\mu(\Omega)<\infty$ فإن

$1\le q<2<p\le\infty \Rightarrow L^\infty\subset L^p\subset L^2\subset L^q\subset L^1$.

تمرين ③ ① الدالة: $f_\alpha: x\mapsto \frac{1}{(1+\|x\|^2)^\alpha}$ تنتمي إلى L^p إذا تحقق: $\int_{\mathbb{R}^n}|f_\alpha|^p\,dx<\infty$

باستخدام خاصية الدوال المتناظرة كرويا نجد $\int_{\mathbb{R}^n}|f_\alpha(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(1+\|x\|^2)^{\alpha p}} =$

$n\,\mu(\bar{B}(0,1))\cdot\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\alpha p}}\,dr$. $\left[\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\alpha p}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{r^{n-1}}{(r^2)^{\alpha p}} = \frac{1}{r^{2\alpha p-n+1}}\right.$ عند $\left.+\infty\right]$

وبما أن التكامل $\int_0^{+\infty}\frac{dr}{r^{2\alpha p-n+1}}$ متقارب عند $+\infty$ إذا تحقق: $2\alpha p-n+1>1$ (تكامل ريما

إذا: $f_\alpha\in L^p \Longrightarrow 2\alpha p-n>0 \Rightarrow \alpha>\frac{n}{2p}$.

بنفس الطريقة نجد: $g_\beta\in L^p \Longrightarrow p\beta<n \Rightarrow \beta<\frac{n}{p}$.

② لتكن $1\le p<q$. نلاحظ أن: $\frac{1}{2q}<\frac{1}{p+q}<\frac{1}{2p}$

. من أجل $\alpha=\frac{n}{p+q}$ الدالة $f_\alpha: x\mapsto\frac{1}{(1+\|x\|^2)^\alpha}$ تنتمي إلى L^q لأن $\alpha=\frac{n}{p+q}>\frac{n}{2q}$

والدالة نفسها لا تنتمي إلى L^p لأن $\alpha=\frac{n}{p+q}<\frac{n}{2p}$.

. من أجل $\beta=\frac{2n}{p+q}$ نلاحظ أن $\frac{n}{q}<\beta<\frac{n}{p}$ ومنه حسبما سبق

$g_\beta: x\mapsto\frac{1}{\|x\|^\beta}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ تنتمي إلى L^p ولا تنتمي إلى L^q .

③ ليكن: $1\le p<q<\infty$. لتكن (f_n) متتالية كوشي من $L^p\cap L^q$ بالنسبة للنظيم $\|f_n\|_{p,q}=\|f_n\|_p+\|f_n\|_q$

بما أن: $\|f_n\|_p\le\|f_n\|_{p,q}$ و $\|f_n\|_q\le\|f_n\|_{p,q}$ فإن (f_n) متتالية كوشي بالنسـ

لكل من $\|\cdot\|_p$ ، $\|\cdot\|_q$ وبما أن L^p ، L^q فضاءات باناخ فإنه $f_n\xrightarrow{L^p} f$ ، $f_n\xrightarrow{L^q} g$

ومنه توجد متتاليتان مستخرجتان من (f_n) الأولى متقاربة أينما كان تقريبا نحو f والثانية نحو

وبالتالي: $f=g$ $\mu.pp$ أي أن (f_n) متقاربة نحو $f=g$ من

$L^p\cap L^q$.