Chapitre II : Algèbre de Boole et simplification des fonctions logiques

1. Définitions

Dans l'algèbre de commutation, une variable ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeur possible. Une telle variable est dite **variable logique**, **variable binaire**, ou **variable booléenne**. De même, une fonction de *n* variables logiques ne peut prendre comme valeur que 0 ou 1. Elle est dite **fonction logique**, **fonction binaire**, ou **fonction booléenne**.

2. Table de vérité d'une fonction logique

C'est une table donnant l'état logique de la fonction pour chacune des combinaisons des états de ses variables. Une fonction de *n* variables est représentée par une table de vérité à n+1 colonnes et au plus 2^n lignes. Le tableau 2.1 donne la forme générale d'une fonction de deux variables logiques.

A	B	F(A,B)
0	0	F(0,0)
0	1	F(0,1)
1	0	F(1,0)
1	1	F(1,1)

Tableau 1 : forme générale de la table de vérité d'une fonction de deux variables logiques

3. Les fonctions logiques

3.1 Operateurs de base

Trois fonctions suffisent pour définir une algèbre de Boole : la **complémentation**, le **produit logique,** et l'**addition logique**. Le tableau suivant présente les trois opérateurs logiques élémentaires :

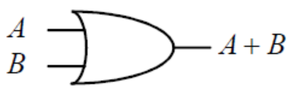
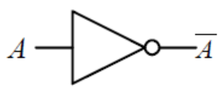
<table>
<tr><th rowspan="2">Opération logique</th><th>Addition</th><th>Multiplication</th><th>Inversion</th></tr>
<tr><th>OU</th><th>ET</th><th>NON</th></tr>
<tr><td>Notation Algébrique</td><td>A OU B=A+B</td><td>A ET B=A.B</td><td>Non A=$\overline{A}$</td></tr>
<tr><td>Table de vérité</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A+B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A.B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><th>A</th><th>NON A</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Symbole Logique</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 2 : opérateurs logiques élémentaires

3.2 Propriétés des fonctions NON, ET, et OU

OU	ET	Commentaires
A+A =A	**A.A =A**	**Idempotence**
A+1 =1	**A.0 =0**	**Elément absorbant**
A+0 =A	**A.1 =A**	**Elément Neutre**
A+$\overline{A}$ =1	**A.$\overline{A}$ =0**	**Complément**
$\overline{\overline{A}}$=A		**inversion**
A+B=B+A	**A.B=B.A**	**Commutativité**
A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C	**A.(B.C)=(A.B).C=A.B.C**	**Associativité**
A+B.C=(A+B).(A+C)	**A.(B+C)=(A.B)+(A.C)**	**Distributivité**

Tableau 3 : propriétés des fonctions logiques élémentaires

Théorème de De Morgan

$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$

$\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$

3.3 Operateurs secondaires

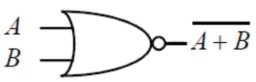
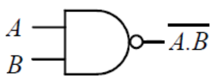
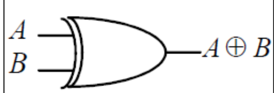
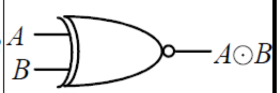
Opération logique	**NON OU** **NOR**	**NON ET** **NAND**	**OU exclusif** **XOR**	**ET inclusif** **XNOR**
Notation Algébrique	$\overline{A+B}$	$\overline{A.B}$	A⊕B	A⊙B
Table de vérité	A B $\overline{A+B}$ 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	A B $\overline{A.B}$ 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	A B A⊕B 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0	A B A⊙B 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1
Symbole Logique				

Tableau 4 : opérateurs logiques secondaires

4. Représentation des fonctions logiques

En peut représenter une fonction logique de trois façons :

- Représentation algébrique
- Table de vérité
- Circuit logique

4.1 Définitions :

Monôme : Produit de variables sous forme simple ou complémentées.

Polynôme : Somme de monômes.

Ex : (Z = $A + \overline{B} + C + D.E$) Polynôme de 4 monômes de 1 et 2 variables.

Soit « F » une fonction logique de ‘n’ variables :

On appelle « minterme » de ‘n’ variables, l’un des produits de ces variables ou de leurs complémentaires.
On appelle « maxterme » de ‘n’ variables, l’une des sommes de ces variables ou de leurs complémentaires.
Exemple : n=4 variables {A B C D} :

m = $A.\overline{B}.C.D$	est un minterme	M = $A+B+\overline{C}+\overline{D}$	est un maxterme
m = $\overline{A}.B.\overline{C}.D$	est un autre minterme	M = $A+\overline{B}+C+D$	est un autre maxterme
m = $A.\overline{B}.C$	n’est pas un minterme	M = $\overline{A}+B+C$	n’est pas un maxterme

4.2 Formes canoniques disjonctives

Ecrire la fonction logique ‘F’ sous forme canonique disjonctive (ou première forme canonique) revient à l’écrire comme la somme de mintermes des ‘n’ variables.

4.3 Formes canoniques conjonctives

Ecrire la fonction logique ‘F’ sous forme canonique conjonctive (ou deuxième forme canonique) revient à l’écrire comme le produit de maxtermes des ‘n’ variables.
Exemple :

Considérons la table de vérité de la fonction booléenne F de 3 variables A, B, et C, définie par le tableau suivant.

A	B	C	numéro de la combinaison	F(A,B,C)	$\overline{\text{F}(A,B,C)}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	2	0	1
0	1	1	3	0	1
1	0	0	4	1	0
1	0	1	5	1	0
1	1	0	6	1	0
1	1	1	7	0	1

Tableau 5 : table de vérité d’une fonction booléenne F de 3 variables

On peut extraire une expression de F en exprimant les combinaisons des variables *A*, *B*, et *C* pour les quelles F est égale à 1: F vaut 1 pour les combinaisons 0, 1, 4, 5, et 6, c’est-à-dire si $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$=1, $\overline{A}.\overline{B}.C$=1, $A.\overline{B}.\overline{C}$=1, $A.\overline{B}.C$=1, ou $A.B.\overline{C}$=1. La fonction F peut donc s’écrire sous la forme :

$$F(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C}$$

L’expression obtenue est une somme logique de produits logiques, il s’agit d’une **forme canonique disjonctive**, encore appelée **forme ΣΠ**.

On peut extraire une seconde expression de F en exprimant les combinaisons des variables *A*, *B*, et *C* pour les quelles F est égale à 0. Ce qui peut encore s’écrire :

$$F(A, B, C) = (A + \overline{B} + C).\ (A + \overline{B} + \overline{C}).\ (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

Cette nouvelle expression a une forme duale de la précédente. C’est un produit logique de sommes logiques, il s’agit d’une **forme canonique conjonctive** ou **forme ΠΣ**.

Remarque : deux fonctions logiques sont égales si et seulement si leurs tables de vérité ou leurs formes canoniques sont identiques.

4.4 Détermination des formes canoniques algébriquement

On se concentrera sur les formes canoniques disjonctives, le cas conjonctif étant semblable.
Il s'agit de faire apparaitre les « variables » manquantes dans chaque monôme.

Exemple :

Pour 3 variables a, b et c, on aura

$$A.\overline{B} = A.\overline{B}.\ (C + \overline{C}) = A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C}$$

Pour 4 variables a, b, c, et d, on aura

$$\begin{aligned} A.\overline{B} &= A.\overline{B}.(C + \overline{C}) = A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} \\ &= A.\overline{B}.C.(D + \overline{D}) + A.\overline{B}.\overline{C}.(D + \overline{D}) \\ &= A.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.D + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} \end{aligned}$$

5. Universalité des portes NAND et NOR :

On peut utiliser les portes NAND et NOR pour créer toutes les portes logiques de base comme suit :

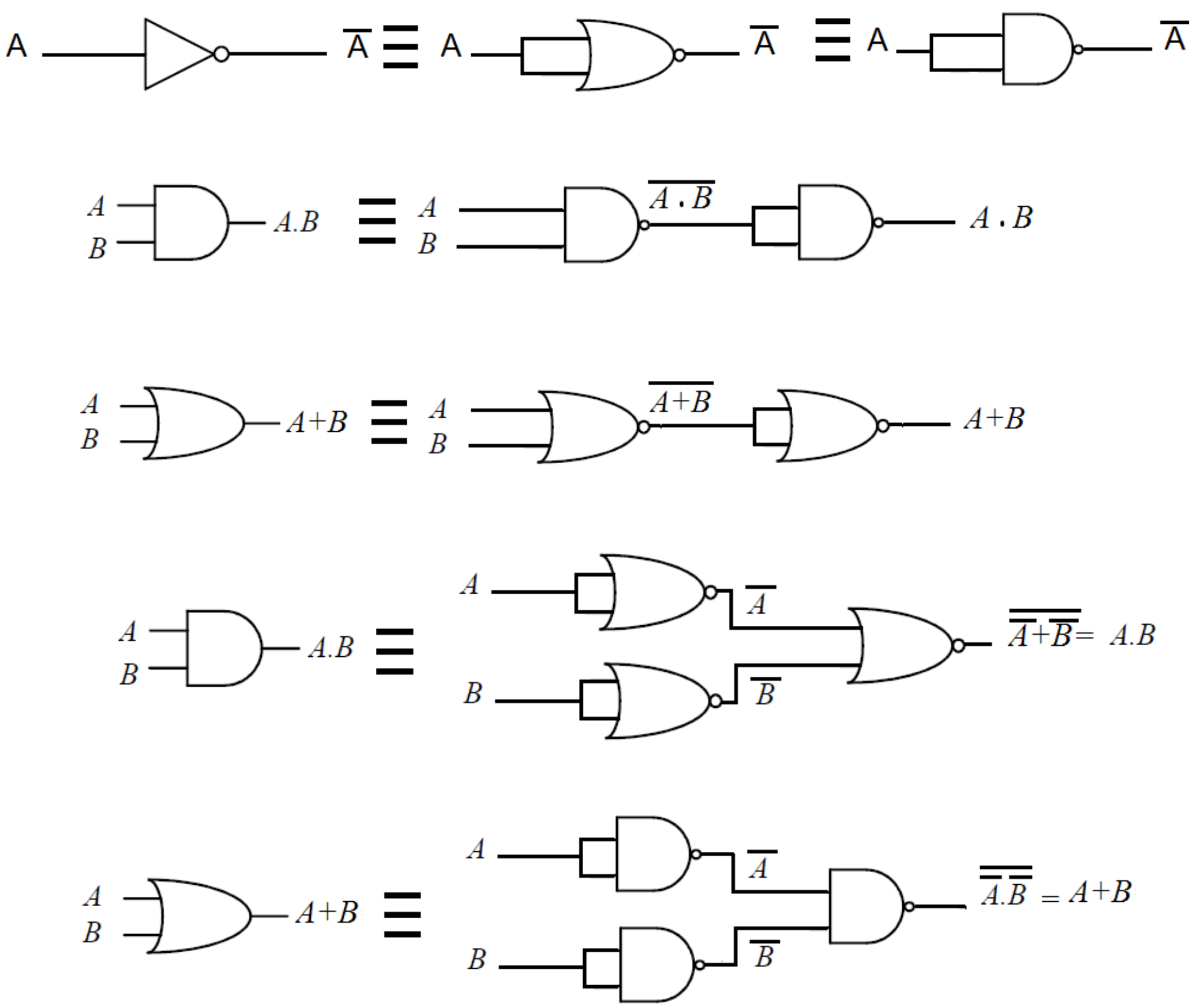


Figure 1 : représentation des portes logiques de base par les portes NAND et NOR

6. Simplification des fonctions logiques :

Simplifier une fonction logique consiste à rechercher la forme minimale d'une fonction c'est-à-dire avoir un nombre minimal de monômes et un nombre minimal de variables par monôme. Il y a plusieurs méthodes de simplifications mais nous allons nous concentrer sur **la simplification algébrique** et par **la table de Karnaugh**.

6.1 Simplification algébrique des fonctions logiques :

Elle consiste à appliquer les propriétés de l'algèbre de Boole (cf. §3.2) aux expressions algébriques des fonctions logiques. Mais il n'y a pas une démarche bien spécifique, l'application de cette méthode demande un peu d'entraînement.

Relations de simplification les plus utilisé (*se déduisant des propriétés des opérateurs de bases*) :

$A+A.B=A$	$A\,.\,(\overline{A}+B)=A.B$
$A.\,(A+B)=A$	$(A+B).\,(\overline{A}+B)=B$
$A+\overline{A}.B=A+B$	$(A.B)+(\overline{A}.B)=B$

Nous allons traiter quelques exemples qui permettront de passer en revue la plupart des astuces utilisées pour mener à bien les simplifications.

Exemple 1 : simplification de : $F_1 = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}CD$.

$ABC + AB\overline{C} = AB$, donc $F_1 = AB+A\overline{B}CD$,

$A(B+\overline{B}CD)=A(B+\overline{B}.(CD))=A(B+CD)$

d'où $\mathbf{F_1 = AB+ACD}$.

Exemple 2 : simplification de : $F_2 = ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$.

En peut rajouter un terme déjà existant à une expression

$$F_2= ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}+ABC$$

d'où $\mathbf{F_2 = BC+AC+AB}$.

Exemple 3 : simplification de : $F_3 = AB+\overline{B}C + AC$.

Il est possible de supprimer un terme superflu (un terme en plus), c'est-à-dire déjà inclus dans la réunion des autres termes.

$$F_3 = AB+\overline{B}C + AC.(B+\overline{B}).$$

$$= AB+\overline{B}C + ACB+AC\overline{B}$$

$$=AB(1+C)+\overline{B}C(1+A)$$

D'où $\mathbf{F_2 = AB+\overline{B}C}$.

<u>Remarque :</u> Il est préférable de simplifier la forme canonique ayant le nombre de termes minimum.

Les méthodes algébriques de simplification présentent un inconvénient majeur : elles ne sont pas systématiques, et leur efficacité dépend donc largement du savoir-faire de la personne qui les applique. Elles ne peuvent, par conséquent, être utilisées que ponctuellement sur des cas simples.

6.2 Simplification par diagramme de Karnaugh

Les diagrammes de Karnaugh est une méthode graphique pour simplifier les fonctions booléennes comportant un nombre modère de variables. Chaque case du tableau correspond à un des mintermes. Une case du tableau ne diffère de l'une de ces voisines que par une variable (on utilise le code de Gray).

- <u>Les termes adjacents</u>

Deux termes sont dits **logiquement adjacents** s'ils ne diffèrent que par une variable.

Par exemple ces termes sont adjacents : $AB+\bar{A}B=B$

$A\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}CD=A\bar{B}D$

Ces termes ne sont pas adjacents : $AB+\overline{AB}$

$\overline{AB}\bar{C}D+ABCD$

Un diagramme de Karnaugh est une table de vérité disposée de telle sorte que tous les termes logiquement adjacents soient également géométriquement adjacents, afin de mettre visuellement en évidence les simplifications possibles.

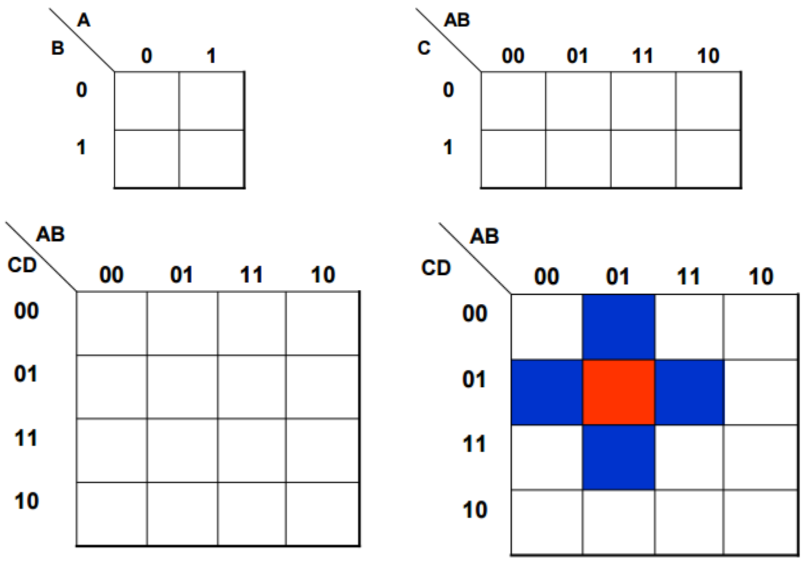
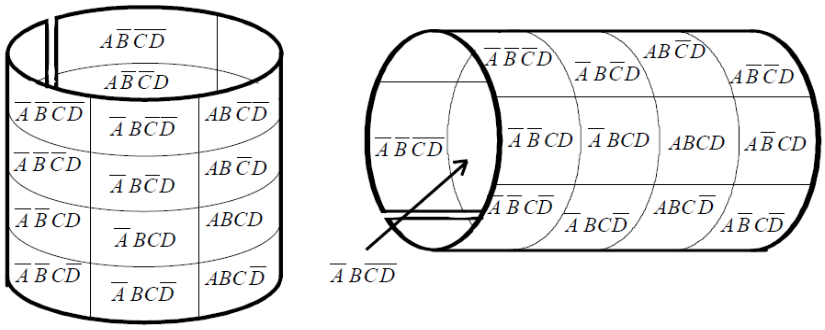


Figure 2 : Table de karnaugt pour 2, 3 et 4 variables, Les quatre cases blues sont des cases adjacentes à la case rouge.

Dans un diagramme de Karnaugh, chaque case représente un minterme, et pour une fonction de 'n' variables, chaque case est adjacente à « n » autres cases, représentant les « n » mintermes adjacents. Deux cases situées aux extrémités d'une même ligne ou d'une même colonne sont adjacentes.



(a) (b)

Figure 3 : Représentations cylindriques d'un diagramme de Karnaugh à quatre variables
(a) mise en évidence des adjacences entre lignes, (b) mise en évidence des adjacences entre colonnes

Lors du remplissage du diagramme, la valeur logique 1 est inscrite dans les cases correspondant aux mintermes présents dans l'expression de la fonction, puis le tableau est complété par des 0.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

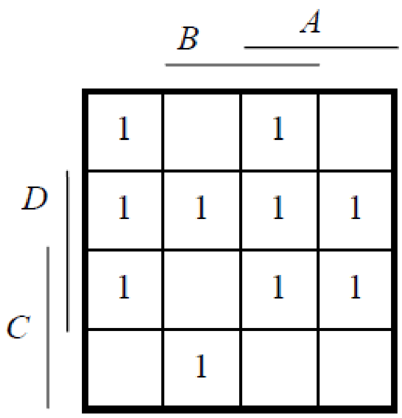
Figure 4 : Passage de la table de vérité à la table de Karnaugh

Pour obtenir une expression simplifiée minimale on doit :

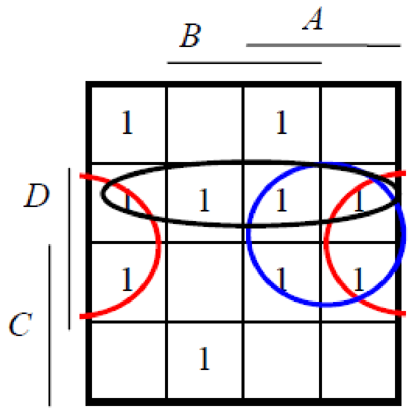
- Repère les cases adjacentes contenant un 1 et on les regroupe par paquets de 2^n (rassembler les termes adjacents).
- Un regroupement par 2^n correspond à l'élimination de '*n'* variables.
- Il faut éliminer les variables intervenant à la fois sous forme directe et sous forme complémentée.
- Il faut inclure tous les 1 du tableau dans des groupements.
- Essayer de minimiser le nombre de groupements afin de minimiser le nombre de termes dans l'expression de la fonction.
- Les groupements de 1 doivent être les plus grands possibles (minimisation du nombre de variables).
- L'expression logique finale est la somme des groupements après simplification et élimination des variables qui changent d'état.

Exemple : Simplification de

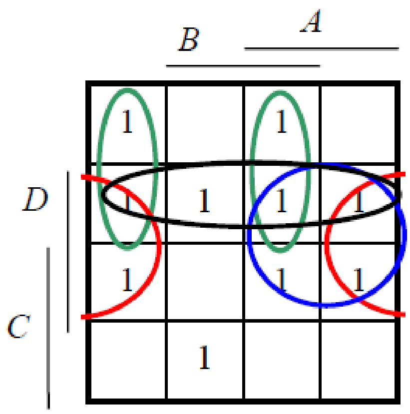
F = $\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$ +$A.B.\bar{C}.\bar{D}$ +$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D$+$\bar{A}.B.\bar{C}.D$+$A.B.\bar{C}.D$+$A.\bar{B}.\bar{C}.D$+$\bar{A}.\bar{B}.C.D$+$A.\bar{B}.C.D$+$\bar{A}.B.C.\bar{D}$+ $A.B.C.D$.



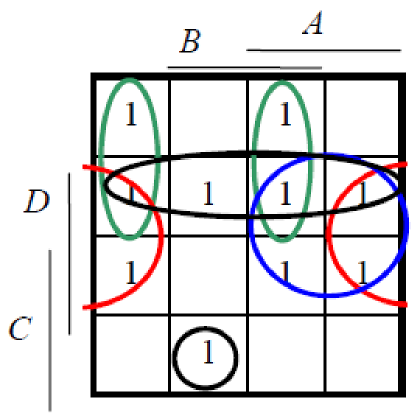
(a) diagramme de Karnaugh de F_1



(b) identification des groupes de taille 4



(c) identification des groupes de taille 2



(d) identification des cases isolées

Après regroupement des 1 suivant les règles définies précédemment, on obtient la forme simplifiée suivante : F1 = $\bar{C}.D + A.D + \bar{B}.D + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C} + \bar{A}.B.C.\bar{D}$