Corrigé la série N°1

Corrigé exercice N°1 :

1) $n \geq \frac{\ln\left[\frac{(b-a)}{2\varepsilon}\right]}{\ln(2)} + 1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left[\frac{(0{,}4-0{,}3)}{2.\ 0{,}005}\right]}{\ln(2)} + 1 = 4{,}32 \Rightarrow n = 5$

2) $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow f(0{,}3).f(0{,}4) < 0 \Rightarrow -0.018 < 0$

n	a_k	b_k	$f(a_k).f(b_k) < 0$	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert \leq \varepsilon$
0	0,3	0,4	-0,018 < 0	0,35	0,35-0 = 0,35 > 0,005
1	0,3	0,35	-0,0037 < 0	0,325	0.025 > 0,005
2	0,325	0,35	-0.0012 < 0	0,3375	0,0125 > 0.005
3	0,3375	0,35	< 0	0,3437	0,0062 > 0.005
4	0,3375	0,3437	< 0	0,3406	0,0031 < 0.005

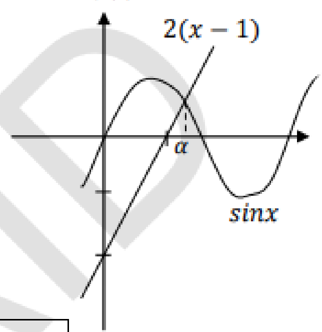
$x_5 = 0{,}3406 \pm 0{,}005$ *est la racine approchée de* α *pour* $f(x) = 0$

Corrigé exercice N°2 :

$f(x) = x - \frac{1}{2}sinx - 1 = 0 \quad ; \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1) $sinx = 2(x-1)$

- $sinx$ et $2(x-1)$ sont des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car leurs limites à ces bornes existes
- $sinx$ et $2(x-1)$ sont des fonctions dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ leurs dérivées existes
- $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \equiv (-1).(0{,}07) < 0$
- Les points d'intersections des 2 courbes nous donne $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$



x

2) Méthode de dichotomie $\varepsilon = 0.1$

a_n	b_n	$F(a_n).f(b_n)$	$\alpha_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$\Delta = \lvert\alpha_n - \alpha_{n-1}\rvert$
0	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{\pi}{4} = 0{,}78$	0,78
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{3\pi}{8} = 1{,}17$	0.39
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{7\pi}{16} = 1{,}37$	0.2
$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{15\pi}{32} = 1{,}47$	0.1

La racine de l'équation $f(x) = 0$ est $\alpha = 1{,}47 \pm 0{,}1$

Corrigé exercice N°3 :

Résoudre avec la méthode de point fixe

1/ $f(x) = x - x^{\frac{4}{5}} - 2 = 0$ et $x_0 = 8$ avec une précision de 10^{-4}

$$g_1(x) = x = x^{\frac{4}{5}} + 2 \text{ ou } g_2(x) = x = (x-2)^{\frac{5}{4}}$$

a/Si on choisit $g_1(x) = x_{n+1} = x_n^{\frac{4}{5}} + 2$:

k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}
0	8,0000	7,2780	9	6,4408	6,4376
1	7,2780	6,8934	10	6,4376	6,4359
2	6,8934	6,6854	11	6,4359	6,4349
3	6,6854	6,5720	12	6,4349	6,4344
4	6,5720	6,5098	13	6,4344	6,4341
5	6,5098	6,4756	14	6,4341	6,4339
6	6,4756	6,4568	15	6,4339	6,4339
7	6,4568	6,4465	16	6,4339	**6,4338**
8	6,4465	6,4408	17	6,4338	**6,4338**

La solution est donc :
$\boxed{x=6,4338}$

b/Si on choisit $g_2(x) = (x-2)^{\frac{5}{4}}$:

k	x_n	x_{n+1}
0	8,0000	9,3905
1	9,3905	12,1855
2	12,1855	18,1961
3	18,1961	32,4909
4	32,4909	71,6494
5	71,6494	201,2086

La fonction $g_2(x)$ ne converge pas ; les valeurs sont croissantes

2/ $f(x) = x - 2x^{\frac{4}{5}} + 2 = 0$ et $x_0 = 1$ avec une précision de 10^{-2} :

$$g_1(x) = x = 2(x^{\frac{4}{5}} - 1) \text{ ou } g_2(x) = x = \left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$$

a/Si on choisit $g_1(x) = x_{n+1} = 2(x_n^{\frac{4}{5}} - 1)$: La solution ne converge pas !

b/On choisit $g_2(x) = x_{n+1} = \left(\frac{x_n+2}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$:

k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}
0	1,00	1,66	8	3,32	3,39	16	3,64	3,66
1	1,66	2,13	9	3,39	3,46	17	3,66	3,67
2	2,13	2,47	10	3,46	3,51	18	3,67	3,68
3	2,47	2,74	11	3,51	3,55	19	3,68	3,68
4	2,74	2,94	12	3,55	3,58	20	3,68	3,69
5	2,94	3,09	13	3,58	3,60	21	3,69	3,70
6	3,09	3,22	14	3,60	3,63	22	**3,70**	**3,70**
7	3,22	3,32	15	3,63	3,64	23	**3,70**	**3,70**

La solution est donc :
$\boxed{x=3,70}$
Avec une précision de 10^{-4} le nombre d'itérations s'élève à **53** est une solution $\boxed{x=3,7161}$

Corrigé exercice N°5 :

$$f(x) = e^x + 2\sqrt{x} - 2 = 0 \quad ; \quad \alpha \in [\,0\,,\ 1\,]$$

a) $f(x)$ admet une solution $\alpha > 0\,;\, \alpha \in [\,0\,,\ 1\,]$

- $f(x)$ est continue sur $[\,0\,,\ 1\,]$ $\quad car\ lim f(x)\ existe$
  $x \to 0\ et\ x \to 1$
- $f(x)$ est dérivable sur $]\,0\,;\,1\,[$ $\quad f'(x) \neq 0$
- $f(0).f(1) < 0$
  $(-1).(e) < 0$

$D'après\ le\ T.V.I\ \ \exists\, \alpha \in \,]\,0\,;\ 1\,[\ \ /\ f(\alpha) = 0$

b) Calcul de la racine approchée de $f(x) = 0$ avec $\varepsilon = 10^{-4}$ par la méthode de newton

Méthode de newton

$X_0 = 1 \quad car \quad f(1).F''(1) > 0$
$\qquad (e).(e - 0.5) > 0$

$$X_k = X_{K-1} - \frac{f(X_{K-1})}{f'(X_{K-1})}$$

$k = 1$

$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{e}{e+1^{-0.5}} = 0.26894 \qquad \Delta = |0.26894 - 1| = 0.73106$

$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = 0.26894 - \frac{f(0.26894)}{f'(0.26894)} = 0.16212 \qquad \Delta = |0.16212 - 0.26894| = 0.10682$

$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} = 0.16212 - \frac{f(0.16212)}{f'(0.16212)} = 0.16723 \qquad \Delta = |0.16723 - 0.16212| = 0.00511$

$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)}{f'(X_3)} = 0.16723 - \frac{f(0.16723)}{f'(0.16723)} = 0.16726 \qquad \Delta = |0.16726 - 0.16723| = 0.00003$

$X_4 = 0.16726 \pm 0.0001$ est la racine approchée de $f(x) = 0$

Corrigé exercice N°6 :

L'algorithme de la méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ critère\ d'arrêt \end{cases}$$

<u>1/ Calcul de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton</u> :

$x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = x_n{}^2 - 2 = 0\ ;\ f'(x_n) = 2x_n$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n{}^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}
0	1,0000	1,5000	2	1,4167	1,4142
1	1,5000	1,4167	3	**1,4142**	**1,4142**

La solution est : $\boxed{\sqrt{2} = 1,4142}$

2/

$f(x) = x - e^{-x^2}, x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + 2xe^{-x^2}$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - e^{-x_n{}^2}}{1 + 2x_n e^{-x_n{}^2}} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

k	x_n	x_{n+1}
0	1,0000	0,6358
1	0,6358	0,6529
2	**0,6529**	**0,6529**

La solution est : $\boxed{x_{sol} = 0,6529}$

- $s=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+\cdots}}}$ $S_0=2$ $\Leftrightarrow$ $s^3=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+\cdots}}=3+s \Rightarrow s^3-s-3=0$

$$\begin{cases} s_0 = 2 \\ s_{n+1} = s_n - \dfrac{f(s_n)}{f'(s_n)} = s_n - \dfrac{{s_n}^3 - s_n - 3}{3{s_n}^2 - 1} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

k	x_n	x_{n+1}		k	x_n	x_{n+1}
0	2,0000	1,7273		2	1,6737	1,6717
1	1,7273	1,6737		3	**1,6717**	**1,6717**

La solution est : $\boxed{\boldsymbol{s = 1,6717}}$

3/ <u>L'algorithme de Newton permettant de calculer la racine de l'équation $x = tg(x+1)$:</u>

$f(x) = x - tg(x+1)=0$ avec $\left(tg(x+1)\right)' = 1 + tg^2(x+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0\ initial \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n - tg(x_n+1)}{tg^2(x_n+1)} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

4/ $x_0 = 3{,}4$

k	x_n	x_{n+1}
0	3,4000	3,4317
1	3,4317	3,4286
2	**3,4286**	**3,4286**

La solution est : $\boxed{\boldsymbol{x_{sol} = 3,4286}}$

5/ En déduire une racine de l'équation $xtg\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 = 0$

$xtg\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow tg\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow tg(1+S) = S$ avec $s = \frac{1}{x_{sol}} = \frac{1}{3{,}4286} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{s = 0,2917}}$

Corrigé la série N°2

Corrigé exercice N°1 :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

a) Le polynome d' interpolationde Lagrange aux points $x_0 = 1$; $x_1 = 8$; $x_2 = 27$

$f(x_0) = f(1) = 1$
$f(x_1) = f(8) = 2$
$f(x_2) = f(27) = 3$

$P_2(x) = \sum_{i=0}^{i=2} f(x_i)L_i(x) = L_0(x) + 2L_1(x) + 3L_2(x)$

$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-8)(x-27)}{(-7)(-26)} = \frac{1}{182}x^2 - \frac{5}{26}x + \frac{108}{91}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-27)}{(7)(-19)} = -\frac{1}{133}x^2 + \frac{4}{19}x - \frac{27}{133}$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-8)}{(26)(19)} = \frac{1}{494}x^2 - \frac{9}{494}x + \frac{4}{247}$

$P_2(x) = (\frac{1}{182}x^2 - \frac{5}{26}x + \frac{108}{91}) + 2(-\frac{1}{133}{}^2 + \frac{4}{19}x - \frac{27}{133}) + 3(\frac{1}{494}x^2 - \frac{9}{494}x + \frac{4}{247})$

$\boxed{P_2(x) = -\frac{6}{1729}x^2 + \frac{43}{247}x + \frac{1434}{1729}}$

b) Le Polynome d'interpolation de Newton

$P_2(x) = \delta_0 + (x - x_0)\,\delta_1 + (x - x_0)\,(x - x_1)\,\delta_2$
$P_2(x) = \delta_0 + (x - 1)\,\delta_1 + (x - 1)\,(x - 8)\,\delta_2$

δ_i :les differences divisées: $\delta_i = \frac{f(x_i) \; - \; f(x_{i-1})}{x_i \; - \; x_{i-1}}$

x_i	$f(x_i)$	δ_i	
1	$\boxed{1}$		
8	2	$\frac{2-1}{8-1} = \boxed{\frac{1}{7}}$	
27	3	$\frac{3-2}{27-8} = \frac{1}{19}$	$\frac{\frac{1}{19} \; - \; \frac{1}{7}}{27 \; - \; 1} = \boxed{-\frac{6}{1729}}$

$\delta_0 = f(x_0) = 1$
$\delta_1 = \frac{1}{7}$
$\delta_2 = -\frac{6}{1729}$

$P_2(x) = 1 + (x - 1)\,\frac{1}{7} + (x - 1)\,(x - 8)\,(-\frac{6}{1729}) = -\frac{6}{1729}x^2 + \frac{43}{247}x + \frac{1434}{1729}$

$\boxed{P_2(x) = -\frac{6}{1729}x^2 + \frac{43}{247}x + \frac{1434}{1729}}$

c) Valeur approchée de $\sqrt[3]{20}$

$\sqrt[3]{20} = 2.714\,417\,617$

d) Erreur exact ε_p commise sur le polynome au point $x = 20$

$\varepsilon_p = |\; f(x_p) - P_2(x_p)|$

$f(x_p) = f(20) = 2.714\,417\,617$

$P_2(20) = 2.923\,076\,923$

$$\boxed{\varepsilon_p = 0.208\,659\,306}$$

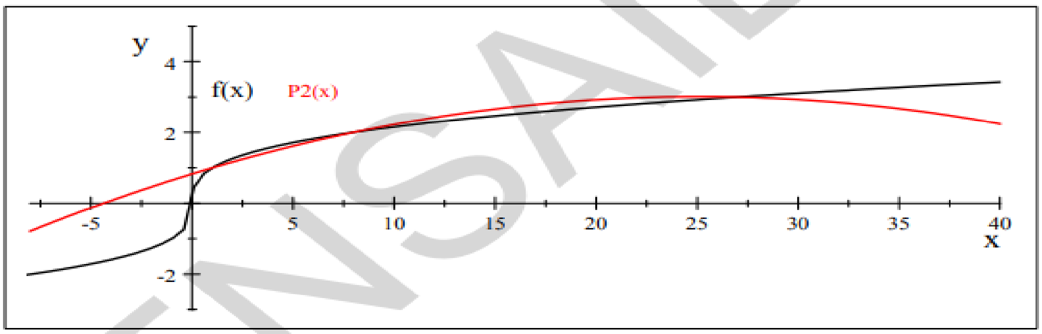
L'erreur d'interpolation théorique $\varepsilon_{théo}$ au point $x = 20$

$$\varepsilon_{théo} = \frac{\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{i=2}\left|(x - x_i)\right| = \frac{\max\left|f^{(3)}(x)\right|}{(3)!}\,|20-1|\,|20-8|\,|20-27|$$

$$\max\left|\begin{array}{c} f^{(3)}(x) \\ x \in [1\ ,\ 27] \end{array}\right| = \max\left|\begin{array}{c} \frac{10}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} \\ x \in [1\ ,\ 27] \end{array}\right| = \frac{10}{27}$$

$$\boxed{\varepsilon_{théo} = 98.\,518\,518\,52}$$

$effectivement$ $\varepsilon_p < \varepsilon_{théo}$ le polynome d'interpolation reste valable au point $x = 20$



Corrigé exercice N°2 :

le polynôme d' interpolationde Lagrange aux points : (-1 , -1) , (0 , 1) , (1 ,0) , (2 , 0).

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} f(x_i)L_i(x) = -L_0(x) + L_1(x) + 0.L_2(x) + 0.L_3(x)$$

$$P_3(x) = -L_0(x) + L_1(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$P_3(x) = -\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + 1}$$

les différences finies en ces points : $\triangle^n(y_i)$

$\triangle^0(y_i) = f(x_0) = \boxed{-1}$

y_i	$\triangle^1$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
-1	$1-(-1) = \boxed{2}$	$-1-2 = \boxed{-3}$	$1-(-3) = \boxed{4}$
1	$0-1 = -1$	$0-(-1) = 1$	
0	$0-0 = 0$		
0			

le polynôme d'interpolation de Newton par les differences finies

$h = x_i - x_{i-1} = 0-(-1) = 1-0 = 2-1 = 1$: ce polynome est applicable

$$P_3(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta^1(y_i)}{1!h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2(y_i)}{2!h^2} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta^3(y_i)}{3!h^3}$$

$$P_3(x) = -1 + (x+1)\,2 + (x+1)(x)\,\frac{-3}{2} + (x+1)(x)(x-1)\,\frac{4}{6}$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + 1}$$

Corrigé exercice N°3 :

1- f et g on le même polynôme d'interpolation en ces points

$$f(x_0) = g(x_0) \iff f(1) = g(1) = 0$$
$$f(x_1) = g(x_1) \iff f(\tfrac{3}{2}) = g(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f(x_2) = g(x_2) \iff f(2) = g(2) = 1$$

par consequent f et g ont le meme polynome d'intepolation en ces points

2- Le polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{i=2} f(x_i)L_i(x) = 0.L_0(x) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}L_1(x) + L_2(x)$$
$$P_2(x) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}L_1(x) + L_2(x)$$
$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})} = -4x^2 + 12x - 8$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2})} = 2x^2 - 5x + 3$$

$$P_2(x) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-4x^2 + 12x - 8\right) + \left(2x^2 - 5x + 3\right)$$
$$\boxed{P_2(x) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)x^2 + \left(6\sqrt{2} - 5\right)x - 4\sqrt{2} + 3}$$

3- le polynôme d'interpolation de Newton par les differences finies

$$h = x_i - x_{i-1} = 2 - (\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{1}{2} = C^{te}$$
$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1(y_i)}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2(y_i)}{2!h^2}$$
$$P_3(x) = 0 + (x - 1)\frac{\Delta^1(y_i)}{1!\frac{1}{2}} + (x - 1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\frac{\Delta^2(y_i)}{2!\frac{1}{4}}$$

les différences finies en ces points : $\triangle^n(y_i)$

$$\triangle^0(y_i) = f(x_0) = \boxed{0}$$

y_i	$\triangle^1$	$\triangle^2$
0	$\frac{\sqrt{2}}{2} - (0) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{2-2\sqrt{2}}{2}}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$	
1		

$$P_3(x) = 2(x - 1)\tfrac{\sqrt{2}}{2} + 2(x - 1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\tfrac{2-2\sqrt{2}}{2}$$
$$\boxed{P_3(x) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)x^2 + \left(6\sqrt{2} - 5\right)x - 4\sqrt{2} + 3}$$

2eme méthode

le polynôme d'interpolation de Newton par les differences divisées

$$P_2(x) = \delta_0 + (x - x_0)\,\delta_1 + (x - x_0)(x - x_1)\,\delta_2$$
$$P_2(x) = \delta_0 + (x - 1)\,\delta_1 + (x - 1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\delta_2$$

δ_i :les differences divisées: $\delta_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

x_i	$f(x_i)$	δ_i	
1	$\boxed{0}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{\frac{3}{2}-1} = \boxed{\sqrt{2}}$	$\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-1} = \boxed{2-2\sqrt{2}}$
2	1	$\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 2-\sqrt{2}$	

$$P_2(x) = \delta_0 + (x - 1)\,\delta_1 + (x - 1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\delta_2 = (x - 1)\sqrt{2} + (x - 1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)\left(2 - 2\sqrt{2}\right)$$
$$\boxed{P_2(x) = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)x^2 + \left(6\sqrt{2} - 5\right)x - 4\sqrt{2} + 3}$$