Chapitre III : Résolution des équations non linéaires $f(x)=0$

1/ Introduction :

La résolution des systèmes non-linéaires s'avère plus délical contrairement aux systèmes linéaires. En général, il n'est pas possible de garantir toujours la convergence vers la solution exacte (correcte)

si au moins une équation est non-linéaire, le système sera dit non-linéaire.

Les techniques les plus utilisées pour résoudre les systèmes d'équations non-linéaires sont :

* Méthode du Point fixe
* Méthode de Newton
* Méthode de Minimisation

2/ Equation à une variable

2.1/ Equation polynômiale :

Le théorème d'Alembert affirme que l'équation algébrique $f(x)=0$ où $f(x)$ est un polynôme de degré "n" admet "n" racines distinctes ou non, réelles ou complexes.

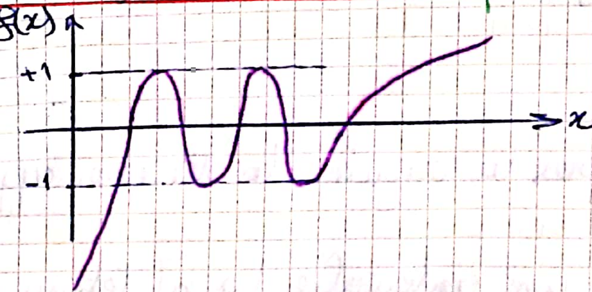
Degré 2 : $x^2 - Px + q = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta = \\ x_1 = \\ x_2 = \end{cases}$

Degré 3 : $x^3 - ax^2 + bx \rightarrow$ résolution analytique existe.

Degré $\geq 5 \rightarrow$ Complexe, voir impossible analytiquement.

Dans ce cas là, il faut se recourir aux méthodes numériques

2.2/ Difficultés liées à l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des équations non-linéaires



$f(x)$ admet plusieurs solutions

* Comment obtenir toutes les solutions?
* Quelle est la bonne solution

a/ Principe de recherche de "zéro" : $f(x)=0$

- Toute recherche de "0" démarre avec une solution initiale qui sera améliorée dans les itérations suivantes et qui devrait s'approcher de la solution exacte "finale"
- Le choix du point de départ détermine vers quelle solution on se dirige.
- Il faut définir un critère d'arrêt.
- Il convient de substituer la solution dans l'équation et vérifier $f(x_{sol}=0)$

2.3/ Méthode de bissection "Dichotomie"

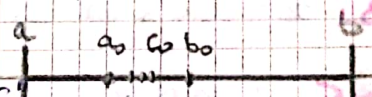
a/ Théorème des valeurs intermédiaires

si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b)<0$ alors, il existe au moins un point $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$
si, en plus cette fonction est strictement monotone sur $[a,b]$ la racine est unique dans $[a,b]$

c'est une fonction qui reste tjs soit croissante, soit décroissante (son sens de variation est cst)

b/ Méthode de dichotomie

C'est un procédé systématique de raffinement de la localisation d'une racine. Le mot dichotomie (dicho = deux ; tomie = coupe) exprime clairement le principe de la méthode:
soit $[a,b]$ un intervalle initial de localisation de la racine recherchée's



Supposons que l'on ait $f(a).f(b)<0$. On réduit à chaque pas l'amplitude de la localisation d'un facteur de "2". L'erreur est donc réduite d'un facteur de "2" à chaque itération. En 20 itérations, par exemple, l'erreur sera "10^{-6}" fois l'erreur initiale.

C'est une méthode lente mais qui converge dans tous les cas.

Exemple

Calculer avec 4 chiffres après la virgule, la racine approchée de l'équation $f(x)=x^3+x-1=0$

Solution : Il faut choisir un intervalle $[a,b]$ tel que :
$f(a).f(b)<0$

Exemple : $f(0) \times f(1) = (-1)(1) = -1 < 0$

On prend $[a,b] = [0, 1]$

- la fonction f est continue dans cet intervalle, elle est aussi monotone, ce qui donne une racine unique.

1ère itération :

$$m = \frac{0+1}{2} = 0{,}5 \text{ donc on a } f(0{,}5) \cdot f(0) = (-0{,}375)(-1) = 0{,}375 > 0$$

La racine n'est pas dans cet intervalle

$f(0{,}5) \cdot f(1) = -0{,}375 < 0 \Rightarrow$ la racine se trouve dans $[0{,}5, 1]$

2ème itération

$$m = \frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75 \Rightarrow \underbrace{f(0{,}75)}_{0{,}1718} \cdot \underbrace{f(0{,}5)}_{-0{,}375} < 0 \Rightarrow$$ la racine se trouve dans l'intervalle $[0{,}5, 0{,}75]$

- 3ème itération

$$m = \frac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625 \Rightarrow f(0{,}625) \cdot f(0{,}5) = -0{,}1308(-0{,}375) = 0{,}05 > 0$$

$$f(0{,}625) \times f(0{,}75) = -0{,}0225 < 0 \Rightarrow [0{,}625, 0{,}75]$$

On continue jusqu'à ce que la valeur de m devienne inchangée (à 4 chiffres après la virgule)

$m_1 = 0{,}5 \rightarrow m_2 = 0{,}75 \rightarrow m_3 = 0{,}625 \rightarrow m_4 = 0{,}6875 \rightarrow m_5 = 0{,}6563 \rightarrow m_6 = 0{,}6719$
$m_7 = 0{,}6797 \rightarrow m_8 = 0{,}6836 \rightarrow m_9 = 0{,}6816 \rightarrow m_{10} = 0{,}6826 \rightarrow m_{11} = 0{,}6821 \rightarrow$
$m_{12} = 0{,}6824 \rightarrow m_{13} = 0{,}6823 \rightarrow m_{14} = 0{,}6823$

finalement pour une précision à 4 chiffres après la virgule, il a fallu 14 itérations.

2.4/ Méthode du point fixe

Soit une fonction $f(x) = 0$, on isole un terme contenant x de la sorte à pouvoir écrire $x = g(x)$

On appelle la fonction $g(x)$; la fonction d'itération. L'algorithme s'écrit

$$\begin{cases} * \ x_0 \text{ donnée ; initialisation} \\ * \ x_{new} = g(x_{old}) \\ * \ \text{Critère d'arrêt} \end{cases}$$

- Le fait que la solution x_{sol} vérifie $x_{sol} = g(x_{sol})$, fait qu'on appelle x_{sol} : un point fixe. Le choix de $g(x)$ est déterminant pour la convergence.

Exemples

$f(x) = x^3+x-1$, On doit l'écrire sous la forme $g(x)=x$

$x=-x^3+1$; $x=\sqrt[3]{1-x}$; $x = \dfrac{1}{x^2+1}$

• Si on choisit $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

La racine se trouve dans l'intervalle $[0,1]$; on peut prendre comme solution initiale $x_0=0,5$

$$\begin{cases} x_0 = 0{,}5 \\ x_{n+1} = g(x_n) = \dfrac{1}{x_n^2+1} \\ \text{Critère d'arrêt : 4 chiffres après la virgule.} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{(0{,}5)^2+1} = 0{,}8 \rightarrow x_2 = \dfrac{1}{(0{,}8)^2+1} = 0{,}6098 \rightarrow x_3 = \dfrac{1}{(0{,}6098)^2+1} = 0{,}7290$

$x_4 = 0{,}6530 \rightarrow x_5 = 0{,}7010 \rightarrow x_6 = 0{,}6705 \rightarrow x_7 = 0{,}6898 \rightarrow x_8 = 0{,}6775$

$x_9 = 0{,}6854 \rightarrow x_{10} = 0{,}6804 \rightarrow x_{11} = 0{,}6836 \rightarrow x_{12} = 0{,}6815 \rightarrow x_{13} = 0{,}6828$

$x_{13} = 0{,}6820 \rightarrow x_{14} = 0{,}6825 \rightarrow x_{15} = 0{,}6822 \rightarrow x_{16} = 0{,}6824 \rightarrow x_{17} = 0{,}6823$

$x_{18} = 0{,}6824 \rightarrow x_{19} = 0{,}6823 \rightarrow x_{20} = 0{,}6823$

La méthode du point fixe est lente par rapport à la dichotomie.

• Si on choisit $g(x) = \sqrt[3]{1-x_n}$

$x_0 = 0{,}5$

$x_{n+1} = \sqrt[3]{1-x_n}$

Critère d'arrêt : 4 chiffres après la virgule.

$x_1 = 0{,}7937 \rightarrow x_2 = 0{,}5909 \rightarrow x_3 = 0{,}7423 \rightarrow x_4 = 0{,}6363 \rightarrow x_5 = 0{,}7138$

$x_6 = 0{,}6590 \rightarrow x_7 = 0{,}6986 \rightarrow x_8 = 0{,}6704 \rightarrow x_9 = 0{,}6907 \rightarrow x_{10} = 0{,}6762$

$x_{11} = 0{,}6866 \rightarrow x_{12} = 0{,}6792 \rightarrow x_{13} = 0{,}6845 \rightarrow x_{14} = 0{,}6807$; $x_{15} = 0{,}6834$

$x_{16} = 0{,}6815 \rightarrow x_{17} = 0{,}6829 \rightarrow x_{18} = 0{,}6819 \rightarrow x_{19} = 0{,}6826 \rightarrow x_{20} = 0{,}6821$

$x_{21} = 0{,}6825 \rightarrow x_{22} = 0{,}6822 \rightarrow x_{23} = 0{,}6824 \rightarrow x_{24} = 0{,}6823 \rightarrow x_{25} = 0{,}6824$

$x_{26} = 0{,}6823 \rightarrow x_{27} = 0{,}6823$.

La solution converge après 27 itérations.

- Si on choisit $g(x) = -x^3+1$

$$\begin{cases} x_0 = 0{,}5 \\ x_{n+1} = -x_n^3+1 \\ \text{Critère d'arret : 4 chiffres après la virgule} \end{cases}$$

$x_1 = 0{,}875 \rightarrow x_2 = 0{,}3300 \rightarrow x_3 = 0{,}9640 \rightarrow x_4 = 0{,}1041 \rightarrow x_5 = 0{,}9988$
$x_6 = 0{,}0033 \rightarrow x_7 = 0{,}9999 \rightarrow x_8 = 0{,}1\times10^{-6} \rightarrow x_9 = 1 \rightarrow x_{10} = 0 \rightarrow x_{11} = 1$

L'algorithme ne converge pas, la solution oscille entre 0 et 1

Le choix de $g(x)$ est déterminant

a/ Choix de la fonction $g(x)$

Si "s" est la racine de $f(x) \Rightarrow f(s) = 0 \Rightarrow g(s) = s$

L'erreur à l'itération $(n+1)$: $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - s = g(x_n) - g(s)$

Appliquons le développement de Taylor :

$$g(x_n) = g(s) + (x_n - s)\, g'(s) + \frac{1}{2}(x_n - s)^2 g''(s) + O(x_n - s)^3$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n\, g'(s) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2\, g''(s) + O(\varepsilon_n)^3$$

$\varepsilon_{n+1} \simeq g'(s)\, \varepsilon_n \rightarrow$ (suite géométrique de raison $g'(s)$)

$\Rightarrow$ L'erreur ε_{n+1} tend vers "0" si $|g'(s)| < 1$

Donc plus $|g'(s)|$ est petit plus la convergence est rapide

Théorème : Si $g(x)$ est continue et dérivable sur $[a,b]$
si $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, k < 1$ telque $|g'(x)| \leq k$
Alors : $\forall\, x_0 \in [a,b]$, la suite $x_{k+1} = g(x_n)$ Converge.

Cette condition est suffisante

b) Ordre de convergence

$$\varepsilon_{n+1} = C\,\varepsilon_n^P \quad (\text{"C" est une constante})$$

Si $P=1$ → la convergence est linéaire

Si $P=2$ → la convergence est quadratique.

Il est souvent difficile de déterminer a priori l'intervalle $[a,b]$, donc dans ce cas là, le théorème suivant est utile :

Théorème de Ostowski

> Soit "α" un point fixe d'une fonction "g" continue et différentiable dans un intervalle $[c,d]$ contenant "α".
>
> si $|g'(\alpha)| < 1$ alors il existe un intervalle $[a,b] \subset [c,d]$ telque la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers "α", pour tout $x_0 \in [a,b]$.

2.5/ Méthode de Newton-Raphson.

C'est la méthode la plus utilisée pour résoudre les équations non-linéaires (logiciels en éléments finis)

Principe:

A partir d'une valeur initiale x_0, on cherche une correction δx telle que $f(x_0+\delta x) = 0$

Appliquons un développement de Taylor :

$$f(x_0+\delta x) = f(x_0) + \delta_x f'(x_0) + O(\delta_x^2) = 0$$

On obtient :
$$\boxed{\delta_x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

$x_0 + \delta x$ n'est pas la racine exacte mais une solution approchée qu'on appelle x_1

$$\boxed{x_1 = x_0 + \delta x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

à $(n+1)$ itération, on obtient :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

D'où l'algorithme de la méthode de Newton Raphson s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée initiale} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ \text{Critère d'arrêt} \end{cases}$$

a) Conditions de Convergence

si $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, donc la méthode de Newton Raphson s'écrit : $x_{n+1} = g(x_n)$, On peut dire que cette méthode est un cas particulier de la méthode du point fixe :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

si "s" est la racine alors $f(s)=0$ ce qui donne $g'(s)=0$ ce qui implique que ε_{n+1} évoquée dans la méthode du point fixe : $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n g'(s) + \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 g''(s) + O(\varepsilon_n)^3$ devient :

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 g''(s)}$$ C'est une Convergence Quadratique

Le choix de la valeur initiale est déterminant pour la convergence :

b) Exemple

$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$, Considérons une valeur initiale $x_0 = 0,5$, l'algorithme s'écrit alors :

$$\begin{cases} x_0 = 0,5 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} \\ \text{Critère d'arrêt : } 10^{-4} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 1} = \frac{2(0,5)^3 + 1}{3(0,5)^2 + 1} = 0,7143$$

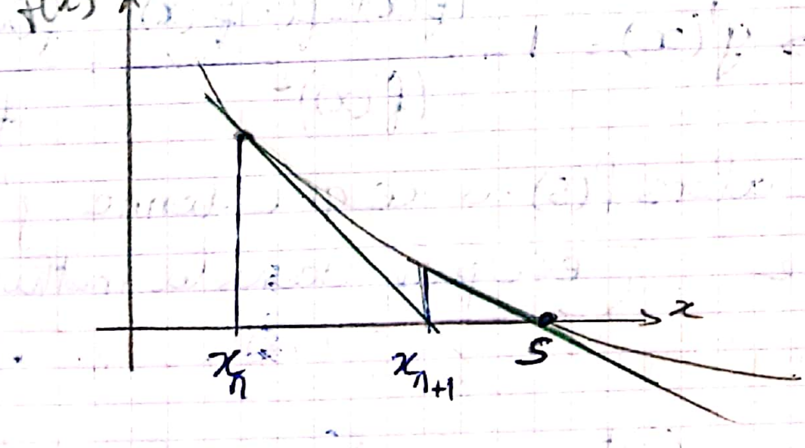
$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 1} = \frac{2(0,7143)^3 + 1}{3(0,7143)^2 + 1} = 0,6832$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 1} = \frac{2(0,6832)^3 + 1}{3(0,6832)^2 + 1} = 0,6823$$

$$x_4 = \frac{2x_3^3 + 1}{3x_3^2 + 1} = \frac{2(0,6823)^3 + 1}{3(0,6823)^2 + 1} = 0,6823$$

La différence entre x_4 et x_3 < 0,0001 alors la solution est donc : $S = 0,6823$. Il nous a fallu 4 itérations pour obtenir la solution de l'équation $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$.

c) Interprétation géométrique :



2.6/ Généralisation sur les systèmes Non linéaires :

soit le système suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

avec $\vec{X}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur solution

$$f_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) = f_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})\,\delta x_j + O(\|\delta\vec{x}\|^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})\,\delta x_j = -f_i(\vec{x})}$$

Sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\text{La Jacobienne}} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(\vec{x}) \\ -f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ -f_n(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

On obtient un système à n équations et n inconnues qu'on peut résoudre par n'importe quelle méthode évoquée précédement

Exemple :

Considérons le système d'équations non linéaires :

$$\begin{cases} x_1 - x_2^2 + x_1 e^{x_2} = 2 \\ x_2 e^{x_2} + x_1^3 = 1 \end{cases}$$

déterminer les racines de ces fonctions par la méthode de Newton Raphson :

La fonction $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2 + x_1 e^{x_2} - 2 = 0 \,,\, x_2 e^{x_2} + x_1^3 - 1 = 0)$ admet dérivée, la matrice :

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e^{x_2} & -2x_2 + x_1 e^{x_2} \\ 3x_1^2 & (1+x_2)e^{x_2} \end{pmatrix}$$

La suite (x_{1n+1}, x_{2n+1}) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_{1n+1} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{pmatrix} - \frac{f(x_1, x_2)}{f'(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{pmatrix} - \left[f'(x_1; x_2)\right]^{-1} f(x_1; x_2)$$

$$\left[f'(x_1, x_2)\right]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (1+x_2)e^{x_2} & 2x_2 - x_1 e^{x_2} \\ -3x_1^2 & 1+e^{x_2} \end{bmatrix}$$

Δ est le déterminant de la matrice $f'(x_1, x_2)$

En partant des points ($x_{01} = 0$ et $x_{20} = 0$), on obtient successivement $\vec{X}_1(x_{11} = 1, x_{21} = 1) \to \vec{X}_2(x_{21} = 0{,}892, x_{22} = 0{,}560) \to \vec{X}_3(x_{31} = 0{,}880, x_{32} = 0{,}317) \to \vec{X}_4(x_{41} = 0{,}910, x_{42} = 0{,}214)$ etc... qui converge très rapidement vers la solution exacte :

$\boxed{x_1 = 1}$ et $\boxed{x_2 = 0}$