جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

محاضرات في مقياس:

رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية مسار علوم التسيير

إعداد: الدكتور حواس عبد الرزاق

الموسم الجامعي: 2021/2020

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

Université Echahid Hamma Lakhdar-El oued

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

المجلس العلمي للكلية

Faculté des sciences économiques, commerciales et sciences de gestion

الرقم: 4/412/م ع/ ك ع ا ق ت و ع ت/2021

الــوادي في: 2021/06/16

شهادة اعتماد مطبوعة

يشهد رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الشهيد حمة لخضر الوادي على أن:

د/ عبد الرزاق حواس .... أستاذ محاضر أ

قدم للمجلس العلمي للكلية عن طريق اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير مطبوعة علمية بعنوان: **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة** موجهة لطبة السنة الثانية ليسانس علوم التسيير.

وبعد التقارير الايجابية المقدمة من طرف لجنة القراءة والتحكيم، **فإنه يتم اعتماد** المطبوعة وتعتبر محكمة علميا.

رئيس المجلس العلمي

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

Université Echahid Hamma Lakhdar d'ElOued

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

Département des sciences de gestion

الرقم:075/2021/ل ع ق ت/ق ع ت/ ك ع إق ت ع ت

الوادي في:2021/05/30

شـــــــهـادة إداريــــة

يشهد السيد رئيس اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير، بأن الدكتور الدكتور عبد الرزاق حواس، قدم أمام اللجنة العلمية المنعقدة بتاريخ 2021/02/11، مطبوعة بعنوان "محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة"؛ موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم التسيير؛ عدد صفحاتها 125 صفحة ، حيث قامت لجنة الخبراء الآتية أسماؤهم بتحكيم المطبوعة:

- د. إبراهيم وصيف غدير ابراهيم جامعة الوادي
- د. ابراهيم قعيد جامعة الوادي
- د. رفيق مرزوقي جامعة سطيف

وقد ثمنت المطبوعة بتقارير إيجابية من طرف الخبراء المذكورين أعلاه، وتم اعتمادها في اللجنة المؤرخة بتاريخ 2021/05/27

سلمت هذه الشهادة لاستخدامها في إطار ما يسمح به القانون.

رئيس اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير

رئيس اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير

د. محمد البـاي

B.P.789, 39000, El Oued, Algérie, Tél/Fax: 032120768 / 032120768 scgestioneloued@gmail.com

المحاضرة الأولى

البرمجة الخطية – صياغة النموذج الرياضي

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزا مرموقا في مجالات بحوث العمليات، وتكمن أهمية البرمجة الخطية في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، وتعتبر البرمجة الخطية linear Programming أحد أساليب البرمجة الرياضية التي تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها وتلعب دوراً هاماً في الوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المتاحة على الأنشطة المختلفة وفقاً للهدف المطلوب.

تعريف البرمجة الخطية

للبرمجة الخطية عدة تعاريف وذلك باختلاف أراء المفكرين والمنظرين، وفيما يلي بعض التعاريف التي تناولت هذا الموضوع:

- أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة أي أن يكون توزيعها مثاليا.
- أسلوب رياضي يساعد على استخدام كفء للموارد الاقتصادية المتاحة وذلك إما بهدف تعظيم المنافع كالأرباح أو تقليل التكاليف، وتعتبر البرمجة الخطية بمثابة أداة يمكن للإدارة استخدامها في تسهيل عملية اتخاذ القرار.
- إن تعبير البرمجة يعني البحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب, أما تعبير خطية فيعني أن جميع العلاقات بين متغيرات البرنامج الرياضي خطية (من الدرجة الأولى) أي أن تغير قيمة المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة.

مجالات استخدام البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية من أكثر الطرق الكمية المستخدمة في صناعة القرارات، ومن أمثلة الحالات التي تقدم فيها البرمجة الخطية دعما لصانعي القرار ما يلي:

مشاكل الإنتاج: كتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات، التي ينتجها المشروع بالشكل الذي يعظم الأرباح، وذلك في ظل إمكانيات مختلفة.

المزيج الإنتاجي: في كثير من الصناعات هناك عدد من المكونات أو العناصر التي تخلط مع بعضها وبنسب معنية لتعطي منتجا آخرا جديدا كصناعة الأعلاف والأدوية والأسمدة ....الخ. والهدف هنا هو تحديد الكميات التي يجب استخدامها من كل عنصر، وذلك لصنع المنتج الجديد عند أقل تكلفة ممكنة مع ضمان وجود خصائص إنتاجية معنية في ذلك المنتج.

تخطيط الاستثمارات: لنفترض أن هناك مبلغا ماليا معينا ويراد تحديد مقدار ما ينفق على عدد من البدائل الاستثمارية وذلك لجعل مجموع العوائد السنوية أكبر ما يمكن علما بأن المشروع ليس لديه أية أموال أخرى عدا هذا المبلغ.

التخطيط للدعاية والإعلان: في هذا النوع من المشاكل يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها على مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلى، وذلك تحت عدد من القيود، مثل قدرة السوق الاستيعابية، ومحدودية الموارد المالية، والحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من تلك الوسائل الإعلانية.

مشاكل الشحن: كم عدد الوحدات التي يجب شحنها من عدد من المنتجات المختلفة وذلك باستخدام وسيلة نقل معنية ذات طاقة تحميلية محدودة لتعظيم الأرباح في الوقت الذي يراد فيه نقل كميات معنية مطلوبة من السلعة المنتجة.

شروط استخدام البرمجة الخطية

هناك عدد من الشروط أو الخصائص الواجب توافرها عند استخدام البرمجة الخطية، ومن أبرزها ما يلي:

- يجب أن يكون للظاهرة المدروسة هدف واضح ومحدد مع إمكانية التعبير عن ذلك الهدف بصورة عددية.

- محدودية الموارد المتاحة الخاضعة للبرمجة مثل الأيدي العاملة, المواد الأولية، الآلات ورأس المال المطلوب، .... الخ.

- وجود استخدامات (أكثر من متغير في البرنامج) متنافسة على الموارد موضوع البرمجة، ويمكن زيادتها أو تخفيضها حسب الخطة الموضوعة لحل المشكلة المطروحة ومن ثم سوف تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.

- إمكانية التعبير عن الفعاليات أو المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية (عددية).

- أن تكون العلاقة بين المتغيرات في النموذج الرياضي من الدرجة الأولى.

صياغة نموذج البرمجة الخطية

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية. ونعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله. وبعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الانتقال إلى المرحلة التالية والمتمثلة في تقييمه وتحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة والوصول إلى الحل المناسب.

ويتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية:

– **دالة الهدف** Function objective: وهي دالة خطية تعبر عن الهدف المنشود الذي نرغب في تحقيقه, ويكون الهدف عادة هو الوصول إلى أقصى ربح ممكن أو أدنى تكلفة ممكنة.

وتكتب دالة الهدف وفق الصيغة الرياضية التالية: $Optimalité\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_J$

حيث أن:

Optimalité: وتعني الامثلية, وتكون تعظيم (Maximization) هذه القيمة إذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة (Minimization) إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة.

C_j: معاملات دالة الهدف. و يكون المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

X_j: المتغيرات القرارية, وهي المجاهيل التي نبحث عنها.

j: مؤشر لعدد المتغيرات والمقدرة بـ (n)

– **القيود (الموارد)** Constraints: وتشير عادة الشروط أو الظروف المتحكمة في الظاهرة بشكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منهما ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j (\geq, \leq, =) b_i$$

حيث أن:

a_{ij}: العلاقات الفنية التي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة.

b_j: الكميات المتاحة من الموارد.

i: مؤشر لعدد القيود والمقدرة بـ (m).

ملاحظة: نماذج البرمجة الخطية يمكن أن تأخذ ثلاث صيغ هي:

الصيغة العامة (المختلطة)، وهي الصيغة التي تحتوي قيودها على كل الإشارات (≥, ≤، =).

الصيغة القانونية، وهي الصيغة التي تحتوي قيودها على إشارتي (≤) أو (≥) فقط.

- فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فان إشارة القيود تكون أقل من أو يساوي (≤).

- وإذا كانت دالة الهدف تقليل (Min) فان إشارة القيود تكون أكبر من أو يساوي (≥).

الصيغة المعيارية (القياسية)، وهي الصيغة التي تحتوي قيودها على إشارة مساواة (=) فقط.

- شرط عدم السلبية Non-Negativity: إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية ولا يمكن أن تكون سالبة أي: $x_j \geq 0$.

لتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية سنطرح بعض الأمثلة:

المثال الأول: مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الخزانات المعدنية هما A وB وكل نوع يمر بآلتين: الآلة الأولى لقطع الصفائح وطاقاتها التشغيلية 80 ساعة أسبوعيا، والآلة الثانية لطي ووصل الصفائح لتعطيها شكل الخزان المناسب المطلوب وطاقاتها التشغيلية 70 ساعة أسبوعيا.

إذا علمت أن النوع الأول A يحتاج 4 ساعات على الآلة الأولى و10 ساعات على الآلة الثانية والنوع B يحتاج 5ساعات على الآلة الأولى و6 ساعات على الآلة الثانية.

المطلوب: كتابة وصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها من النوعين A وB لتحقيق أعلى ربح ممكن إذا كان ربح الخزان الواحد من النوع الأول A يقدر بـ 30 دنانير وربح الخزان من النوع الثاني B يقدر بـ 60 دنانير.

الحل:

الهدف هو تحقيق أعلى ربح ممكن للمصنع من خلال إنتاج الخزانات المعدنية من النوعين A وB.

نفرض أن

x_1: عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوع A

x_2: عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوع B

دالة الهدف: هي دالة تعظيم الربح الأسبوعي المصنع

إذا ربح إنتاج خزان واحد من النوع A 30 دنانير فان ربح إنتاج x_1 خزان هو: $30\ x_1$؛

وإذا ربح إنتاج خزان واحد من النوع B 60 دنانير فان ربح إنتاج x_2 خزان هو: $60\ x_2$.

ربح المصنع الأسبوعي هو: $Z = 30\ x_1 + 60\ x_2$

- دالة تعظيم ربح المصنع الأسبوعي هي: $\mathbf{Max\ Z = 30\ x_1 + 60\ x_2}$

القيود:

القيد الأول: قيد الآلة الأولى, عدد الساعات المستغلة أسبوعيا على الآلة الأولى يجب أن لا تتعدى 80 ساعة (طاقاتها التشغيلية أسبوعيا) $\mathbf{4\ x_1 + 5\ x_2 \leq 80}$

القيد الثاني: قيد الآلة الثانية, عدد الساعات المستغلة أسبوعيا على الآلة الثانية يجب أن لا تتعدى 70 ساعة (طاقاتها التشغيلية أسبوعيا) $\mathbf{10\ x_1 + 6\ x_2 \leq 70}$

شرط عدم السلبية: أن لا يكون عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوعين A و B عددا سالبا: $\mathbf{x_1 \geq 0}$ و $\mathbf{x_2 \geq 0}$

- ويكون بذلك النموذج الرياضي في صورته النهائية كما يلي:

$$\mathbf{Max\ Z = 30\ x_1 + 60\ x_2}$$

Subject to:

$$4\ x_1 + 5\ x_2 \le 80$$
$$10\ x_1 + 6\ x_2 \le 70$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

المثال الثاني: تلقت إحدى المؤسسات طلب 1000 كغ من خليط خاص متكون من ثلاث مواد كيماوية يرمز لها بالرمز: M_3, M_2, M_1 وتقدر تكاليفها بالترتيب : 500 دج, 600 دج، 700 دج لكل كيلوغرام.

تخضع هذه المواد للشروط التالية :

لا يمكن استعمال أكثر من 300 كغ من M_1،

في نفس الوقت يجب استعمال 500 كغ على الأقل من M_2,

يجب استعمال 200 كغ على الأقل من M_3.

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي المحدد للكميات الواجب استعمالها من المواد الثلاثة لتلبية هذا الطلب وذلك بأقل تكلفة ممكنة.

الحل:

نفرض أن

x_1: كمية المادة M_1 المستعملة في الخليط

x_2: كمية المادة M_2 المستعملة في الخليط

x_3: كمية المادة M_3 المستعملة في الخليط

دالة الهدف: $\mathbf{Min\ Z = 500\ x_1 + 600\ x_2 + 700\ x_3}$

القيود: القيد الأول: قيد كمية المادة M_1 $\qquad x_1 \le 300$

القيد الثاني : قيد كمية المادة M_2 $\qquad x_2 \ge 500$

القيد الثالث: قيد كمية المادة M_3 $\quad x_3 \geq 200$

القيد الرابع: قيد الكمية الإجمالية للخليط $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- ويكون بذلك النموذج الرياضي في صورته النهائية كما يلي:

Min Z = 500 x_1 + 600 x_2 + 700 x_3

Subject to:

$x_1 \leq 300$

$x_2 \geq 500$

$x_3 \geq 200$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

تطبيقات

التمرين رقم (01): يقوم مصنع بإنتاج سلعتين يمر إنتاج كل سلعة على مرحلتين هي الطهي والتعبئة ، والجدول الأتي يبين متوسط الزمن بالساعة الذي يستغرقه إنتاج الوحدة في مراحل الإنتاج، وكذلك الربح الذي تحققه الواحدة والساعات المتاحة لكل مرحلة.

	الطهي	التعبئة	ربح الوحدة
السلعة الأولى	3	1	40
السلعة الثانية	2	1	50
الساعات المتاحة	15	12	

المطلوب: تحديد الكميات المثلى للإنتاج لكل من السلعتين بحيث تحقق أكبر ربح ممكن باستخدام الطريقة البيانية؟.

التمرين رقم (02):أكتب النموذج الرياضي للحصول على أكبر مردود ممكن من المحاصيل المزروعة في مختلف المناطق الزراعية وذلك بالاستخدام الأمثل لكميات السماد المتوفرة والمحددة في الجدول التالي:

زيادة مردود الهكتار الواحد (طن)	كمية الأسمدة الموزعة على الهكتار الواحد من الأرض (طن)			مساحة الأراضي الزراعية حسب المناطق (هكتار)	المناطق
	أسمدة البوتاسيوم	أسمدة آزوتية	أسمدة فوسفورية		
12	1	1	2	100000	A
14	5/4	2	1	150000	B
10	0	1/2	1	200000	C
	100000	300000	400000	كميات الأسمدة المتوفرة (طن)	

التمرين رقم (03): يمتلك مزارع 200 بقرة تستهلك كل بقرة كيلوغرام واحد من غذاء خاص يوميا, ويتم إعداد هذا الغذاء من خليط من الذرة وفول الصويا بالمكونات التالية :

نوع الحبوب	كمية العنصر في الكيلوغرام الواحد			التكلفة (دولار/كيلوغرام)
	كالسيوم	بروتين	ألياف	
الذرة	0.001	0.09	0.02	2
فول الصويا	0.002	0.60	0.06	4

ويشترط أن يحتوي الغذاء اليومي للبقرة على : 1 % على الأكثر كالسيوم. 30 % على الأقل بروتين. 5 % على الأكثر ألياف.

- أوجد البرنامج الخطي الذي يحدد خلطة الغذاء اليومية بأقل تكلفة.

التمرين رقم (04): سوق تجاري يعمل 24 ساعة يحتاج الأعداد التالية من عاملي الخزينة كحد أدنى، وتتبع الفترة رقم 6 الفترة رقم 1 مباشرة, ويعمل كل عامل خزينة 8 ساعات متتالية ابتداء من أي فترة من الفترات الست.

الفترة	1	2	3	4	5	6
الوقت من اليوم	3 - 7	7 - 11	11 -15	15 -19	19 - 23	23 - 3
العدد المطلوب كحد أدنى	7	20	14	20	10	5

- أوجد البرنامج الخطي الذي يحرر ورقة تشغيل موظفين يومية بأقل عدد ممكن وتفي بالمتطلبات.

التمرين رقم (05): لدى شركة مرتبتان للمفتشين : المرتبة1 والمرتبة2، والمطلوب إسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي على الأقل تدقيق 1800 قطعة يومياً خلال 8 ساعات عمل.

يستطيع مفتشو المرتبة الأولى تدقيق القطع بمعدل 25 قطعة/ساعة وبدقة 98 %، أما مفتشو المرتبة الثانية فيستطيعون تدقيق القطع بمعدل15 قطعة/ساعة وبدقة 95 %.

- أوجد البرنامج الخطي إذا علمت أن أجرة مفتش المرتبة الأولى هو 4 دولار في الساعة و أن أجرة مفتش المرتبة الثانية هو 3 دولار في الساعة, وفي كل مرة يخطئ المفتش تتكلف الشركة 2 دولار؛

ويتوافر لدى الشركة لأغراض التفتيش 8 مفتشين من المرتبة الأولى و10 من المرتبة الثانية وترغب الشركة في تعيين الإسناد الأمثل لجعل كلفة التفتيش الكلية أصغريه.

التمرين رقم (6):إحدى الشركات الصناعية تقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات 1،3،2 وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياُ من كل منتج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج المرور على ثلاث عمليات إنتاجية C1،C2،C3 والجدول الأتي يبين الزمن (بالدقائق) المطلوب للوحدة الواحدة لكل منتج من العمليات المختلفة وكذلك الربح المحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة.

الزمن المتاح للتشغيل دقيقة يوميا	منتج3	منتج 2	منتج 1	العملية
420	3	2	2	C1
440	4	0	5	C2
465	0	6	3	C3
	7	4	5	ربح الوحدة الواحدة

والمطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

التمرين رقم (7): تتمثل مهمة مسؤول مصلحة الإشهار في مؤسسة خاصة في إيجاد الكيفية المناسبة لتقسيم ميزانية الإشهار المقدرة بـ 70000 وحدة نقدية على وسائل الإعلام المختلفة والمبينة في الجدول أدناه، إذ يجب إعداد على الأقل 10 إعلانات اشهارية متلفزة، وفي نفس الوقت لا يمكن صرف أكثر من 42000 وحدة نقدية لهذه العملية، كما أن الوقت المخصص للقناة الثانية يجب أن يفوق على الأقل الوقت المتاح للقناتين الأولى والأرضية بدقيقتين، بينما عدد مرات الإشهار الإذاعي يجب أن لا يتجاوز 20 إشهار أكثر من الإشهار المتلفز.

وسيلة الإعلام	تكلفة الإشهار الواحد	درجة تأثير للإشهار الواحد	الوقت المتاح للإشهار الواحد
القناة الأولى	3000 و.ن	120	45 ثانية
القناة الفضائية الأولى	4500 و.ن	150	30 ثانية
القناة الفضائية الثانية	2500 و.ن	90	50 ثانية
الإذاعة	2000 و.ن	75	40 ثانية

المطلوب: ضع المسألة في شكل نموذج رياضي خطي دون حلها.

المحاضرة الثانية

طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة البيانية

بعد أن تتم صياغة نماذج البرمجة الخطية سواء كانت مشكلة تعظيم أرباح أو تقليل تكاليف، سيتم التعرف على كيفية حل هذه النماذج وما هي قيم التغيرات التي تحدد أعلى ربح أو أقل تكلفة.

وتعتبر طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم هذه الطريقة إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، إذا يتعذر رسم النموذج في حالة إحتوائه على أكثر من متغيرين وتقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثمة تحديد منطقة الحلول الممكنة ولحل نموذج البرمجة الخطية نتبع الأتي:

- نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن X_1 والثاني عمودي وليكن X_2.
- نرسم القيود بعد تحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بتحويل إشارات ≤ و≥ إلى إشارة مساواة =، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_2 نعوض قيمة $x_1=0$ ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_1 نعوض قيمة $x_2=0$.
- نحدد منطقة حل كل قيد من القيود.
- تحديد منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل للقيود والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد.
- شرط عدم السلبية يحدد منطقة الحل لتكون في الربع الأول.
- نجد قيمة Z عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول العملية الممكنة, ويكون الحل أكبر قيمة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تدنئة.

المثال الأول: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max. } Z = 1000\,x_1 + 800\,x_2$$

Subject to:

$$8\,x_1 + 6\,x_2 \le 2400$$

$$4\,x_1 + 9\,x_2 \le 1800$$

$2x_1 \leq 500$

$x_1 , \ x_2 \geq 0$

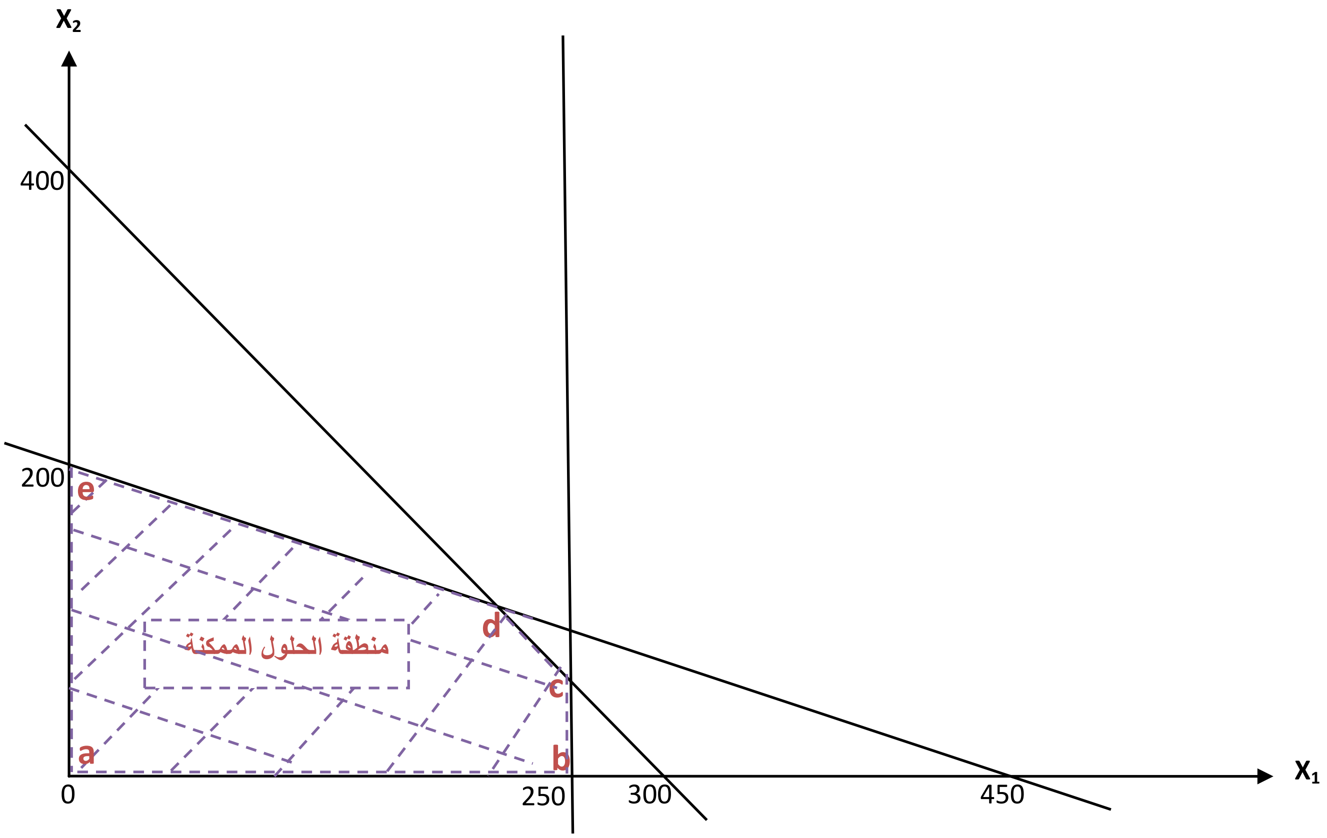
الحل: 1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$8 x_1 + 6 x_2 = 2400$ $(x_1 = 0 , x_2 = 400)$ $(x_1 = 300 , x_2 = 0)$

$4 x_1 + 9 x_2 = 1800$ $(x_1 = 0 , x_2 = 200)$ $(x_1 = 450 , x_2 = 0)$

$2 x_1 = 500$ $(x_1 = 250)$

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a: $a(0.0) \Rightarrow Z_a = 1000 \times 0 + 800 \times 0 = 0$

ب- عند النقطة b: $b(250.0) \Rightarrow Z_b = 1000 \times 250 + 800 \times 0 = 250000$

ج- عند النقطة c: لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها, أي الأول والثالث:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 2400 \ldots\ldots (1) \\ 2x_1 = 500 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$x_1 = \frac{500}{2} = 250$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $8 \times 250 + 6x_2 = 2400 \Longrightarrow x_2 = 200/3$

$$c(250.200/3) \Rightarrow Z_a = 1000 \times 250 + 800 \times 200/3 = 410000/3$$

د- عند النقطة d: لإيجاد إحداثيات النقطة d نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها, أي الأول والثاني:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 2400 \ldots\ldots (1) \\ 4x_1 + 9x_2 = 1800 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) على 2 - وجمعها مع المعادلة (2) نجد:

$$6x_2 = 600 \Longrightarrow x_2 = \frac{600}{6} = 100$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$x_1 = \frac{2400 - 100 \times 6}{8} = 225$$

$$d(225.100) \Rightarrow Z_d = 1000 \times 225 + 800 \times 100 = 305000$$

هـ- عند النقطة e: $e(0.200) \Rightarrow Z_e = 1000 \times 0 + 800 \times 200 = 160000$

4 – الحل الأمثل

225 وحدة من x_1 و 100 وحدة من x_2 لتحقيق أكبر ربح والمقدر بـ 305000 وحدة نقدية.

المثال الثاني: اوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$\text{Min. } Z = 40\, x_1 + 35\, x_2$
S.T.

$2\, x_1 + 3\, x_2 \geq 600$

$x_1 + 2\, x_2 \leq 600$

$6\, x_1 + 3\, x_2 \geq 900$

$0.6\, x_1 + 0.25\, x_2 \geq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

1– تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

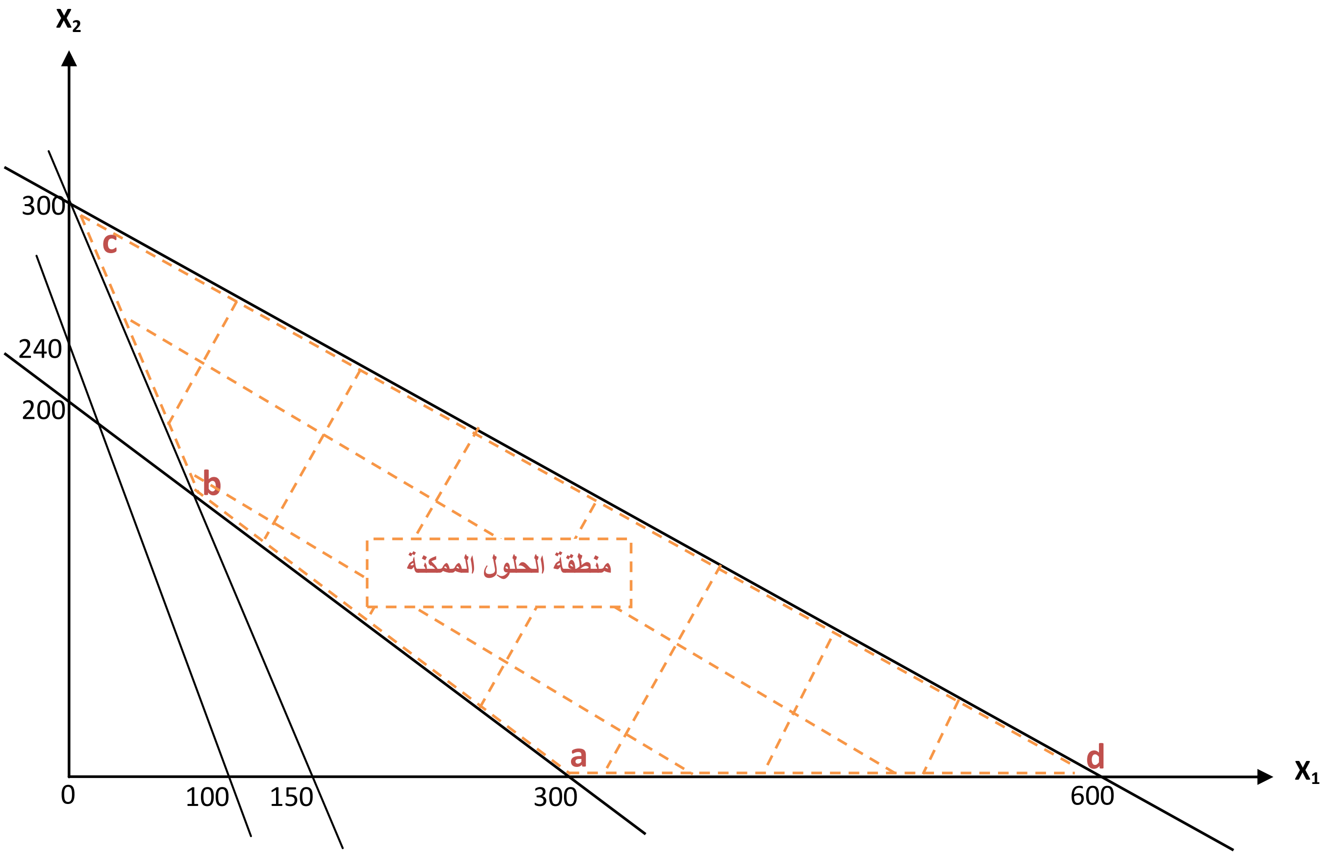
$2\, x_1 + 3x_2 = 600$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 200)$ $(x_1 = 300\ ,\ x_2 = 0)$

$x_1 + 2\, x_2 = 600$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 300)$ $(x_1 = 600\ ,\ x_2 = 0)$

$6\, x_1 + 3\, x_2 = 900$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 300)$ $(x_1 = 150\ ,\ x_2 = 0)$

$0.6\, x_1 + 0.25\, x_2 = 60$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 240)$ $(x_1 = 100\ ,\ x_2 = 0)$

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a: $a(300.0) \Rightarrow Z_a = 40 \times 300 + 35 \times 0 = 12000$

ب- عند النقطة b: لإيجاد إحداثيات النقطة b نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها, أي الأول والثالث:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 600 \ldots\ldots(1) \\ 6x_1 + 3x_2 = 900 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$4x_1 = 300 \Rightarrow x_1 = \frac{300}{4} = 75$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$x_2 = \frac{600 - 2 \times 75}{3} = 150$$

$$b\ (75.150) \Rightarrow Z_a = 40 \times 75 + 35 \times 150 = 8250$$

ج- عند النقطة c:

$$C\ (0.300) \Rightarrow Z_b = 40 \times 0 + 35 \times 300 = 10500$$

د- النقطة d:

$$d(600.0) \Rightarrow Z_d = 40 \times 0 + 35 \times 600 = 24000$$

4 – الحل الأمثل

75 وحدة من x_1 و 150 وحدة من x_2 لتحمّل أدنى تكلفة والمقدرة بـ 8250 وحدة نقدية.

تطبيقات

التمرين رقم (01): تختص مؤسسة في إنتاج الطاولات والكراسي في قسمين للإنتاج التحضير والإتمام، تحتاج الطاولة الواحدة 4 ساعات في قسم التحضير وساعتين في قسم الإتمام، بينما يحتاج الكرسي الواحد ساعتين في قسم التحضير و4 ساعات في قسم الإتمام؛ الطاقة الإنتاجية القصوى للقسمين حددت بــ 60 ساعة في قسم التحضير، و48 ساعة في قسم الإتمام. إذا كان الربح هو 800 دينار عن كل طاولة و600 دينار عن كل كرسي أوجد خطة الإنتاج المثلى التي تعظم الربح.

حل التمرين رقم (01):

1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نقرض أن $\mathbf{x_1}$: عدد الطاولات الواجب إنتاجها.

$\mathbf{x_2}$: عدد الكراسي الواجب إنتاجها.

دالة الهدف: $\mathbf{Max\ Z = 800x_1 + 600\ x_2}$

القيود:

القيد الأول: قيد قسم التحضير $\mathbf{4x_1 + 2x_2 \leq 60}$

القيد الثاني: قيد قسم الإتمام $\mathbf{2x_1 + 4x_2 \leq 48}$

شرط عدم السلبية: $\mathbf{x_1 \geq 0}$ و $\mathbf{x_2 \geq 0}$

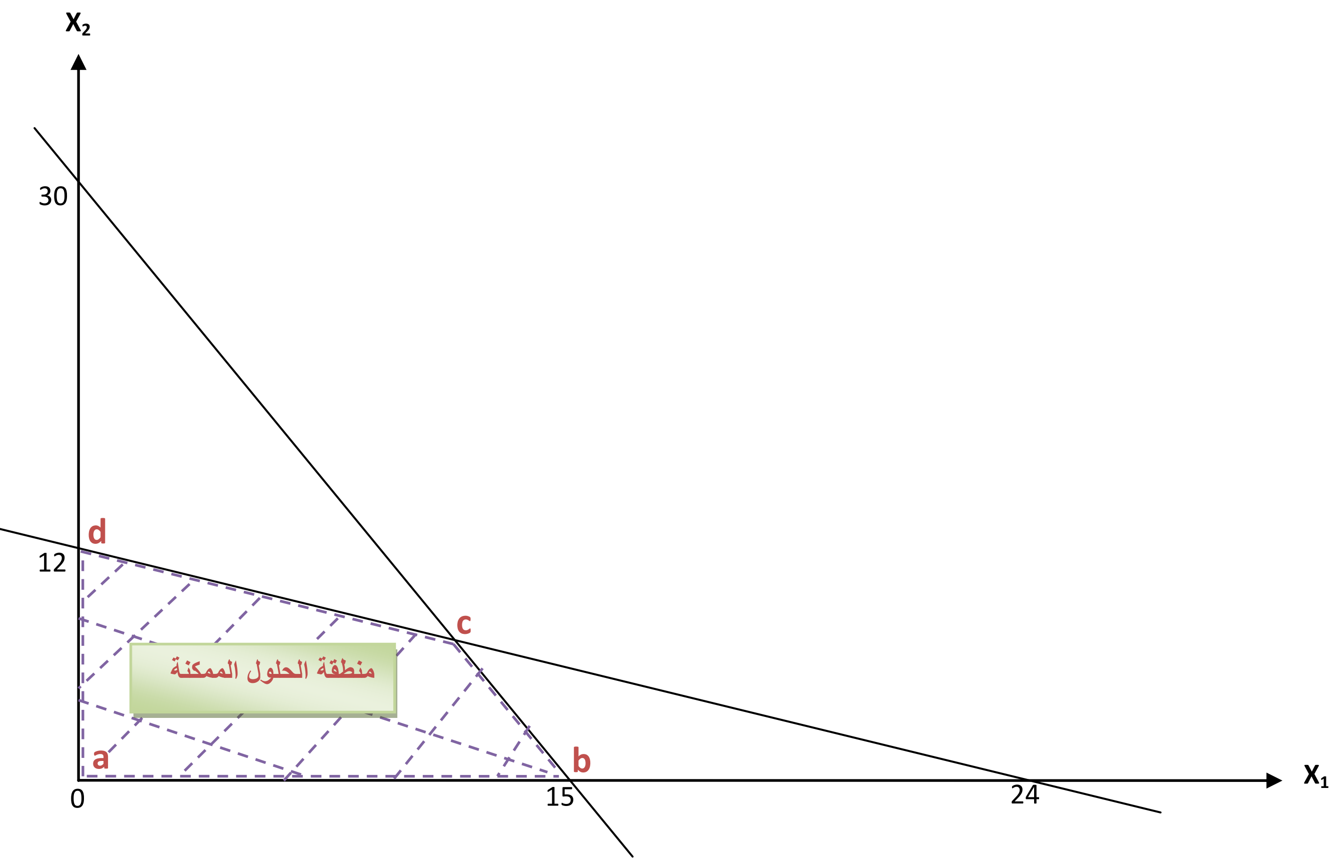
2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:

تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$4x_1 + 2x_2 = 60$ $(x_1=0 , x_2 =30)$ $(x_1=15 , x_2 =0)$

$2 x_1 + 4x_2 = 48$ $(x_1=0 , x_2 =12)$ $(x_1=24 , x_2 =0)$

التمثيل البياني:



حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة:

عند النقطة a: $a(0.0) \Rightarrow Z_a = 800 \times 0 + 600 \times 0 = 0$

عند النقطة b: $b(0.0) \Rightarrow Z_b = 800 \times 15 + 600 \times 0 =$ 12000

عند النقطة c: لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين

كما يلي:
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 60 \ldots . . (1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 48 \ldots . . (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في (−2) وجمعها مع المعادلة (1) نجد:

$$-6x_2 = -36 \Rightarrow x_2 = 36/6 = 6$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $x_1 = {60 - 2 \times 6}/_{4} = 12$

$$c(12.6) \Rightarrow Z_c = 800 \times 12 + 600 \times 6 = 13200$$

عند النقطة d: $d(0.12) \Rightarrow Z_d = 800 \times 0 + 600 \times 12 = 7200$

<u>الحل الأمثل</u>: عند النقطة $c(12.6)$ وبذلك تكون خطة الإنتاج المثلى التي تعظم الربح هي إنتاج 12 طاولة و6 كراسي لتحقيق ربح قدره 13200 وحدة نقدية.

التمرين رقم (02): يقوم مصنع بإنتاج نوعين من السلع، حيث يقدر الربح الوحدوي للنوع الأول بـ 80دج وللنوع الثاني بـ 60دج، ونظرا لنقص المواد الأولية فان الإنتاج اليومي لا يمكن أن يتجاوز 1600 وحدة من النوعين، ولنفس السبب لا يمكن أن يتجاوز 800 وحدة من النوع الأول ولا يمكن أن يتجاوز من النوع الثاني 1400 وحدة.

– أوجد خطة الإنتاج اليومي المثلى التي تجعل الأرباح في حدها الأقصى.

حل التمرين رقم (02):

1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نقرض أن x_1: عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول من السلع يوميا.

x_2: عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني من السلع يوميا.

$$\text{Max } Z = 80\, x_1 + 60\, x_2$$

Subject to:

$x_1 + x_2 \leq 1600$

$x_1 \leq 800$

$x_2 \leq 1400$

$x_1, x_2 \geq 0$

2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:

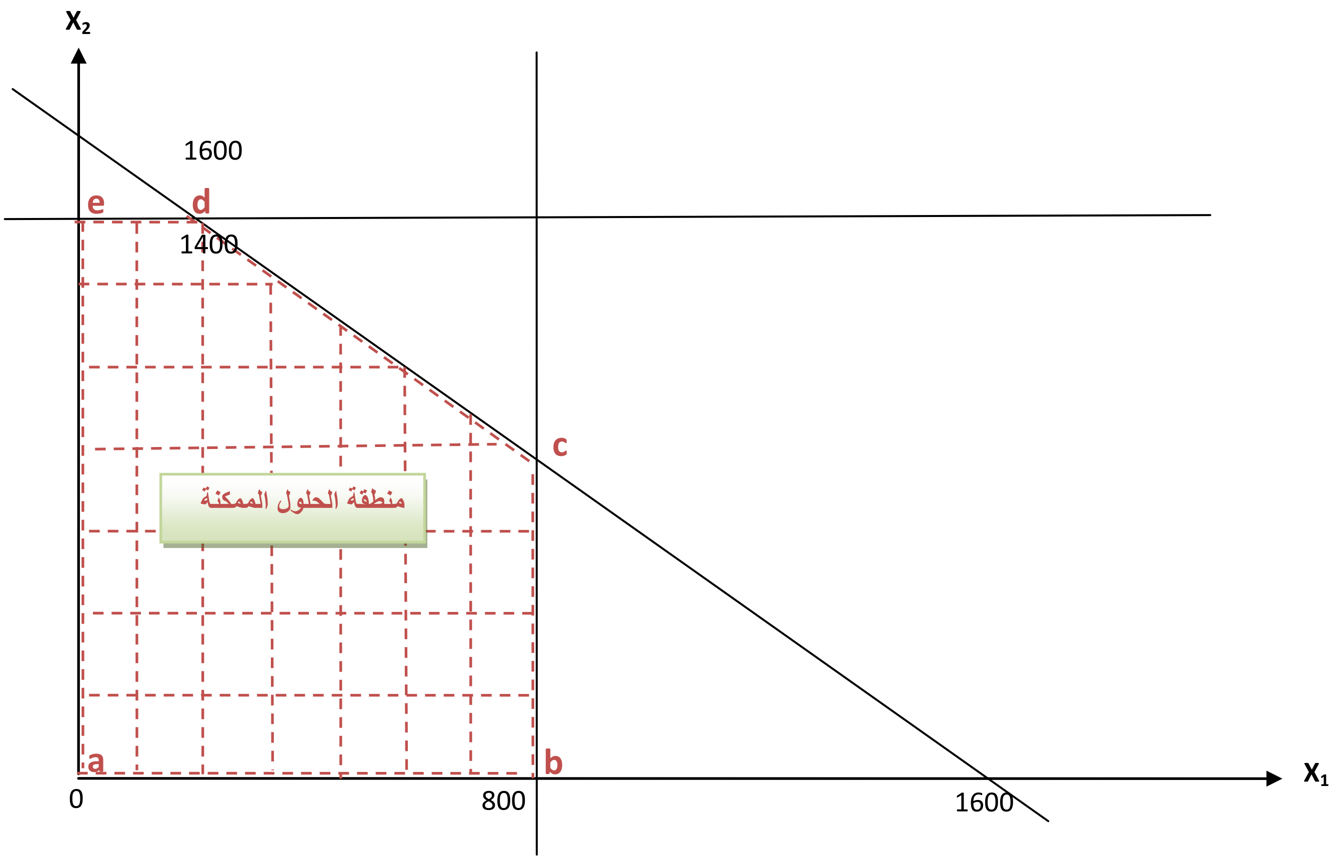
<u>تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:</u>

$x_1 + x_2 = 1600$ $(x_1 = 0 , x_2 = 1600)$ $(x_1 = 1600 , x_2 = 0)$

$x_1 = 800$

$x_2 = 1400$

التمثيل البياني:



حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة:

عند النقطة a: $a(0.0) \Rightarrow Z_a = 80 \times 0 + 60 \times 0 = 0$

عند النقطة b: $b(800.0) \Rightarrow Z_b = 80 \times 800 + 60 \times 0 = 6400$

عند النقطة c: $c\ (800.800) \Rightarrow Z_c = 80 \times 800 + 60 \times 800 = 112000$

لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين الأول والثاني كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1600 \ldots\ldots (1) \\ x_1 = 800 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2): $x_1 = 800$

بالتعويض عن x_1 في المعادلة (1) نجد: $x_2 = 1600 - 800 = 800$

$$c\,(800.800) \Rightarrow Z_c = 80 \times 800 + 60 \times 800 = 112000$$

عند النقطة d: لإيجاد إحداثيات النقطة d نقوم بحل جملة معادلتي القيدين الأول والثالث كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1600 \ldots\ldots(1) \\ x_2 = 1400 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (2): $x_2 = 1400$

بالتعويض عن x_2 في المعادلة (1) نجد: $x_1 = 1600 - 1400 = 200$

$$d(200.1400) \Rightarrow Z_d = 80 \times 200 + 60 \times 1400 = 100000$$

الحل الأمثل: عند النقطة c(800.800) وبذلك تكون خطة الإنتاج المثلى هي إنتاج يوميا 800 وحدة من النوع الأول و800 وحدة من النوع الثاني لتحقيق ربح يومي قدره 112000 دينار.

التمرين رقم (03): شعرت بإرهاق شديد، فتوجحت إلى طبيبك الخاص الذي نصحك أن تتعاطى يوميا ما لا يقل عن 48 وحدة من فيتامين B_1 و50 وحدة من فيتامين B_2؛ وتوجهت إلى الصيدلي الذي أبلغك أن لديه نوعا من الحبوب يحتوي كل منها على وحدة واحة من B_1 وخمس وحدات من B_2، ونوع من الكبسولات يحتوي كل منها على أربع وحدات من B_1 ووحدة واحدة من B_2؛ كما يبلغ سعر الوحدة من الحبوب 10 دنانير بينما يبلغ سعر الكبسولة الواحدة 30 دينار.

- ما هي التشكيلة المثالية من الحبوب والكبسولات التي يجب تعاطيها يوميا لتنفيذ تعليمات الطبيب والتي تكلفك أقل ما يمكن.

حل التمرين رقم (03):

1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نفرض أن $\mathbf{x_1}$: عدد الحبوب التي يجب تعاطيها يوميا.

x_2: عدد الكبسولات التي يجب تعاطيها يوميا.

$$\text{Min } Z = 10\,x_1 + 30\,x_2$$

$$x_1 + 4\,x_2 \geq 48$$

$$5\,x_1 + x_2 \geq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

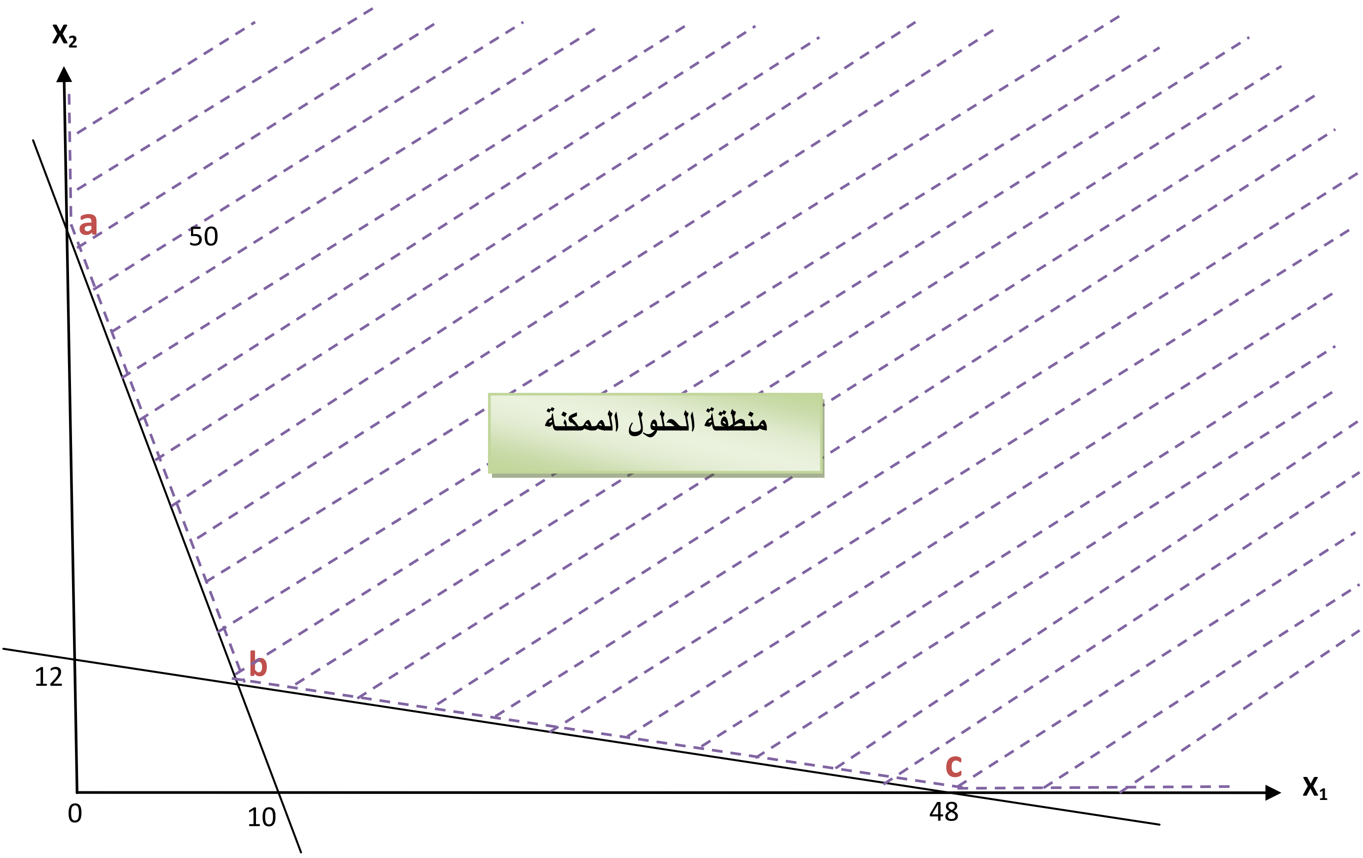
2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:

تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$x_1 + 4x_2 = 48$ $(x_1=0 , x_2 =12)$ $(x_1=48 , x_2 =0)$

$5x_1 + x_2 = 50$ $(x_1=0 , x_2 =50)$ $(x_1=10 , x_2 =0)$

التمثيل البياني:



حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة:

عند النقطة a: $a(0.50) \Rightarrow Z_a = 10 \times 0 + 30 \times 50 = 1500$

عند النقطة b: $b(8.10) \Rightarrow Z_b = 10 \times 8 + 30 \times 10 = 380$

لإيجاد إحداثيات النقطة b نقوم بحل جملة معادلتي القيدين

كما يلي: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 48 \ldots\ldots(1) \\ 5x_1 + x_2 = 50 \ldots\ldots(2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في (-5) وجمعها مع المعادلة (2) نجد:

$$-19\,x_2 = -190 \Rightarrow x_2 = {}^{-190}/_{19} = 10$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $x_1 = 48 - 4 \times 10 = 8$

$$b(8.10) \Rightarrow Z_b = 10 \times 8 + 30 \times 10 = 380$$

عند النقطة c: $c(48.0) \Rightarrow Z_c = 10 \times 48 + 30 \times 0 = 480$

الحل الأمثل: عند النقطة b(8.10) وبذلك تكون التشكيلة المثالية التي يجب تعاطيها يوميا لتنفيذ تعليمات الطبيب هي: 8 وحدات من الحبوب و 10 وحدات من الكبسولات والتي تكلفك أقل ما يمكن (380 دينار يوميا)

التمرين رقم (04):تمتلك شركة لتعدين النحاس منجمين، ينتج كل منهما ثلاث أنواع من الخام هي عالي الجودة والمتوسط والمنخفض؛ لدى الشركة عقد لتوريد 12 طن من الخام مرتفع الجودة و8 أطنان من الخام متوسط الجودة و24 طن من الخام منخفض الجودة لشركة صهر النحاس.

- ينتج المنجم الأول 6 طن من الخام مرتفع الجودة و2 طن من الخام متوسط الجودة و4 طن من الخام منخفض الجودة في الساعة. - ينتج المنجم الثاني 2 طن من الخام مرتفع الجودة و2 طن من الخام متوسط الجودة و12 طن من الخام منخفض الجودة في الساعة.

المطلوب : تحديد عدد الساعات اللازمة لتشغيل كل منجم لتلبية الالتزامات التعاقدية بأقل تكلفة إذا علمت أن تكلفة تعدين الطن الخام الواحد في الساعة هي 2000 ون و1600 ون في المنجمين الأول والثاني على التوالي.

حل التمرين رقم (04):

1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نفرض أن x_1: عدد الساعات اللازمة لتشغيل المنجم الأول.

x_2: عدد الساعات اللازمة لتشغيل المنجم الثاني.

$$\text{Min } Z = 2000\,(12)\,x_1 + 1600\,(16)\,x_2$$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$4x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:

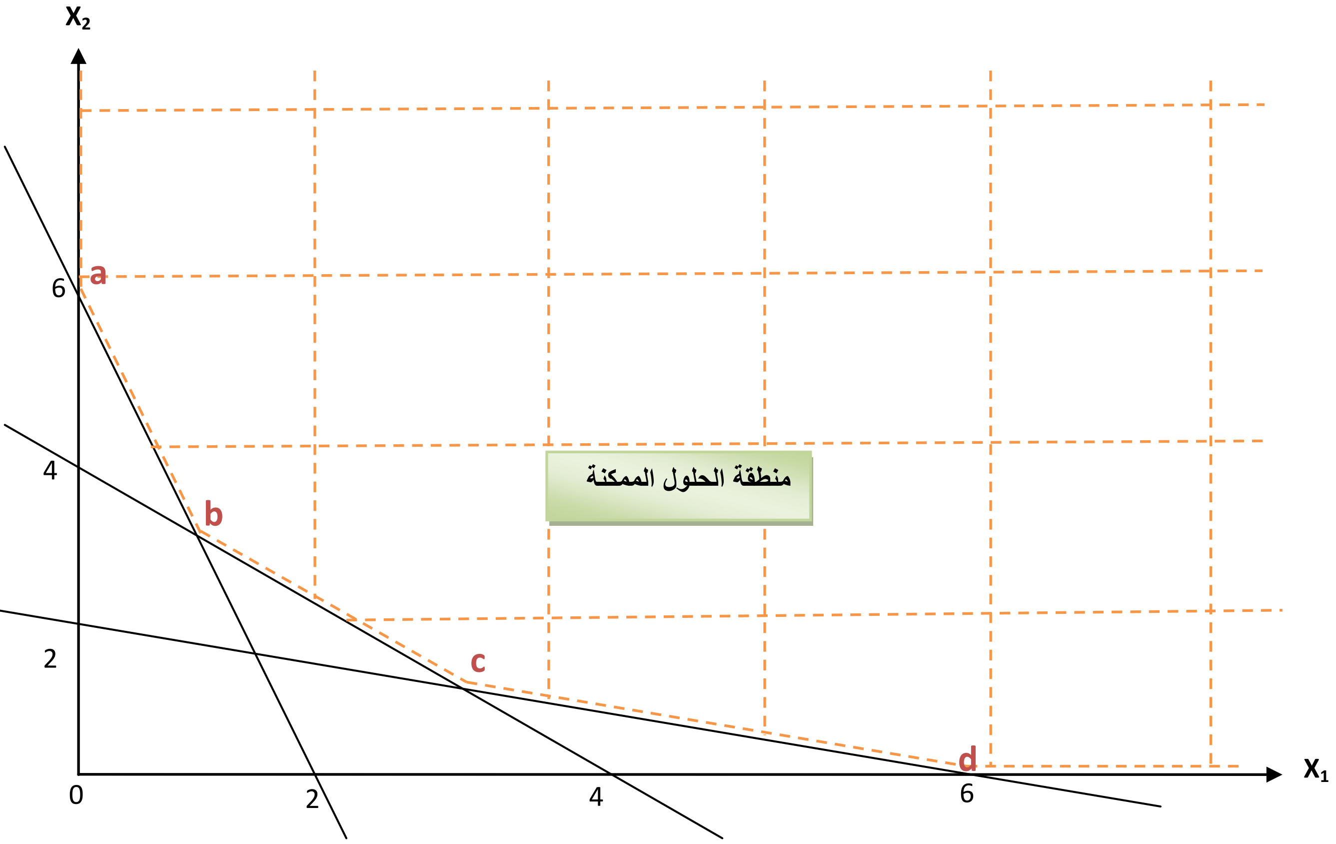
تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$6x_1 + 2x_2 = 12$ $(x_1=0 \,,\, x_2=6)$ $(x_1=2 \,,\, x_2=0)$

$2x_1 + 2x_2 = 8$ $(x_1=0 \,,\, x_2=4)$ $(x_1=4 \,,\, x_2=0)$

$4x_1 + 12x_2 = 24$ $(x_1=0 \,,\, x_2=2)$ $(x_1=6 \,,\, x_2=0)$

التمثيل البياني:



حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة:

عند النقطة a: $a(0.6)\Rightarrow Z_a = 24000 \times 0 + 25600 \times 6 = 153600$

عند النقطة b: لإيجاد إحداثيات النقطة b نقوم بحل جملة معادلتي القيدين الأول والثاني كما يلي:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 12 \ldots.. (1) \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \ldots.. (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (2) في (-3) وجمعها مع المعادلة (1) نجد:

$$-4x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = \frac{-12}{-4} = 3$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد: $x_1 = 8 - 2 \times 3/_2 = 1$

$$b(1.3) \Rightarrow Z_b = 24000 \times 1 + 25600 \times 3 = 100800$$

عند النقطة c: لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين الثاني والثالث

كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots\ldots.(2) \\ 4x_1 + 12x_2 = 24 \ldots\ldots.(3) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$X1 = {8 - 2x_2}/_2 = 4 - x_2 \ldots\ldots\ldots(4)$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد:

$$4(4 - x_2) + 12x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 1$$

نعوض في المعادلة (4) نجد:

$$x_1 = 4 - x_2 = 4 - 1 = 3$$

$$c(3.1) \Rightarrow Z_c = 24000 \times 3 + 25600 \times 1 = 328000$$

عند النقطة d:

$$d(6.0) \Rightarrow Z_d = 24000 \times 6 + 256000 \times 0 = 144000$$

<u>الحل الأمثل</u>: عند النقطة d(6.0) وبذلك تكون عدد الساعات اللازمة لتشغيل كل منجم لتلبية الالتزامات التعاقدية بأقل تكلفة هي تشغيل المنجم الأول 6 ساعات وعدم تشغيل المنجم الثاني.

المحاضرة الثالثة

طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة المبسطة

ما يميز الطريقة المبسطة (طريقة السمبلاكس) الدقة والكفاءة كما يمكن استخدامها لأي عدد من المتغيرات والقيود, وعملية هذه الطريقة تظهر من خلال تتبع خطوات نظامية متتالية تبدأ بالحل الممكن مرورا بالحل الأفضل وصولا إلى الحل الأمثل؛ وتتمثل خطوات الطريقة المبسطة فيما يلي:

الخطوة الأولى: تحويل النموذج الرياضي إلى الشكل المعياري (القياسي) أي تحويل كل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

- إذا كانت إشارة القيد اقل من أو تساوي (≤) يتم إضافة متغير الفجوة (المتغير الراكد) Slack Variable إلى الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (S_i ; $i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, m$).

- إذا كانت إشارة القيد اكبر من أو تساوي (≥) يتم طرح متغير الفجوة (المتغير الفائض) Surplus Variable من الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (S_i ; $i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, m$), ونضيف متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز (A_i ; $i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, m$).

- إذا كانت إشارة القيد مساواة (=) يتم إضافة متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز (A_i ; $i = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, m$).

- إعادة كتابة دالة الهدف في ضوء المتغيرات الجديدة, حيث تظهر مغيرات الفجوة بمعامل صفر (0) وتظهر المتغيرات الاصطناعية بمعامل (M) - والتي ترمز إلى عدد كبير جدا- وبإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

الخطوة الثانية: تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) كما يلي:

<table>
<tr><td colspan="2">Cof</td><td>c_{ij}</td><td>0</td><td>±M*</td><td rowspan="2">الطرف الأيمن
للقيود
R.H.S</td></tr>
<tr><td colspan="2">Var</td><td>x_{ij}</td><td>S_i</td><td>A_i</td></tr>
<tr><td rowspan="4">معاملات
المتغيرات
الأساسية
في دالة
الهدف</td><td rowspan="4">عمود
المتغيرات
الأساسية
Basic Variable</td><td colspan="3">معاملات المتغيرات في القيد الأول</td><td>b_1</td></tr>
<tr><td colspan="3">معاملات المتغيرات في القيد الثاني</td><td>b_2</td></tr>
<tr><td colspan="3">........
........</td><td>.
.</td></tr>
<tr><td colspan="3">معاملات المتغيرات في القيد m</td><td>b_m</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z</td><td>Z_1</td><td>...........</td><td>Z_k</td><td rowspan="2">Z</td></tr>
<tr><td colspan="2">C - Z</td><td>$C_1 - Z_1$</td><td>...........</td><td>$C_k - Z_k$</td></tr>
</table>

*** توضع الإشارة حسب طبيعة دالة الهدف.**

ملاحظات حول جدول الحل الأولي:

1- توضع المتغيرات الاصطناعية والراكدة كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي، أما المتغيرات الفائضة فلا يمكن إن تكون كمتغيرات أساسية.

2- يمثل العمود الأيمن من جدول الحل الأولي الكميات أو الطرف الأيمن Right Hand Side للقيود أو للمعادلات في الشكل القياسي.

3- يمثل السطر (Z) إجمالي الربح أو التكلفة حسب طبيعة دالة الهدف, ويتم احتسابه على النحو التالي: (معامل المتغير الأساسي الأول × معامل x_1 في القيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني × معامل x_1 في القيد الثاني) + ... + (معامل المتغير الأساسي الأخير × معامل x_1 في القيد m)؛ وهكذا بالنسبة لجميع المتغيرات.

ويتم احتساب قيمة دالة الهدف (Z) على النحو التالي: (معامل المتغير الأساسي الأول × القيمة المقابلة له في عمود الطرف الأيمن للقيود) + (معامل المتغير الأساسي الثاني × القيمة المقابلة له في عمود الطرف الأيمن للقيود) + ... + (معامل المتغير الأساسي الأخير × القيمة المقابلة له في عمود الطرف الأيمن للقيود)

4- يسمى السطر ($C - Z$) بسطر تقييم الحل، ويمثل صافي الربح أو التكلفة حسب طبيعة دالة الهدف؛ ويتم احتسابه على النحو التالي:

معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة Z المقابلة له في السطر (Z)، فمثلا قيمة ($C - Z$) للمتغير x_1 هي: ($C_1 - Z_1$)

الخطوة الثالثة: التحقق من أمثلية الحل، وذلك من خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) والذي يعبر عن مدى مساهمة كل متغير من متغيرات دالة الهدف عند إضافة وحدة واحدة, ويتم التحقق من شرط الأمثلية كما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر ($C - Z$) سالبة أو معدومة ($C - Z \leq 0$).
- إذا كانت دالة الهدف تقـليل (Min) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر ($C - Z$) موجبة أو معدومة ($C - Z \geq 0$).

وفي حالة تحقق شرط الأمثلية يتم التوقف عند هذه الخطوة ويكون الحل المتحقق هو الحل الأمثل, وإذا لم يتحقق شرط الأمثلية يتم الانتقال إلى الخطوة الرابعة.

الخطوة الرابعة:

أ)- تحديد عمود الدوران بتحديد المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة في سطر التقييم (C – Z) وذات إشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) أو إشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقـليل (Min).

ب)- تحديد سطر الدوران بتحديد المتغير الخارج من الأساس والذي يقابل اقل حاصل قسمة بين عناصر الطرف الأيمن للقيود وعناصر عمود الدوران (العناصر السالبة والمعدومة في عمود الدوران لا تأخذ بعين الاعتبار)، ويسمى عنصر تقاطع سطر وعمود الدوران بعنصر الدوران (عنصر الارتكاز).

ج)- الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد عن طريق:

- تحسب قيم سطر المتغير الداخل إلى الأساس عن طريق قسمة قيم سطر الدوران على عنصر الدوران، ويسمى السطر الناتج بسطر العمل Working Row أو المعادلة المحورية.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر الجديدة = القيمة القديمة للسطر – (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر × الرقم المقابل في سطر العمل)

ويمكن كذلك حساب قيم الأسطر الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم + (المقابل في سطر الدوران × المقابل في عمود الدوران) / عنصر الدوران.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (C – Z).

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق من أمثلية الحل كما مر في الخطوة الثالثة.

المثال الأول: تختص مؤسسة في صناعة ثلاث أنواع من الأثاث الخشبي: مكاتب، طاولات، كراسي، أظهر التحليل الفني للإنتاج الأسبوعي بيانات الجدول التالي:

المنتجات / الموارد	متطلبات الوحدة الواحدة من الموارد			الحد الأقصى المتاح من الموارد
	المكاتب	الطاولات	الكراسي	
المادة الأولية (م2)	04 متر مربع	02 متر مربع	01 متر مربع	400 متر مربع
اليد العاملة (سا)	02 ساعة	02 ساعة	04 ساعة	600 ساعة
قوى محركة (سا)	01 ساعة	02 ساعة	01 ساعة	400 ساعة
الربح الوحدوي	200 دينار	160 دينار	100 دينار	

المطلوب: أوجد خطة الإنتاج الأسبوعية التي تحقق أكبر ربح ممكن.

الحل: 1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نفرض أن x_1: عدد المكاتب المنتجة أسبوعيا.

x_2: عدد الطاولات المنتجة أسبوعيا.

x_3: عدد الكراسي المنتجة أسبوعيا.

$$\text{Max } Z = 200\, x_1 + 160\, x_2 + 100\, x_3$$

Subject to:

$$4\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 \leq 400$$

$$2\, x_1 + 2\, x_2 + 4\, x_3 \leq 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

2- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 200\, x_1 + 160\, x_2 + 100\, x_3 + 0\, S_1 + 0\, S_2 + 0\, S_3$$

<u>Subject to:</u>

$$4\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 + S_1 = 400$$

$$2\, x_1 + 2\, x_2 + 4\, x_3 + S_2 = 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_3 = 400$$

$$x_1\, , x_2\, , x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

3 – إعداد جدول الحل الأولي:

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	4	2	1	1	0	0	400
0	S_2	2	2	4	0	1	0	600
0	S_3	1	2	1	0	0	1	400
Z		0	0	0	0	0	0	0
C-Z		200	160	100	0	0	0	

ونلاحظ من جدول الحل الأولي ما يلي:

- قيمة دالة الهدف تساوي صفر، وقيم المتغيرات الراكدة هي:

$$S_1 = 400,\ S_2 = 600,\ S_3 = 400$$

وهذا يدل على عدم استغلال الموارد المتاحة, أي أن عملية الإنتاج لم تبدأ بعد.

- يتم احتساب قيم السطر (Z) كما يلي:

$$Z_1 = 0\times4+0\times2+0\times1 = 0.\ \ Z_2 = 0\times2+0\times2+0\times2 = 0.\ Z_3 = 0\times1+0\times4+0\times1 = 0$$

$$Z_4 = 0\times1+0\times0+0\times0 = 0.\ \ Z_5 = 0\times0+0\times1+0\times0 = 0.\ Z_6 = 0\times0+0\times0+0\times1 = 0$$

قيمة دالة الهدف: $Z= 0\times400+0\times600+0\times400= 0$

- يتم احتساب قيم السطر (C - Z) كما يلي: معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة Z المقابلة له في السطر (Z).

$C_1 - Z_1=200-0=200.$ $C_2 - Z_2=160-0=160.$ $C_3 - Z_3=100-0=100.$

$C_4 - Z_4=0-0=0.$ $C_5 - Z_5=0-0=0.$ $C_6 - Z_6=0-0=0.$

- التحقق من أمثلية الحل، وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر (C – Z) سالبة أو معدومة ($C - Z \leq 0$)، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (C – Z) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فان المتغير الذي سيدخل إلى الأساس هو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة موجبة في سطر التقييم (C – Z) لأنها تعطي أعلى مساهمة في دالة الهدف وهو المتغير **(x_1)** والذي يقابل القيمة (200) وعموده هو عمود الدوران.

ولتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس نقسم قيم عمود الكميات على القيم المقابلة لها في عمود الدوران كما يلي:

قيم عمود الكميات	÷	قيم عمود الدوران	ناتج حاصل القسمة
400	÷	**4**	**=100**
600	÷	**2**	**=300**
400	÷	**1**	**=400**

ونختار أقل حاصل قسمة (100)، وبذلك (S_1) هو المتغير الذي سيغادر الأساس وسطره هو سطر الدوران، والرقم (4) هو عنصر الدوران كما هو موضح في الجدول التالي.

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	4	2	1	1	0	0	400
0	S_2	2	2	4	0	1	0	600
0	S_3	1	2	1	0	0	1	400
Z		0	0	0	0	0	0	0
C-Z		200	160	100	0	0	0	

سطر الدوران   عنصر الدوران   عمود الدوران

- الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد نحصل من خلاله على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء التعديلات التالية:

- تحسب قيم سطر المتغير الذي دخل إلى الأساس عن طريق قسمة قيم سطر الدوران على عنصر الدوران،

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
قيم سطر العمل	4/4	2/4	1/4	1/4	0/4	0/4	400/4
	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100

- تحسب قيم السطر الثاني (S_2) باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر (S_2) الجديدة = القيمة القديمة للسطر (S_2) – (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر (S_2) × الرقم المقابل في سطر العمل)

S_2	2	2	4	0	1	0	600
-(2)	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
=	0	1	7/2	-1/2	1	0	400

- تحسب قيم السطر الثاني (S_3) باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر (S_3) الجديدة = القيمة القديمة للسطر (S_3) – (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر (S_3) × الرقم المقابل في سطر العمل)

S_3	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**400**
-(1)	**1**	**1/2**	**1/4**	**1/4**	**0**	**0**	**100**
=	**0**	**3/2**	**3/4**	**-1/4**	**0**	**1**	**300**

- يتم احتساب قيم السطر (Z) كما يلي:

$Z_1= 200\times1+0\times0+0\times0= 200.$

$Z_2= 200\times1/2+0\times1+0\times3/2= 100.$

$Z_3= 200\times1/4+0\times7/2+0\times3/4= 50.$

$Z_4= 200\times1/4+0\times(-1/2)+0\times(-1/4)= 50.$

$Z_5= 0\times0+0\times1+0\times0= 0.$

$Z_6= 0\times0+0\times0+0\times1= 0$

قيمة دالة الهدف: $Z= 200\times100+0\times400+0\times300= 20000$

- يتم احتساب قيم السطر (Z - C) كما يلي: معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة Z المقابلة له في السطر (Z).

$C_1 – Z_1=200-200=0.$ $C_2 – Z_2=160-100=60.$ $C_3 – Z_3=100-50=50.$

$C_4 – Z_4=0-50=-50.$ $C_5 – Z_5=0-0=0.$ $C_6 – Z_6=0-0=0.$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي.

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
200	x_1	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
0	S_2	0	1	7/2	-1/2	1	0	400
0	S_3	0	3/2	3/4	-1/4	0	1	300
Z		200	100	50	50	0	0	20000
C-Z		0	60	50	-50	0	0	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

- تحسب قيم سطر العمل.
- تحسب قيم الأسطر الأخرى.
- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر ($C - Z$).

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
200	x_1	1	0	0	1/3	0	-1/3	0
0	S_2	0	0	3	-1/3	1	-2/3	200
160	x_2	0	1	1/2	-1/6	0	2/3	200
Z		200	160	80	40	0	40	32000
C-Z		0	0	20	-40	0	-40	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (C – Z) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

- تحسب قيم سطر العمل.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (C – Z).

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
200	x_1	1	0	0	1/3	0	-1/3	0
100	x_3	0	0	1	-1/9	1/3	-2/9	200/3
160	x_2	0	1	0	-1/9	-1/6	7/9	500/3
Z		200	160	100	340/9	20/3	320/9	100000/3
C-Z		0	0	0	-340/9	-20/3	-320/9	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (C – Z) نلاحظ كل القيم سالبة أو معدومة وهذا يعني أن الحل أمثل، وهو:

$x_1 = 0$، $x_2 = 500/3$ ، $x_3 = 200/3$ ، $S_1 = 0$، $S_2 = 0$ ، $S_3 = 0$ ،

$$Z = 100000/3$$

المثال الثاني: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3$$

Subject to:

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 1$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 20$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

الحل:

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to:

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + \mathbf{S_1} = 1$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \mathbf{S_2} = 18$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \mathbf{S_3} = 20$

$x_1 , x_2 , x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

2- إعداد جدول الحل الأولي:

Cof		**3**	**9**	**1**	**0**	**0**	**0**	**R.H.S**
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	**1**	**4**	**3**	**1**	**0**	**0**	**16**
0	S_2	**3**	**2**	**2**	**0**	**1**	**0**	**18**
0	S_3	**2**	**4**	**2**	**0**	**0**	**1**	**20**
Z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
C - Z		**3**	**9**	**1**	**0**	**0**	**0**	

بعد إتمام جدول السمبلكس نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق بما أنه يستوجب أن تكون عناصر السطر (C - Z) سالبة أو معدومة في البرامج الخطية التي هدفها التعظيم (Max), وعليه سننتقل إلى الجدول الجديد بعد تحديد عمود المتغير الداخل (عمود الدوران) الذي يوافق المتغير المرتبط بأكبر قيمة موجبة في السطر (C - Z)، وفي مثالنا هذا نجدها القيمة 9 والتي ترتبط بالمتغير x_2، أما الخطوة الموالية فهي تحديد سطر المتغير الخارج, والذي يوافق أقل حاصل قسمة كل عنصر من عناصر عمود الموارد على العنصر الذي يقابله من عمود المتغير الداخل، أي نختار السطر الذي يرتبط بأقل قيمة من بين: 16/4; 18/2; 20/4، وعليه نجد المتغير الخارج هو S_1، وبذلك يكون جدول السمبلكس الموالي كما يلي:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
9	x_2	1/4	1	3/4	1/4	0	0	4
0	S_2	5/2	0	1/2	-1/2	1	0	10
0	S_3	1	0	-1	-1	0	1	4
Z		9/4	9	27/4	9/4	0	0	36
C - Z		3/4	0	-23/4	-9/4	0	0	

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أنه يقترح إدخال المتغير x_2 في عمود الأساس بكمية 4 وحدات بما يحقق قيمة في دالة الهدف قدرها 36، ولاختبار أمثلية الحل نعود لعناصر السطر (C - Z)، أين نلاحظ وجود قيمة موجبة (3/4) ارتبطت بالمتغير x_1 ما يعني أنه المتغير الداخل في الخطوة اللاحقة، أما سطر المتغير الخارج فهو سطر المتغير S_2 بتطبيق نفس قاعدة القرار، أي أقل حاصل قسمة عمود الموارد على ما يقابله من عنصر في عمود الدوران، وبذلك يكون جدول السمبلكس الجديد كما يلي:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
9	x_2	0	1	7/10	9/20	-1/10	0	3
3	x_1	1	0	1/5	-1/5	2/5	0	4
0	S_3	0	0	-6/5	-4/5	-2/5	1	0
Z		3	9	69/10	69/29	3/10	0	39
C - Z		0	0	-59/10	-4/9	-3/10	0	

نلاحظ أن عناصر السطر (Z-C) كلها سالبة أو معدومة، وعليه فإن الجدول أعلاه يمثل جدول الحل الأمثل، أما قيم الحل الأمثل فنلخصها كما يلي:

$x_1 = 4$ ، $x_2 = 3$ ، $S_1 = 0$ ، $S_2 = 0$ ، $S_3 = 0$ ،

$$Z = 39$$

تطبيقات

التمرين رقم (1): في مؤسسة البركة يتم إنتاج أربع منتجات على آلتين، الوقت اللازم لإنتاج الوحدة من كل منتج والطاقة الإنتاجية لكل آلة موضحة في الجدول التالي:

الآلة	المنتج 1	المنتج 2	المنتج 3	المنتج 4	الطاقة الإنتاجية
الأولى	2 سا	3 سا	4 سا	2 سا	720 ساعة
الثانية	3 سا	2 سا	1 سا	2 سا	600 ساعة

تحسب تكاليف الإنتاج على أساس زمن تشغيل الآلات، تكلفة الساعة على الآلة الأولى هي 10 و.ن وعلى الآلة الثانية هي 15 و.ن؛ سعر بيع الوحدة من المنتجات (م 1، م 2، م 3، م 4) هي على التوالي (85 و.ن ، 90 و.ن ، 75 و.ن ، 65 و.ن).

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم ربح المؤسسة.

حل التمرين رقم (1):

1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نقرض أن x_1: عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول.

x_2: عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني.

x_3: عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني.

x_4: عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني.

$$\text{Max } Z = (85\text{-}65)\, x_1 + (90\text{-}60)\, x_2 + (75\text{-}55)\, x_3 + (65\text{-}50)\, x_4$$

Subject to:

$$2\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 + 2\, x_4 \leq 720$$

$3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 2\,x_4 \leq 600$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

2- حل النموذج الرياضي بالطريقة المبسطة:

- تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$\text{Max } Z = 20\,x_1 + 30\,x_2 + 20\,x_3 + 15\,x_4 + 0S_1 + 0S_2$

$2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 2\,x_4 + S_1 = 720$

$3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 2\,x_4 + S_2 = 600$

$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2 \geq 0$

- جدول الحل الأولي:

Cof		20	30	20	15	0	0	RHS	
Var		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2		
0	S_1	2	3	4	2	1	0	720	720/3=240
0	S_2	3	2	1	2	0	1	600	600/2=300
Z		0	0	0	0	0	0	0	
C - Z		-20	30	20	15	0	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_2 هو المتغير الداخل للأساس.

S_2 هو المتغير الخارج من الأساس.

(2) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثاني:

Cof		20	30	20	15	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
30	x_2	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	240
0	S_2	5/3	0	-5/3	2/3	-2/3	1	220
Z		20	30	40	20	10	0	7200
C - Z		0	0	-20	-5	-10	0	

شرط الامثلية محقق، الحل الأمثل هو: إنتاج 240 وحدة من المنتج الثاني ويكون الربح أعظميا وقدره 7200 و.ن.

التمرين رقم (2): تقوم مؤسسة نفطال بتزويد مادة المازوت إلى ثلاث مناطق نائية A,B,C وبسبب اختلاف بعد هذه المناطق عن محطة التعبئة فان أجرة اللتر الموزع الواحد من المازوت هي 03 وحدات نقدية للمنطقة A و04 وحدات نقدية للمنطقة B و10 وحدات نقدية للمنطقة C؛ وقد تبين أن وقت تزويد البيت الواحد هو 04 دقائق في المنطقة A و08 دقائق في المنطقة B و12 دقيقة في المنطقة C، كما أنه لا يمكن العمل أكثر من عشر ساعات يوميا، ولا يمكن قضاء أكثر من ثماني ساعات يوميا في المنطقتين A و B معا.

بالإضافة إلى أن متوسط تزويد البيت الواحد يقدر بـ 25 لتر، ولا يمكن تزويد أكثر من 3000 لتر يوميا.

- ✓ حدد عدد البيوت التي يمكن تزويدها يوميا لكل منطقة ليكون الأجر الكلي أكبر ما يمكن.

حل التمرين رقم (2):

1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نفرض أن x_1: عدد البيوت المزودة بمادة المازوت يوميا في المنطقة A.

x_2: عدد البيوت المزودة بمادة المازوت يوميا في المنطقة B.

x_3: عدد البيوت المزودة بمادة المازوت يوميا في المنطقة C.

Max $Z = (3\times25)\, x_1 + (4\times25)\, x_2 + (10\times25)\, x_3$

Subject to:

$4\, x_1 + 8\, x_2 + 12\, x_3 \leq (10\times60)$

$4\, x_1 + 8\, x_2 \leq (8\times60)$

$25\, x_1 + 25\, x_2 + 25\, x_3 \leq 3000$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2- حل النموذج الرياضي بالطريقة المبسطة:

- تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

Max $Z = 75\, x_1 + 100\, x_2 + 250\, x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$4\, x_1 + 8\, x_2 + 12\, x_3 + S_1 = 600$

$4x_1 + 8x_2 + S_2 = 480$

$25x_1 + 25x_2 + 25x_3 + S_3 = 3000$

$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

- جدول الحل الأولي:

Cof		75	100	250	0	0	0	RHS	
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	4	8	12	1	0	0	600	600/12=50
0	S_2	4	8	0	0	1	0	480	///////
0	S_3	25	25	25	0	0	1	3000	3000/25=120
Z		0	0	0	0	0	0	0	
C - Z		75	100	250	0	0	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_3 هو المتغير الداخل للأساس.

S_1 هو المتغير الخارج من الأساس.

(12) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثاني:

Cof		75	100	250	0	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
250	x_3	1/3	2/3	1	1/12	0	0	50
0	S_2	4	8	0	0	1	0	480
0	S_3	50/3	25/3	0	-25/12	0	1	1750
Z		250/3	500/3	250	250/12	0	0	12500
C - Z		-25/3	-200/3	0	-250/12	0	0	

شرط الامثلية محقق، الحل الأمثل هو: تزويد 50 بيت في المنطقة C ويكون الأجر اليومي أعظميا وقدره 12500 دينار.

التمرين رقم (3): قرر مجلس المالية لمؤسسة صناعية معينة استثمار مبلغ 600000 دج وذلك لشراء آلات إنتاجية وقد تم اختيار ثلاث أنواع من الآلات A,B,C والجدول التالي يوضح كافة المعلومات الخاصة بالآلات :

نوع الآلة	تكلفة شراء الآلة الواحدة (دج)	مدة تشغيل الآلة في اليوم (بالساعة)	إنتاج الآلة الواحدة في الساعة	عدد العمال المطلوبين لكل آلة
A	6000	8	10	1
B	8000	7	15	1
C	10000	6	30	2

ويوجد لدى المؤسسة 100 عامل يمكن استخدامهم على مختلف الآلات، كما أن المصنع لا يستطيع شراء أكثر من 80 آلة إضافية.

- كيف يمكن لهذه المؤسسة أن تحدد الأنواع الثلاثة من الآلات لتحقيق اكبر طاقة إنتاجية ممكنة؟

المحاضرة الرابعة

طريقة السمبلكس بإستعمال تقنية M الكبرى

في المحتوى السابق لحل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة، تعرضنا لحل المسائل ذات هدف التعظيم (Max) ومكتوبة على شكلها النظامي أين تظهر كل قيودها على الشكل أقل أو يساوي (≤)، في هذه الحالة كانت الكتابة المعيارية لها بإدخال المتغيرات الرّاكدة ($+S_i$) على طرفها الأيسر، في حين لم نتعرض لتلك المسائل التي تقتضي الكتابة المعيارية لها إدخال المتغيرات الفائضة ($-S_i$) والاصطناعية (A_i)، وتظهر هذه المتغيرات عند الكتابة المعيارية لمسائل البرمجة الخطية التي تهدف إلى التدنية (Min)، أو مسائل التعظيم التي لم ترد على شكلها النظامي، أين لا يظهر من بين قيودها قيد أو أكثر على الشكل أقل أو يساوي (≤),

ويعتبر المتغير الاصطناعي (A_i) متغيرا وهميا ليس له معنى اقتصادي، وإنما تتطلّبه الضرورة الشّكلية للبرنامج الخطي (تحقق شرط العملية)، فلو أخذنا كمثال للتوضيح القيد التالي:

$6\ x_1 + 3\ x_2\ \geq 900$ في هذه الحالة ستكون كتابته في شكل مساواة كما يلي:

$6\ x_1 + 3\ x_2 - S_1 = 900$، وكما لاحظنا في الحل بالطريقة المبسطة أن قيم متغيرات القرار x_i تكون معدومة عند الجدول الأول، في هذه الحالة ستكون قيم حل القيد أعلاه $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $S_1 = -900$، وبما أن أحد قيم الحل أقل من الصفر، يعني أن الحل غير عملي، ولحل هذه المشكلة تقتضي الكتابة المعيارية للقيد إدخال المتغير الاصطناعي كما يلي:

$6\ x_1 + 3\ x_2 - S_1 + A_1 = 900$، وفي هذه الحالة ستكون قيم الحل أول عملي كما يلي:

$x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $S_1 = 0$، $A_1 = 900$، وهي قيم تحقق شرط العملية بما أنها كلها موجبة أو معدومة,

ويظهر المتغير الاصطناعي في الجدول الأول في الطريقة المبسطة كمتغير أساسي، وبما أنه ليس له معنى اقتصادي سنعمل على تسريع إخراجه من عمود الأساس، وهذا عن طريق ربطه بمعامل في دالة الهدف يؤثر عكسيا على هدف المسألة ككل (يعمل معامل المتغير الاصطناعي على تعظيم دوال التدنية وتدنية دوال التعظيم)، وقد عرف هذا المعامل بـ M الكبيرة وهو عدد كبير جدا

موجب، وقد سمي هذا الإجراء بالجزاء، حيث تعاقب المتغيرات الاصطناعية بمعامل له اتجاه عكس هدف المسألة.

ولشرح الطريقة المبسّطة باستعمال تقنية M الكبرى Big- M Technique سيتم الاستعانة بالحالات التالية:

الحالة الأولى: حل البرنامج الخطي التالي بالطرقة المبسطة:

$$Min\ Z = 4\,x_1 + 6\,x_2$$

Subject to:

$$3\,x_1 + x_2 \geq 90$$

$$x_1 + 2\,x_2 \geq 80$$

$$x_1 + 6\,x_2 \geq 120$$

$$x_1\,,\, x_2 \geq 0$$

الحل: 1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Min\ Z = 4\,x_1 + 6\,x_2 + M\,A_1 + M\,A_2 + M\,A_3$$

Subject to:

$$3\,x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 90$$

$$x_1 + 2\,x_2 - S_2 + A_2 = 80$$

$$x_1 + 6\,x_2 - S_3 + A_3 = 120$$

$$x_1\,,\, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

2 – إعداد جدول سمبلكس:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	3	1	-1	0	0	1	0	0	90
M	A_2	1	2	0	-1	0	0	1	0	80

M	A_3	1	6	0	0	-1	0	0	1	120
Z		5M	9M	-M	-M	-M	M	M	M	290M
C - Z		4-5M	6-9M	M	M	M	0	0	0	

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق بما أنه يوجد على الأقل عنصر سالب من عناصر السطر (C - Z)، وهدف المسألة تدنية (Min)، وعلى هذا الأساس ننتقل لجدول سمبلكس جديد:

- عمود المتغير الداخل يوافق أعلى قيمة بإشارة سالبة من السطر (C - Z),
- سطر المتغير الخارج أقل حاصل قسمة عناصر عمود الموارد على ما يقابله في عمود المتغير الداخل,

وبذلك يكون الجدول الثاني كما يلي:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	17/6	0	-1	0	1/6	1	0	-1/6	70
M	A_2	2/3	0	0	-1	1/3	0	1	-1/3	40
6	x_2	1/6	1	0	0	-1/6	0	0	1/6	20
Z		7/3M+1	6	-M	-M	1/2M-1	M	M	-1/2M+1	110M+120
C - Z		3-7/3M	0	M	M	1-1/2M	0	0	3/2M-1	

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ عدم تحقق شرط الأمثلية، وعليه سنعيد آلية الانتقال لجدول السمبلكس الموالي كما يلي:

Cof		4	6	0	0	0	M	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
4	x_1	1	0	-6/17	0	1/17	6/17	0	-1/17	420/17
M	A_2	0	0	4/17	1-	5/17	-4/17	1	-5/17	400/17
6	x_2	0	1	1/17	0	-3/17	-1/17	0	3/17	270/17
Z		4	6	(4M-18)/17	-M	(5M-14)/17	(-4M+18)/17	M	(-5M+14)/17	(400M+ 3300)/17
C - Z		0	0	(-4M+18)/17	M	(-5M+14)17	(21M-18)/17	0	(22M-14)/17	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي يجب الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد:

Cof		**4**	**6**	**0**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	**R H S**
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
4	x_1	**1**	**0**	**-2/5**	**1/5**	**0**	**2/5**	**-1/5**	**0**	**20**
0	S_3	**0**	**0**	**4/5**	**-17/5**	**1**	**-4/5**	**17/5**	**-1**	**80**
6	x_2	**0**	**1**	**1/5**	**-3/5**	**0**	**-1/5**	**3/5**	**0**	**30**
Z		**4**	**6**	**-2/5**	**-14/5**	**0**	**2/5**	**14/5**	**0**	**260**
C - Z		**0**	**0**	**2/5**	**14/5**	**0**	**M+2/5**	**M+14/5**	**M**	

نلاحظ أن شرط الأمثلية تحقق، وبالتالي فإن الجدول أعلاه هو جدول الحل الأمثل.

قيم الحل الأمثل:

	$S_1 = 0$
$x_1 = 20$	$S_2 = 0$
$x_2 = 30$	$S_3 = 80$
$Z = 260$	

الحالة الثانية: حل البرنامج الخطي التالي بالطريقة المبسطة:

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2$$

Subject to:

$$X_1 + X_2 = 1000$$

$$X_1 \leq 300$$

$$X_2 \geq 150$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + M A_1 + M A_3$$

Subject to:

$$x_1 + x_2 + A_1 = 1000$$

$x_1 + S_2 = 300$

$x_2 - S_3 + A_3 = 150$

$X_1 , X_2, S_2, S_3, A_1, A_3 \geq 0$

2 – إعداد جدول السمبلكس الأول:

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	1	1	0	0	1	0	1000
0	S_2	1	0	1	0	0	0	300
M	A_3	0	1	0	1-	0	1	150
Z		M	2M	0	-M	M	M	1150M
C - Z		5-M	6-2M	0	M	0	0	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الثاني.

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	1	0	0	1	1	-1	850
0	S_2	1	0	1	0	0	0	300
6	x_2	0	1	0	-1	0	1	150
Z		M	6	0	-6	M	-M+6	850M+900
C - Z		5-M	0	0	6	0	2M-6	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الثالث

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	0	0	-1	1	1	-1	550
5	x_1	1	0	1	0	0	0	300
6	x_2	0	1	0	1-	0	1	150
Z		5	6	-M	M-6	M	-M+6	550M+2400
C - Z		0	0	M	-M+6	0	2M-6	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الرابع

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
0	S_3	0	0	-1	1	1	-1	550
5	x_1	1	0	1	0	0	0	300
6	x_2	0	1	-1	0	1	0	700
Z		5	6	-6	0	0	0	5700
C - Z		0	0	6	0	M	M	

نلاحظ أن شرط الأمثلية محقق، وبالتالي نعتبر الجدول الرابع جدول الحل الأمثل حيث:

$x_1 = 300$	$x_2 = 700$	$S_3 = 550$	$S_2 = 0$	$Z = 5700$

الحالة الثالثة:

حل البرنامج الخطي التالي بالطريقة المبسطة:

$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2$

Subject to:

$x_1 + x_2 = 6$

$2x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$x_1 , x_2 \geq 0$

الحل: 1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Max } Z_P:\ 2x_1 + 4x_2 - M A_1$

Subject to:

$x_1 + x_2 + A_1 = 6$

$2x_1 + x_2 + S_2 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + S_3 = 18$

$x_1 , x_2, S_2, S_3, A_1, \geq 0$

2 – إعداد جدول سمبلكس:

Cof		2	4	0	0	-M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	
-M	A_1	1	1	0	0	1	6
0	S_2	2	1	1	0	0	10
0	S_3	2	3	0	1	0	18
Z		-M	-M	0	0	-M	-6M
C - Z		2+M	4+M	0	0	0	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول سمبلكس الثاني

Cof		2	4	0	0	-M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	
4	x_2	1	1	0	0	1	6
0	S_2	1	0	1	0	-1	4
0	S_3	-1	0	0	1	-3	0
Z		4	4	0	0	4	24
C - Z		-2	0	0	0	-M-4	

نلاحظ أن شرط الأمثلية محقق، وبالتالي الجدول الثاني هو جدول الحل الأمثل حيث:

$x_1 = 0$	$x_2 = 6$	$S_2 = 4$	$S_3 = 0$	$Z = 24$

تطبيقات

التمرين رقم (1): حل النماذج التالية بطريقة السمبلاكس.

1	2	3	4
Min $Z= 5x_1+3x_2$ **S/T** $3x_1 + 2x_2 \geq 20$ $6x_1 + x_2 \geq 30$ $x_1 , x_2 \geq 0$	**Min $Z= 5x_1+3x_2$** **S/T** $x_1 + 2x_2 \geq 2$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 \leq 1$ $x_1 , x_2 \geq 0$	**Max $Z= 3x_1+5x_2$** **S/T** $x_1 \leq 4$ $2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 \geq 18$ $x_1 , x_2 \geq 0$	**Min $Z= 6x_1+3x_2+5x_3$** **S/T** $6x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 20$ $3x_1 + 4x_2 \geq 16$ $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

حل التمرين رقم (1):

حل النماذج بطريقة السمبلاكس.

النموذج رقم 1:

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 3x_2$$

S/T

$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$6x_1 + x_2 \geq 30$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

- تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$$\text{Min } Z = 5x_1+3x_2+0S_1+0S_2+ 0S_3 +MA_1 + MA_2$$
$$3x_1 + 2x_2 - S_1+A_1 = 110$$
$$6x_1 + x_2 - S_2+A_2 = 180$$
$$x_{1,} x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

- جدول الحل الأولي:

Cof		5	3	0	0	M	M	RHS	
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	3	2	-1	0	1	0	20	20/3=6.33
M	A_2	6	1	0	-1	0	1	30	30/6=5
Z		9M	3M	-M	-M	M	M	50M	
C - Z		5-9M	3-3M	M	M	0	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_1 هو المتغير الداخل للأساس.

A_2 هو المتغير الخارج من الأساس.

(6) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثاني:

Cof		5	3	0	0	M	M	RHS	
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	0	3/2	-1	1/2	1	-1/2	20	20×2/3
5	x_1	1	1/6	0	-1/6	0	1/6	5	5×6=30
Z		5	3/2M+5/6	-M	1/2M-5/6	M	-1/2M+5/6	30+5M	
C - Z		0	3-3M	M	-1/2M+5/6	0	-3/2M-5/6		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_2 هو المتغير الداخل للأساس.

A_1 هو المتغير الخارج من الأساس.

(3/2) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثالث:

Cof		5	3	0	0	M	M	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
3	x_2	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3
5	x_1	1	0	1/9	-7/24	-1/9	2/9	40/9
Z		5	3	-13/9	-11/24	13/9	1/9	290/9
C - Z		0	0	13/9	11/24	M-13/9	M-1/9	

شرط الامثلية محقق، الحل الأمثل هو: $x_1= 40/9;\ x_2= 10/3;\ Z=290/3$

النموذج رقم 2:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z= 5x_1+3x_2\\
&\text{S/T}\\
&x_1 + 2x_2 \geq 2\\
&2x_1 + \ \ x_2 \leq 3\\
&x_1 \qquad \leq 1\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = 5x_1+3x_2+0S_1+0S_2+ 0S_3 +MA_1\\
&x_1 + 2x_2 - S_1+A_1 = 2\\
&2x_1 + \ \ x_2 + S_2 = 3\\
&x_1 + 2x_2 + S_3 = 1\\
&x_1, x_2,x_3,x_4,S_1,S_2,S_3,A_1,A_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- جدول الحل الأولي:

Cof		5	3	0	0	M	M	RHS	
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1		
M	A_1	1	2	-1	0	0	1	2	20/3=6.33
0	S_2	2	1	0	1	0	0	3	30/6=5
0	S_3	1	0	0	0	1	0	1	
Z		M	2M	-M	0	0	M	2M	
C - Z		5-M	3-2M	M	0	0	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_2 هو المتغير الداخل للأساس.

A_1 هو المتغير الخارج من الأساس.

(2) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثاني:

Cof		5	3	0	0	M	M	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	
3	x_2	1/2	1	-1/2	0	0	1/2	1
0	S_2	3/2	1	1/2	1	0	-1/2	2
0	S_3	1	0	0	0	1	0	1
Z		3/2	3	-3/2	0	0	3/2	3
C - Z		1/2	0	3/2	0	0	M-3/2	

شرط الامثلية محقق، الحل الأمثل هو: $x_1= 0;\ x_2=1;\ x_3=0;\ Z=3$

النموذج رقم 3:

$$\text{Max } Z= 3x_1+5x_2$$

S/T

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

- تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 3x_1+5x_2+0S_1+0S_3-MA_2-MA_3$$
$$x_1+S_1=4$$
$$2x_2+A_2=12$$
$$3x_1+2x_2-S_3+A_3=18$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,S_1,A_2,A_3\geq 0$$

- جدول الحل الأولي:

Cof		3	5	0	0	- M	- M	RHS	
Var		x_1	x_2	S_1	S_3	A_2	A_3		
0	S_1	1	0	1	0	0	0	4	//////
- M	A_2	0	2	0	0	1	0	12	12/2=6
- M	A_3	3	2	0	-1	0	1	18	18/2=9
Z		- 3M	- 4M	0	M	- M	- M	-30M	
C - Z		3+3M	5+4M	0	-M	0	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_2 هو المتغير الداخل للأساس.

A_2 هو المتغير الخارج من الأساس.

(2) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثاني:

Cof		3	5	0	0	- M	- M	RHS	
Var		x_1	x_2	S_1	S_3	A_2	A_3		
0	S_1	1	0	1	0	0	0	4	4/1=4
5	x_2	0	1	0	0	2/1	0	6	//////
- M	A_3	3	0	0	-1	-1	1	6	6/3=2
Z		- 3M	5	0	M	2/5+M	- M	-	
C - Z		3+3M	0	0	-M	-2/5-2M	0	6M+30	

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

x_1 هو المتغير الداخل للأساس.

A_3 هو المتغير الخارج من الأساس.

(3) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثالث:

Cof		3	5	0	0	- M	- M	RHS	
Var		x_1	x_2	S_1	S_3	A_2	A_3		
0	S_1	0	0	1	1/3	1/3	-1/3	2	
5	x_2	0	1	0	0	1/2	0	6	//////
3	x_1	1	0	0	-1/3	-1/3	1/3	2	//////
Z		3	5	0	-1	3/2	1	36	
C - Z		0	0	0	1	-M-3/2	-M-1		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

S_3 هو المتغير الداخل للأساس.

S_1 هو المتغير الخارج من الأساس.

(1/3) هو عنصر الدوران.

- الجدول الرابع:

Cof		3	5	0	0	- M	- M	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_3	A_2	A_3	
0	S_3	0	0	3	1	1	-1	6
5	x_2	0	1	0	0	1/2	0	6
3	x_1	1	0	1	0	5/2	0	4
Z		3	5	3	0	5/2	0	42
C - Z		0	0	-3	0	-M-5/2	-M	

شرط الامثلية محقق، الحل الأمثل هو: $x_1= 4;\ x_2=6;\ Z=42$

المحاضرة الخامسة

حالات خاصة في البرمجة الخطية

1)- *حالة عدم وجود الحل (تعذر الحل)*: وتحدث هذه الحالة إذا كان البرنامج يضم قيود متعارضة، حيث تكون منطقة الحل للقيود في الطريقة البيانية متعاكسة ولا تتقاطع في منطقة حل واحدة للقيود، أما في الطريقة المبسطة فيتم الوصول إلى جدول الحل الأمثل ولكن احد المتغيرات الاصطناعية يكون ضمن المتغيرات الأساسية وغير معدوم.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$

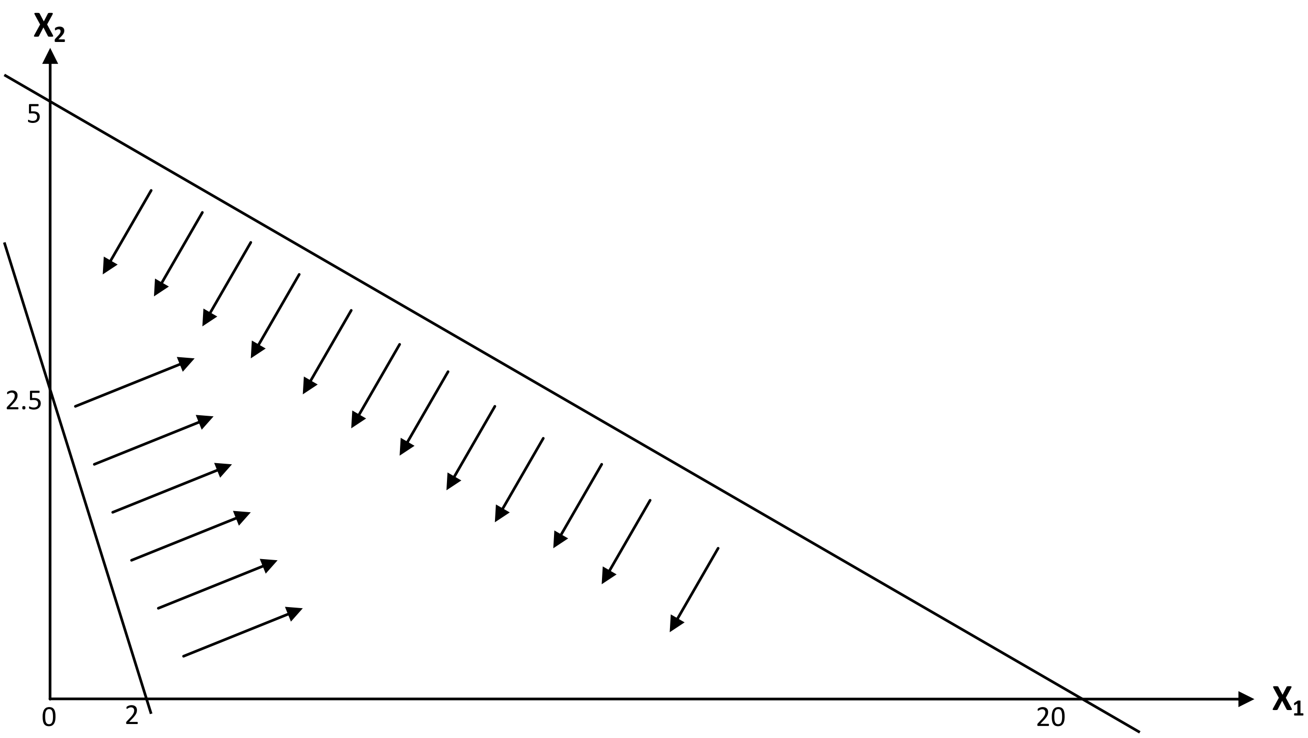
Subject to:

$5/2\, x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + 4x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



نلاحظ إن منطقتا الحل للقيدين الأول والثاني متعاكستان ولا يتقاطعان نهائيا.

- الحل بالطريقة المبسطة:

Cof		2	3	0	0	-M	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	
0	S_1	5/2	2	1	0	0	5
-M	A_2	1	4	0	-1	1	20
Z		-M	-4M	0	+M	-M	-20M
C - Z		2+M	3+4M	0	-M	0	

Cof		2	3	0	0	-M	RHS
Var		X_1	X_2	S_1	S_2	A_2	
3	x_2	5/4	1	1/2	0	0	5/2
-M	A_2	0	1	-2	-1	1	10
Z		15/4	3	3/2+2M	+M	-M	15/2 - 10M
C - Z		-7/4	0	-3/2-2M	-M	0	

نلاحظ أن شرط الامثلية في T_1 محقق ولكن المتغير A_2 ضمن متغيرات الأساس وقيمته 20.

2- *حالة منطقة الحل غير المحدودة (عدم توفر الحل)*: وفي هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وبالتالي لا يكون لها حدود وتظهر هذه الحالة جلية في الحل البياني, أما في الطريقة المبسطة فان هذه الحالة تحدث عندما يتعذر تحديد سطر الدوران (المتغير الخارج من الأساس) لان جميع عناصر الدوران سالبة أو معدومة.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

$$\text{Max } Z = 10\,x_1 + 20\,x_2$$

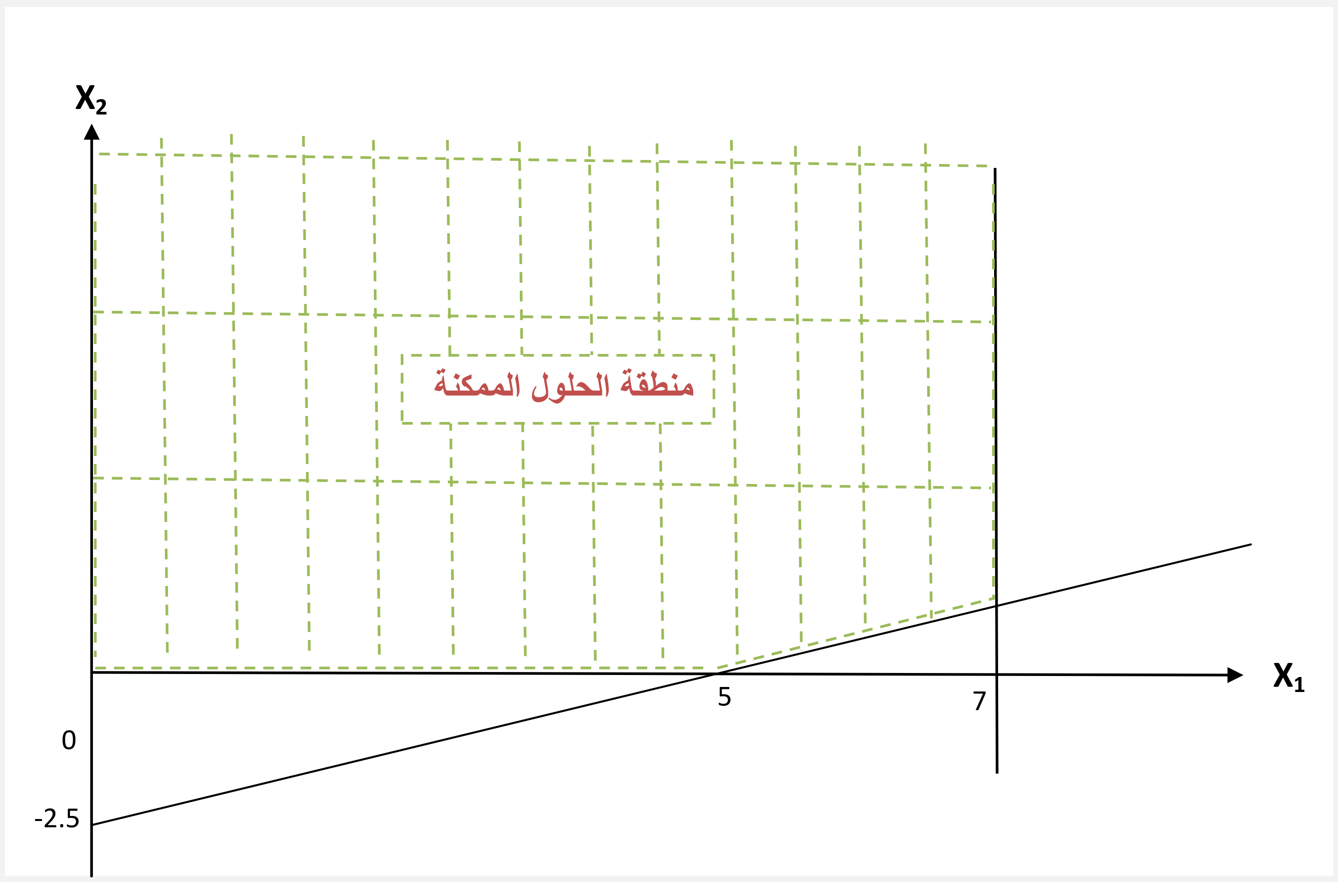
Subject to:

$$x_1 - 2\,x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

– الحل بالطريقة البيانية:



نلاحظ أن منطقة الحل مفتوحة من الأعلى (ليس لها حدود).

– الحل بالطريقة المبسطة:

Cof		10	20	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	1	-2	1	0	5
0	S_2	1	0	0	1	7
Z		0	0	0	0	0
C - Z		10	20	0	0	

لاحظ أن المتغير الداخل هو x_2 وعموده هو عمود الدوران ولكن يتعذر تحديد المتغير الخارج من الأساس (سطر الدوران) لأنه لا يوجد عنصر موجب من عناصر عمود الدوران (-2, 0) .

3)– *حالة الحل البديل (توفر عدة حلول بديلة)*: وهي احتمالية وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل واحد لدالة الهدف, ففي الحل البياني نجد أكثر من نقطة حل امثل قيمة أي أن قيمة (Z)

متساوية عند أكثر من نقطة من منطقة الحل, وعند الحل بالطريقة المبسطة تتحقق هذه الحالة عندما تكون قيمة (Z - C) لأحد المتغيرات غير الأساسية تساوي " صفر " فيمكن أن يتحول هذه المتغير إلى متغير أساسي ويتكون جدول سمبلاكس جديد يعطي نفس الحل.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2$

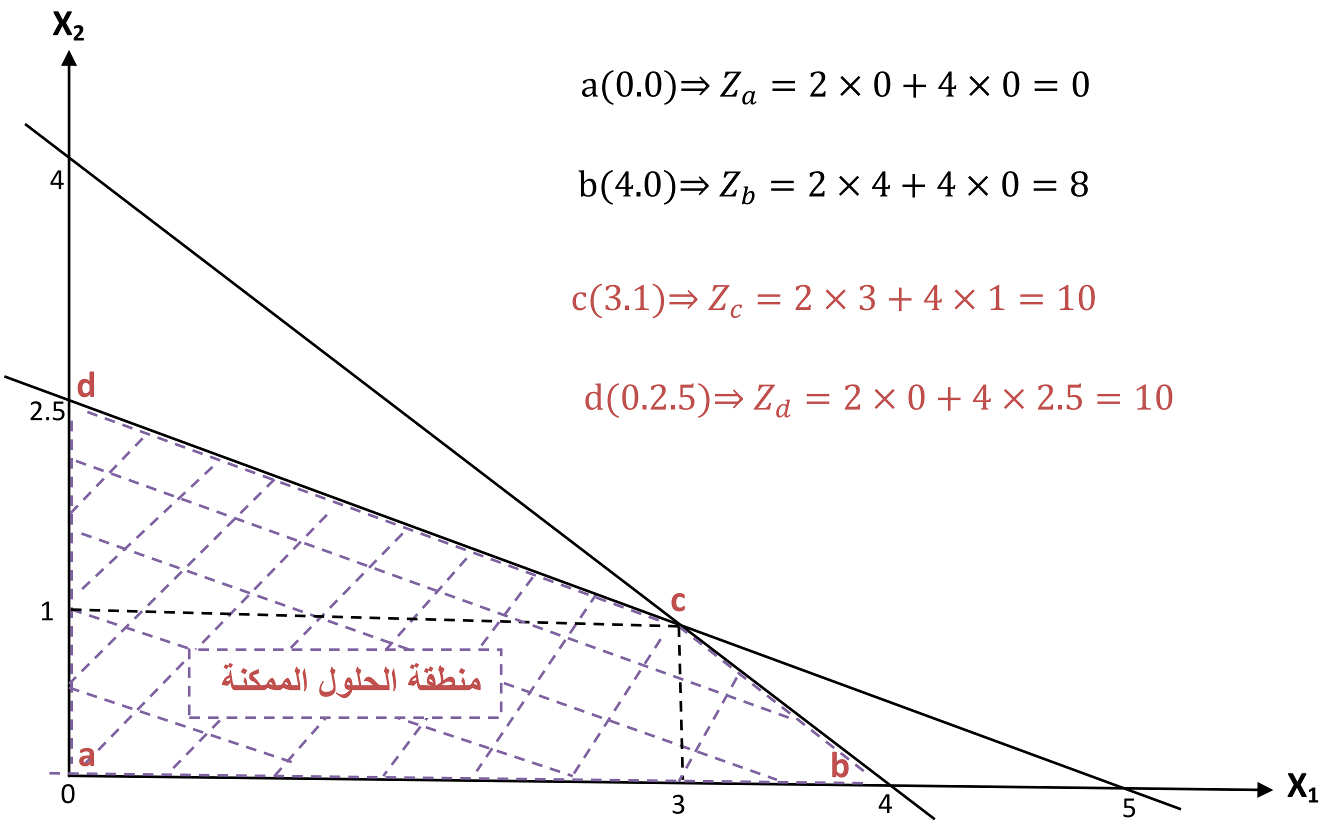
Subject to:

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



$a(0.0) \Rightarrow Z_a = 2 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

$b(4.0) \Rightarrow Z_b = 2 \times 4 + 4 \times 0 = 8$

$c(3.1) \Rightarrow Z_c = 2 \times 3 + 4 \times 1 = 10$

$d(0.2.5) \Rightarrow Z_d = 2 \times 0 + 4 \times 2.5 = 10$

نلاحظ أن قيمة (Z) عند النقطة $C(3,1)$ هي 10 وأيضا عند النقطة $D(0,2.5)$ هي 10, ولكن قيم هذه النقاط مختلفة.

- الحل بالطريقة المبسطة:

Cof		2	4	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	1	2	1	0	5
0	S_2	1	1	0	1	4
Z		0	0	0	0	0
C - Z		2	4	0	0	

Cof		2	4	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
4	x_2	1/2	1	1/2	0	5/2
0	S_2	1/2	0	-1/2	1	3/2
Z		2	4	2	0	10
C - Z		0	0	0	0	

Cof		2	4	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
4	x_2	0	1	1	-1	1
2	x_1	1	0	-1	2	3
Z		2	4	2	0	10
C - Z		0	0	2	0	

وهنا نجد أن الجدول الثاني T_1 والجدول الثالث T_2 تعطي نفس القيمة لدالة الهدف ($Z=10$) ولكن بقيم مختلفة لـ x_1 و x_2 كما في الحل البياني.

4)- *حالة التكرار (الانحلال)*: تظهر هذه الحالة عند الحل بالطريقة المبسطة إذا كان واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي قيمته صفر وبذلك فان الحل لا يتغير ويتكرر, إما الطريقة البيانية فإنها تظهر أن احد القيود إضافي وليس له أي تأثير على الحل.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

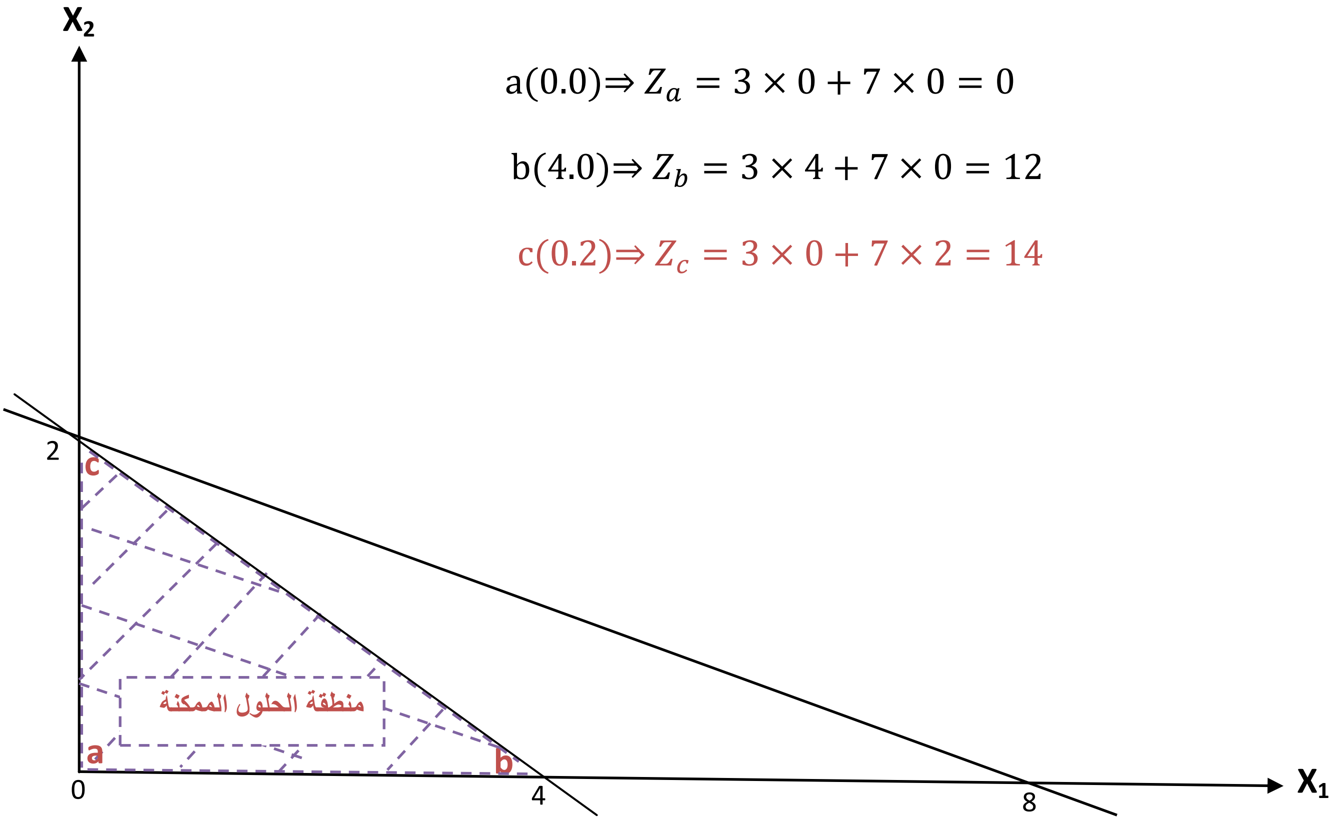
Max $Z = 3\,x_1 + 7\,x_2$
Subject to:
$2\,x_1 + 8\,x_2 \le 16$
$x_1 + 4\,x_2 \le 8$
$x_1, x_2 \ge 0$

– الحل بالطريقة البيانية:

$$a(0.0) \Rightarrow Z_a = 3 \times 0 + 7 \times 0 = 0$$

$$b(4.0) \Rightarrow Z_b = 3 \times 4 + 7 \times 0 = 12$$

$$c(0.2) \Rightarrow Z_c = 3 \times 0 + 7 \times 2 = 14$$



نلاحظ أن القيد الأول ليس له أي تأثير على منطقة الحل.

– الحل بالطريقة المبسطة:

Cof		3	7	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	2	8	1	0	16
0	S_2	2	4	0	1	8
Z		0	0	0	0	0
C - Z		3	7	0	0	

Cof		3	7	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
3	x_2	1/4	1	1/8	0	2
0	S_2	1	0	-1/2	1	0
Z		7/4	7	7/8	0	14
C - Z		5/4	0	-7/8	0	

Cof		3	7	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	
3	x_2	0	3	1/4	-1/4	2
7	x_1	1	3	-1/2	1	0
Z		3	7	1/4	5/4	14
C - Z		0	0	-1/4	-5/4	

نلاحظ أن الحل في الجدول الثالث T_2هو نفسه في الجدول الثاني T_1 وبالتالي لم يتغير.

المحاضرة السادسة

الثنائية (النموذج المقابل)

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية **Primal Models**، ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب أخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل(الثنائي) **Dual Model**، أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل له ومشتق منه.

مميزات النموذج المقابل(الثنائي)

– يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل عندما يصعب حل النموذج الأولي.

– يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابل عند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل النموذج الأولي إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة.

– يساعد النموذج المقابل إلى إجراء تحليل ما بعد الامثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل

1– نعكس صيغة دالة الهدف, فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تعظيم Max فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تصغير Min والعكس بالعكس.

2– عدد القيود في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد المتغيرات في النموذج المقابل، وعدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد القيود في النموذج المقابل.

3– استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز X في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار إليها بالرمز U في النموذج المقابل, وتحويل رمز دالة الهدف من Z_p في النموذج الأولي إلى Z_d في النموذج المقابل.

4– جعل قيم الجانب الأيمن للقيود في النموذج الأولي معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل.

5- جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي قيم الإطراف اليمنى لقيود النموذج المقابل.

6- تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في قيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات).

7- تغيير إشارة القيود من ≥ إلى ≤ أو العكس.

ملاحظة

1- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تعظيم Max فان إشارة جميع القيود يجب أن تكون اقل من أو يساوي (≤)، وأما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تصغيرMin فان إشارة جميع القيود يجب أن تكون اكبر من أو يساوي (≥).

2- إذا كانت إشارة قيد مساواة (=) في النموذج الأولي فان المتغير المقابل له في النموذج المقابل يكون متغير حر (غير محدد الإشارة)، وإذا كان متغير من متغيرات النموذج الأولي حر فان إشارة القيد الذي يقابله في النموذج المقابل مساواة (=).

مثال: اكتب النموذج المقابل لكل نموذج من النماذج الأولية التالية:

$$\text{Max } Z_p = 14x_1 + 20x_2 + 18x_3$$
S/T
$$5x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 220$$
$$3x_1 + 10x_2 + 7$$
$$x_3 \leq 360$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z_p = 200x_1 + 150x_2$$
S/T
$$5x_1 + 12x_2 \geq 100$$
$$6x_1 + 10x_2 \geq 180$$
$$4x_1 + 15x_2 \geq 280$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z_p = 3x_1 + 7x_2 - 5x_3$$
S/T
$$x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 14$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 22$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z_p = 10x_1 + 20x_2$$
S/T
$$5x_1 + 4x_2 = 40$$
$$2x_1 + x_2 \geq 36$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1- النموذج الأول صيغة دالة الهدف **Max** وجميع إشارات القيود (≤) إذن النموذج المقابل هو:

$$\text{Min } Z_d = 220\ U_1 + 360\ U_2$$

S/T

$$5\ U_1 + 3\ U_2 \leq$$

$$4\ U_1 + 10\ U_2 \leq 20$$

$$8\ U_1 + 7\ U_2 \leq 18$$

$$U_1, U_2 \geq 0$$

2- النموذج الثاني صيغة دالة الهدف **Min** وجميع إشارات القيود (≥) إذن النموذج المقابل هو:

$$\text{Max } Z_d = 100\ U_1 + 180\ U_2 + 280\ U_3$$

S/T

$$12 \quad 5\ U_1 + 6\ U_2 + 4\ U_3 \leq 200$$

$$U_1 + 10\ U_2 + 15\ U_3 \leq 150$$

$$U_1, U_2, U_3 \geq 0$$

3- النموذج الثالث بما أن صيغة دالة الهدف **Min** فيجب تحويل إشارة القيد الثاني من (≤) إلى (≥) وذلك بضرب طرفيه في (1-) ليصبح النموذج كما يلي:

$$\text{Min } Z_p = 3\ x_1 + 7\ x_2 - 5\ x_3$$

S/T

$$x_1 + 5\ x_2 + x_3 \geq 14$$

$$-2x_1 - 3\ x_2 \geq -22$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ويكون بذلك النموذج المقابل له كما يلي:

$Max\ Z_d = 14\ U_1 - 22\ U_2$

S/T

$4\ U_1 - 2\ U_2 \leq 3$
$5\ U_1 - 3\ U_2 \leq 7$

$1\ U_1 + 0\ U_2 \leq -5$
$U_1, U_2 \geq 0$

4– النموذج الرابع صيغة دالة الهدف **Min** إشارة القيد الأول مساواة فبذلك يكون المتغير الأول في النموذج المقابل حر، وإشارة القيد الثاني (≤) إذن النموذج المقابل هو:

$Max\ Z_d = 40\ U_1 + 36\ U_2$

S/T

$5\ U_1 + 2\ U_2 \leq 10$

$4\ U_1 + 1\ U_2 \leq 20$

$U_1, U_2 \geq 0$ غير محدد الإشارة

العلاقة بين الأصلية والثنائية:

1– إذا وجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

2– من خلال الحل الأمثل للأصلية والثنائية تكون قيمة الحل الأمثل متساوية لكليهما.

3– مسائل التعظيم Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة التقليل Min.

4– لأي زوج أصلي ثنائي حل عملي.

5– يمكن استنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل من الحل الأمثل للنموذج الأولي والعكس بالعكس، وهذا عن طريق العلاقة التالية:

الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	**يساوي**	**عناصر السطر Z لمصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية**

ملاحظة: تكون هده العلاقة صالحة بتغيير مصطلحات الثنائية والأصلية لكل حالة.

قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل $(U_1, U_2, U_3 \ldots)$ هي قيم السطر (Z) المقابلة لمتغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

قيم الحل الأمثل للنموذج الأولي$(\mathbf{X_1, X_2, X_3} \ldots\ldots)$ هي قيم السطر (Z) المقابلة لمتغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

6– كما يمكن اختصار بعض الاختلافات بين الأصلية والثنائية في الجدول التالي:

	الأصلية	**الثنائية**
المتغيرات	**وحدات منتجة نهائية**	**هامش القيمة للمورد (قيمة الوحدة للمورد) أو مقدار دالة الهدف في حالة إضافة وحدة واحدة من المورد.**
دالة الهدف	**تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة (عدد الوحدات المنتجة) (هامش الربح للوحدة أو هامش التكلفة).**	**تخفيض هامش القيمة أو العكس (قيمة الوحدة للمورد) (المادة المستعملة)**
القيود	**قيود على إستعمال الموارد النادرة**	**لزوم لزيادة الربح لكل منتج**

مثال: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z_p = 500\ x_1+100\ x_2+ 150\ x_3$$

S/T

$x_1 + x_2 + 2\ x_3 \geq 40$

$x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_3 \geq 10$

$x_1 + x_2 \geq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

1- اكتب النموذج المقابل وأوجد حله الأمثل.

2- من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل استنتج الحل الأمثل للنموذج الأولي.

الحل:

1- كتابة النموذج المقابل وإيجاد حله الأمثل.

$$\text{Max } Z_d = 40\ U_1 + 10\ U_2+ 30\ U_3$$

S/T

$U_1+ U_2 + U_3 \leq 500$

$U_1+ 2\ U_2 + U_3 \leq 100$

$2\ U_1+ 2\ U_2 \leq 150$

$U_1, U_2, U_3 \geq 0$

جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل بالطريقة المبسطة:

		40	10	30	0	0	0	RHS
T_2		U_1	U_2	U_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	-1	0	1	-1	0	400
30	U_3	0	1	1	0	1	-1/2	25
40	U_1	1	1	0	0	0	1/2	75
Z		40	70	30	0	30	5	3750
Z - C		0	60	0	0	30	5	

الحل الأمثل للنموذج المقابل هو:

$U_1 = 75, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 25, \quad Z_d = 3750.$

2– استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

$x_1 = 0, \quad x_2 = 30, \quad x_3 = 5, \quad Z_P = Z_d = 3750.$

$Z_p = 500(0)+100\,(30)+ 150\,(5) = 3750$

تطبيقات

التمرين رقم (1): أوجد النموذج المقابل لكل نموذج من النماذج التالية واستنتج حلها.

1	2	3	4
Min $Z= 5x_1+3x_2$ **S/T** $3x_1 + 2x_2 \geq 20$ $6x_1 + x_2 \geq 30$ $x_1 , x_2 \geq 0$	**Min $Z= 5x_1+3x_2$** **S/T** $x_1 + 2x_2 \geq 2$ $2x_1 + x_2 \leq 3$ $x_1 \leq 1$ $x_1 , x_2 \geq 0$	**Max $Z= 3x_1+5x_2$** **S/T** $x_1 \leq 4$ $2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 \geq 18$ $x_1 , x_2 \geq 0$	**Min $Z= 6x_1+3x_2+5x_3$** **S/T** $6x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 20$ $3x_1 + 4x_2 \geq 16$ $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

حل التمرين رقم (1):

النموذج رقم 1:

Min $Z= 5 x_1+3 x_2$
S/T
$x_1 + 2 x_2 \geq 203$
$x_1 + x_2 \geq 306$
$x_1 , x_2 \geq 0$

النموذج المقابل هو:

Max $Z_d= 20U_1+ 30U_2$
S/T
$3U_1+ 6U_2 \leq 5$
$2U_1+ U_2 \leq 3$
$U_1, U_2 \geq 0$

جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي:

Cof		5	3	0	0	M	M	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
3	x_2	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3
5	x_1	1	0	1/9	-7/24	-1/9	2/9	40/9
Z		5	3	-13/9	-11/24	13/9	1/9	290/9
C - Z		0	0	13/9	11/24	M-13/9	M-1/9	

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو: $x_1= 40/9;\ x_2= 10/3;\ Z=290/3$

الحل الأمثل للنموذج المقابل هو: $U_1= 13/9$, $U_2= 1/9$, $Z_d= 290/9$

النموذج رقم 2:

$$\text{Min } Z= 5\,x_1+3\,x_2$$
S/T
$$x_1 + 2\,x_2 \geq 2$$
$$x_1 + \ \ x_2 \leq 3$$
$$x_1 \quad \leq 1$$
$$x_1\,,\, x_2 \geq 0$$

بما أن صيغة دالة الهدف تقليل فان جميع القيود يجب أن تكون (≥)، وبذلك سيتم تحويل إشارة القيدين الثاني والثالث ليكون شكل النموذج كما يلي:

$$\text{Min } Z= 5\,x_1+3\,x_2$$
S/T
$$x_1 + 2\,x_2 \geq 2$$
$$- x_1 - x_2 \geq -3$$
$$- x_1 \quad \geq -1$$
$$x_1\,,\, x_2 \geq 0$$

النموذج المقابل هو:

$$\text{Max } Z_d= 2U_1 - 3U_2 - U_3$$
S/T
$$U_1 - U_2 - U_3 \leq 2$$
$$2U_1- U_2+ 0U_3 \leq 3$$
$$U_1, U_2, U_3 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي:

Cof		**5**	**3**	**0**	**0**	**M**	**M**	**RHS**
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	
3	x_2	**1/2**	**1**	**-1/2**	**0**	**0**	**1/2**	**1**
0	S_2	**3/2**	**1**	**1/2**	**1**	**0**	**-1/2**	**2**
0	S_3	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
Z		**3/2**	**3**	**-3/2**	**0**	**0**	**3/2**	**3**
C - Z		**1/2**	**0**	**3/2**	**0**	**0**	**M-3/2**	

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو: $x_1= 0;\ x_2=1;\ x_3=0;\ Z=3$

الحل الأمثل للنموذج المقابل هو: $U_1= 3/2, \quad U_2= 0, \quad U_3=0 \quad Z_d= 3$

النموذج رقم 3: قيد المساواة يقابله متغير حر، القيد الثالث يجب تحويل إشارته ليكون شكل النموذج كما يلي:

$\text{Max } Z= 3 x_1+5 x_2$

S/T

$x_1 \leq 4$

$2 x_2 = 12$

$-3 x_1 - 2 x_2 \leq -18$

$x_1 , x_2 \geq 0$

النموذج المقابل هو:

$\text{Min } Z_d= 14U_1 +12U_2 -18 U_3$

S/T

$U_1 +0 U_2 - U_3 \geq 3$

$0U_1+2 U_2 -2U_3 \geq 5$

U_2 متغير حر $, U_1, U_3 \geq 0$

جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي:

Cof		3	5	0	0	- M	- M	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_3	A_2	A_3	
0	S_3	0	0	3	1	1	-1	6
5	x_2	0	1	0	0	1/2	0	6
3	x_1	1	0	1	0	5/2	0	4
Z		3	5	3	0	5/2	0	42
C - Z		0	0	-3	0	-M-5/2	-M	

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو: $x_1= 4;\ x_2=6;\ Z=42$

الحل الأمثل للنموذج المقابل هو: $U_1= 3, \quad U_2= 5/2, \quad U_3=0, \quad Z_d= 42$

التمرين رقم (2): ليكن لديك النموذج الخطي التالي :

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z_P = 15x_1 + 20x_2 + 24x_3\\
&\text{S/T}\\
&3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 120\\
&x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 60\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

المطلوب : - أكتب النموذج المقابل لهذا النموذج الخطي.

- حل النموذج المقابل بالطريقة البيانية.

- من قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل أوجد قيم الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

حل التمرين رقم (2):

- كتابة النموذج المقابل لهذا النموذج الخطي.

$$\begin{aligned}
&\text{Min } Z_d = 120U_1 + 60U_2\\
&\text{S/T}\\
&3U_1 + U_2 \geq 15\\
&U_1 + 5U_2 \geq 20\\
&3U_1 + 2U_2 \geq 24\\
&U_1, U_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- حل النموذج المقابل بالطريقة البيانية.

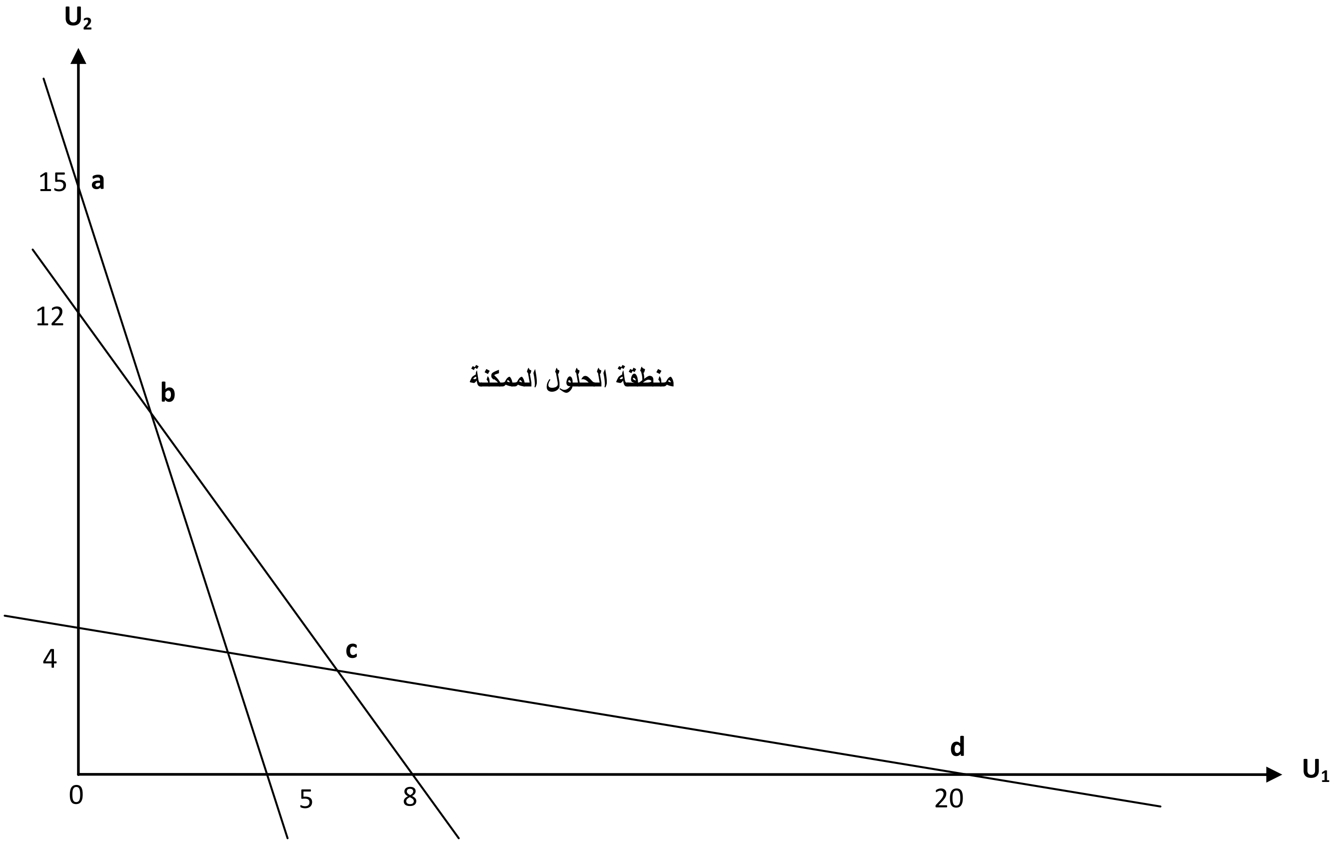
تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$3U_1 + U_2 = 15 \quad (U_1=0, U_2=15) \ (U_1=5, U_2=0)$

$U_1 + 5U_2 = 20 \quad (U_1=0, U_2=4) \ (U_1=20, U_2=0)$

$3U_1 + 2U_2 = 24 \quad (U_1=0, U_2=12) \ (U_1=8, U_2=0)$

التمثيل البياني:



حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة:

عند النقطة a: $a(0.15) \Rightarrow Z_a = 120 \times 0 + 60 \times 15 = 900$

عند النقطة b: $b(2.9) \Rightarrow Z_b = 120 \times 2 + 60 \times 9 = 780$

لإيجاد إحداثيات النقطة b نقوم بحل جملة معادلتي القيدين الأول والثالث

كما يلي:
$$\begin{cases} 3U_1 + U_2 = 15 \ldots\ldots(1) \\ 3U_1 + 2U_2 = 24 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في (−1) وجمعها مع المعادلة (3) نجد: $U_2 = 24 - 15 = 9$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $U_1 = {}^{15-9}/_{3} = 2$

عند النقطة c: لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين الثاني والثالث

كما يلي: $\begin{cases} U_1 + 5U_2 = 20 \ldots\ldots\ldots(2) \\ 3U_1 + 2U_2 = 24 \ldots\ldots(3) \end{cases}$

من المعادلة (2) نجد: $U_1 = 20 - 5U_2 \ldots\ldots\ldots(4)$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد: $3(20-5U_2)+2U_2 = 24 \Rightarrow U_2 = 36/13$

نعوض في المعادلة (4) نجد: $36U_1 = 20 - 5 \times 36/13 = 80/13$

$$c(36/13.80/13) \Rightarrow Z_c = 120 \times 36/13 + 60 \times 80/13 = 11760/13$$

عند النقطة d: $d(20.0) \Rightarrow Z_d = 120 \times 20 + 60 \times 0 = 2400$

الحل الأمثل: الحل الأمثل للنموذج عند النقطة C(2.9) وهو: $U_1 = 2, \quad U_2 = 9, \quad Z_d = 780$

- إيجاد قيم الحل الأمثل للنموذج الأولي من قيم الحل الأمثل

للنموذج المقابل $\begin{cases} 3U_1 + U_2 + t_1 = 15 \\ U_1 + 5U_2 + t_2 = 20 \\ 3U_1 + 2U_2 + t_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 27 \\ t_3 = 0 \end{cases}$

$$U_1 = 2 \neq 0 \Rightarrow S_1 = 0$$

$$U_2 = 9 \neq 0 \Rightarrow S_2 = 0$$

$$U_3 = 0 \Rightarrow S_1 \neq 0$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$$

$$t_2 = 27 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$t_3 = 0 \Rightarrow x_3 \neq 0$$

$$\begin{cases} 15\,x_1 + 20\,x_2 + 24\,x_3 = 780 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + S_1 = 120 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + S_1 = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x_1 + 24\,x_3 = 780 \ldots\ldots(1) \\ 3x_1 + 3x_3 = 120 \ldots\ldots(2) \\ x_1 + 2x_3 = 60 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (3) في (-15) ونجمعها مع المعادلة (1) نجد: $x_3 = 20$

نعوض في المعادلة (2) نجد: $x_1 = 20$

إذن قيم الحل الأمثل للنموذج الأولي هي:

$$x_1 = 20,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 20,\quad Z_P = 780$$

المحاضرة السابعة

تحليل الحساسية (تحليل ما بعد الامثلية)

افترضنا سابقاً بأن الوصول للحل الأمثل في البرمجة الخطية يفترض ثبات الأسعار سواء كانت للمواد الأولية أو السلع المنتجة و كذلك معرفة تامة للمصادر المتاحة (جميع الإمكانيات المتعلقة بالمسألة المدروسة ثابتة خلال الدراسة), لكن في الواقع العملي وعلى ضوء التجارب وبمجرد صياغة وحل نموذج البرمجة الخطية تظهر العديد من التساؤلات حول الحل المثالي لنموذج البرمجة الخطية .ولذا يثار الاهتمام بمدى حساسية الحل الأمثل للتغيرات في مختلف المعاملات الرقمية التي يحتويها النموذج ويرجع سبب تلك التغيرات إلى ظروف عدم التأكد التي تواجه صانع القرار, بالإضافة إلى بعض التطورات التي يمكن أن تحدث مثل:

1- تطور تقنيات الإنتاج: فقد يحدث تطور علمي يؤدي إلى زيادة الطاقة الإنتاجية للألأت المستخدمة في الإنتاج مما ينعكس على الطاقة الإنتاجية للمنشأة أو المصنع وبالتالي ينتج عن ذلك تغير في الإمكانيات المتاحة.

2- المواد الأولية المستخدمة في العملية الإنتاجية: حيث أن هذه المواد تتطور بشكل دائم نتيجة التطور العلمي, كما أن أسعار هذه المواد تتغير باستمرار تبعاً للتغيرات في العرض والطلب.

3- سرعة دوران اليد العاملة: وذلك نتيجة انتقالها من مشروع لأخر و من قطاع لأخر مما يؤدي على تقليل الطاقة الإنتاجية للمنشأة.

4- حالة الاقتصاد العام: أي ما يصيب الاقتصاد من حالات ازدهار و انتعاش وحالات ركود وكساد وهذا ما ينعكس على العرض والطلب من السلع وبالتالي على أسعارها ومقدار الربح المتحقق منها للمنشأة موضوع الدراسة.

يستمد تحليل الحساسية من حقيقة مفادها ضرورة معرفة مدى حساسية (تأثر) الحل المثالي للتغيرات في البيانات المتعلقة بالمدخلات المستخدمة في نموذج البرمجة الخطية (الأسعار, التكاليف, الموارد المتاحة، .....).

إن تحليل الحساسية لا يتطلب إعادة الحل للمشكلة ولكن يتم استنباطه من جدول الحل الأمثل لذا يطلق عليه (تحليل ما بعد الامثلية).

سيتم الاعتماد على هذا المثال في توضيح تحليل الحساسية.

مثال: تنتج شركة كهربائية ثلاث أنواع من المنتوجات الكهربائية تمر بثلاث أقسام إنتاجية كما يوضحه الجدول التالي :

	ساعات العمل المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
	قسم التصنيع	قسم التجميع	قسم الرقابة
أجهزة التكييف	5	5	10
أفران كهربائية	5	10	5
مجففات كهربائية	5	5	5
الساعات المتاحة	110	180	200

أوجد حجم الإنتاج الأمثل من المنتجات الثلاث إذا كان هامش الربح الوحدوي لأجهزة التكييف 145 و.ن وللأفران الكهربائية 200 و.ن وللمجففات الكهربائية 185 و.ن.

الحل: 1- كتابة البرنامج الخطي: نقرض أن x_1: عدد أجهزة التكييف المنتجة.

x_2: عدد الأفران الكهربائية المنتجة.

x_3: عدد المجففات الكهربائية المنتجة.

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 145\, x_1 + 200\, x_2 + 185\, x_3$

القيود: القيد الأول: قيد قسم التصنيع $5 x_1 + 5 x_2 + 5 x_3 \leq 110$

القيد الثاني : قيد قسم التجميع $5 x_1 + 10 x_2 + 5 x_3 \leq 180$

القيد الثالث: قيد قسم الرقابة $10 x_1 + 5 x_2 + 5 x_3 \leq 200$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2- حل النموذج بالطريقة المبسطة:

- تحويل النموذج إلى الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 145\, x_1 + 200\, x_2 + 185\, x_3 + 0\, S_1 + 0\, S_2 + 0\, S_3$$
$$5\, x_1 + 5\, x_2 + 5\, x_3 + S_1 = 110$$
$$5\, x_1 + 10\, x_2 + 5\, x_3 + S_2 = 180$$
$$10\, x_1 + 5\, x_2 + 5\, x_3 + S_3 = 200$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

- جدول الحل الأولي:

Cof		145	200	185	0	0	0	RHS	
Var		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
185	S_1	5	5	5	1	0	0	110	110/5=22
200	S_2	5	10	5	0	1	0	180	180/10=18
0	S_3	10	5	5	0	0	1	200	200/5=40
Z		0	0	0	0	0	0	0	
C - Z		145	200	185	0	0	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

X_2 هو المتغير الداخل للأساس.

S_2 هو المتغير الخارج من الأساس.

(10) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثاني:

Cof		145	200	185	0	0	0	RHS	
Var		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	5/2	0	5/2	1	-1/2	0	20	20×2/5=8
200	X_2	1/2	1	1/2	0	1/10	0	18	18×2=36
0	S_3	15/2	0	5/2	0	-1/2	1	110	110×2/5=44
Z		100	200	100	0	20	0	3600	
C - Z		45	0	85	0	-20	0		

شرط الامثلية غير محقق، ننتقل إلى جدول جديد

X_3 هو المتغير الداخل للأساس.

S_1 هو المتغير الخارج من الأساس.

(5/2) هو عنصر الدوران.

- الجدول الثالث:

Cof		145	200	185	0	0	0	RHS
Var		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
185	X_3	1	0	1	2/5	-1/5	0	8
200	X_2	0	1	0	-1/5	1/5	0	14
0	S_3	5	0	0	-1	0	1	90
Z		185	200	185	34	3	0	4280
C - Z		-40	0	0	-34	-3	0	

شرط الامثلية محقق، الحل الأمثل هو: لكي تحقق الشركة أعظم ربح يقدر بـ 4280 و.ن يجب إنتاج 14 فرن كهربائي و8 مجففات كهربائية.

ملاحظة: يمكن الوصول من جدول الحل الأمثل إلى عدة استنتاجات أهمها:

1- طبيعة الموارد: من خلال قيم المتغيرات الراكدة (S_1, S_2.....) في الحل الأمثل نحدد نوع المورد.

- موارد نادرة: استغلت كليا إذا كان $S_i = 0$.

- موارد متوفرة: لم تستغل كليا إذا كان $S_i > 0$، والجزء غير المستغل هو قيمة S_i.

2- طبيعة الأنشطة: أنشطة مربحة ($X_j \neq 0$)، و أنشطة غير مربحة ($X_j = 0$)

أولا- التغير في الإمكانيات المتاحة (ثوابت القيود)

1- تحديد المجال المسموح به للتغير في الموارد: وهو تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) دون أن يتأثر الحل (يبقى الحل امثلا).

لتحديد مجال التغير المسموح به لأي مورد من الموارد النادرة نستخدم العلاقة التالية:

$$b_i - Max^{-}\left|\frac{RHS}{S_i}\right| \leq \Delta b_i \leq b_i + Min^{+}\left[\frac{RHS}{S_i}\right]$$

حيث Δb_i : مجال التغير المسموح به في المورد i.

b_i : قيمة المورد.

$\frac{RHS}{S_i}$: حاصل قسمة كل قيمة من عمود الطرف الأيمن للقيود (RHS) في جدول الحل الأمثل على القيم المقابلة لها في عمود المورد المدروس(S_i).

$Min^{+}\left[\frac{RHS}{S_i}\right]$: أصغر حاصل قسمة موجب.

$Max^{-}\left|\frac{RHS}{S_i}\right|$: القيمة المطلقة لأكبر حاصل قسمة سالب.

– وبالتطبيق على المثال: حدد مجال التغير المسموح به في الموارد النادرة الذي يبقي على الحل امثلا؟

المورد الأول نادر لان $S_1 = 0$, أي انه في قسم التصنيع استغلت كل الساعات المتاحة 110 ساعة.

المورد الثاني نادر لان $S_1 = 0$, أي انه في قسم التجميع استغلت كل الساعات المتاحة 180 ساعة.

المورد الثالث متوفر لان $S_1 = 90$, أي انه في قسم الرقابة استغلت 110 ساعة وبقيت 90 ساعة عاطلة.

<u>مجال التغير المسموح به في المورد الأول:</u>

قيم عمود RHS	قيم عمود S_1	حاصل القسمة
8	2/5	20
14	−1/5	−70
90	−1	−90

ولإيجاد الحد الأعلى نقوم بأخذ أكبر حاصل قسمة سالب بالقيمة المطلقة ونقوم بجمعه مع قيمة المورد الأول $110 + |-70| = 180$

ولإيجاد الحد الأدنى نقوم بأخذ أصغر حاصل قسمة موجبة و نقوم بطرحه من قيمة المورد الأول

$$110 - 20 = 90$$

ويكون مدى التغير لإمكانيات القيد الأول هو: $90 \leq \Delta b_1 \leq 180$

ساعات عمل قسم التصنيع يمكن أن تزيد بـ 70 ساعة لتصل إلى 180 ساعة كحد أعلى أو تنخفض بـ 20 ساعة لتصل إلى 90 ساعة كحد أدنى.

مجال التغير المسموح به في المورد الثاني:

حاصل القسمة	قيم عمود S_2	قيم عمود RHS
−40	−1/5	8
70	1/5	14
/	0	90

$$180 - 70 \leq \Delta b_2 \leq 180 + |-40|$$

$$110 \leq \Delta b_2 \leq 220$$

إذن مجال التغير المسموح به في ساعات عمل قسم التجميع هو 110 ساعة كأدنى حد و220 ساعة كأقصى حد.

ملاحظة: بالنسبة للموارد المتوفرة فان الحد الأعلى لتغيرها غير محدد والحد الأدنى لتغيرها هو الكمية المستغلة.

2- تحديد أثر التغير في الموارد قيم الحل الأمثل: إن أي تغير في الموارد ضمن المجال المسموح به سيؤثر على قيم الطرف الأيمن لجدول الحل الأمثل (قيم الحل الأمثل)، ويمكن ايجاد قيم الحل الأمثل الجديدة في حالة تغير قيمة مورد أو اكثر من خلال العلاقة التالية:

$$\begin{pmatrix} \text{عمود} \\ \text{الموارد} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{المصفوفة} \\ \text{الاستراتيجية} \\ \text{مصفوفة الموارد} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{القيم} \\ \text{المثلى} \\ \text{الجديدة} \end{pmatrix}$$

- وبالتطبيق على المثال: ما هو اثر زيادة ساعات العمل في قسم التجميع بـ 20 ساعة وانخفاض ساعات عمل قسم التصنيع الى 100 ساعة على التشكيلة المثلى للإنتاج.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 15/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

إذن هذا التغير في الموارد يغير قيم الحل الأمثل إلى:

$x_3=0,\ x_2=20,\ S_3+100$

$$Z_P = 145(0) + 200(20) + 185(0) = 4000$$

ثانيا – التغير في معاملات متغيرات دالة الهدف:

1– تحديد المجال المسموح به للتغير في معاملات متغيرات دالة الهدف: وهو تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لتغير معاملات المتغيرات في دالة الهدف (الربح, التكلفة,....) والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثلا.

لتحديد مجال التغير المسموح به في أحد معاملات المتغيرات الأساسية نستخدم العلاقة التالية:

$$C_j - Min^{+}\left[\frac{Z-C}{X_j}\right] \leq \Delta C_j \leq C_j + Max^{-}\left|\frac{Z-C}{X_j}\right|$$

$\frac{Z-C}{X_j}$: حاصل قسمة كل قيمة من السطر $(Z - C)$ على القيم المقابلة لها في سطر المتغير المدروس.

$Max^{-}\left|\frac{Z-C}{X_j}\right|$: أكبر قيمة سالبة من نواتج القسمة بالقيمة المطلقة.

$Min^{+}\left[\frac{Z-C}{X_j}\right]$: أصغر قيمة موجبة من نواتج القسمة.

– وبالتطبيق على المثال: أوجد مجال التغير المسموح به في معاملات الأنشطة المربحة.

النشاط X_1 هو نشاط غير مربح ($x_1=0$)

الأنشطة X_2 و X_3 هي أنشطة مربحة ($x_2=14$ و $x_3=8$)

مجال التغير المسموح به في معامل النشاط x_2:

قيم السطر Z –C	40	0	0	34	3	0
سطر المتغير X_2	0	1	0	–1/5	1/5	0
حاصل القسمة	/	0	/	–170	15	/

$$200-15 \leq \Delta C_2 \leq 200+|-170|$$

$$185 \leq \Delta C_2 \leq 370$$

الحد الأدنى المسموح به في تغير ربح الفرن الواحد هو 185 و.ن و الحد الأعلى المسموح به في تغير ربح الفرن الواحد هو 370 و.ن.

مجال التغير المسموح به في معامل النشاط x_3:

قيم السطر Z –C	40	0	0	34	3	0
سطر المتغير X_3	1	0	1	2/5	–1/5	0
حاصل القسمة	40	/	0	85	–15	/

$$185-85 \leq \Delta C_3 \leq 185+|-15|$$

$$100 \leq \Delta C_3 \leq 200$$

أي أن معامل النشاط x_3 (الربح الوحدوي للمجففات الكهربائية) يتغير في المجال [100,200]

ويبقى الحل أمثلا.

ملاحظة: بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية في الحل الأمثل (الأنشطة غير المربحة) يتم تحديد مجال التغير المسموح به في معاملها بموجب العلاقة التالية: قيمة Z المقابلة له $\leq \Delta C_j \leq -\infty$

- في مثالنا مجال التغير المسموح به في معامل النشاط x_1 هو $-\infty \leq \Delta C_1 \leq 185$

2-- تحديد أثر تغير معاملات متغيرات دالة الهدف على الثنائية المثلى: إن أي تغير في معاملات الأنشطة في دالة الهدف لن يؤثر في قيم الحل الأمثل للأصلية (عمود الموارد) بل يؤثر فقط على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف, ولإيجاد اثر ذلك التغير نستخدم العلاقة التالية:

$$\begin{pmatrix} \text{المصفوفة} \\ \text{الاستراتيجية} \\ \text{مصفوفة الموارد} \end{pmatrix} \times \left(\text{معاملات متغيرات الاساس في الحل الامثل}\right) = \left(\text{القيم الجديدة المثلى للثنائية}\right)$$

- وبالتطبيق على المثال: لو فرضنا أن معامل النشاط x_2 أصبح 300 ومعامل النشاط x_3 أصبح 200 ما هو اثر ذلك على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف,

بعبارة أخرى ما هو اثر تغير دالة الهدف إلى الشكل:

$\text{Max } Z = 145\ x_1 + 300\ x_2 + 200\ x_3$ على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف

$$(U_1 \quad U_2 \quad U_3) = (200 \quad 300 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (20 \quad 20 \quad 0)$$

$$Z_d = 110(20) + 180(20) + 200(0) = 5800$$

$$Z_P = 145(0) + 300(14) + 200(8) = 5800$$

تطبيقات

التمرين رقم (1): لديك جدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z_P = 6\,x_1 + 4\,x_2 + 10\,x_3$$

S/T

$$3\,x_1 + x_2 \leq 400$$
$$x_2 + 2\,x_3 \leq 240$$
$$2\,x_1 + x_2 + x_3 \leq 360$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Cof		6	4	10	0	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
			1/4			3/4	-3/2	
			a			1/2	0	
			1/4			b	1/2	
Z			13/2			7/2		
C- Z		0		0	0			

المطلوب:- أكمل الجدول:

1- متغيرات الأساس ومعاملاتها.

2- قيم أعمدة المتغيرات X_1 ، X_3، S_1.

3- قيم كل من a و b.

4- عناصر عمود الموارد **RHS**.

5- عناصر السطر **Z**.

6- عناصر سطر التقييم.

- حدد طبيعة الموارد والأنشطة.

- ما هو مجال التغير المسموح به في الموارد النادرة الذي يبقي على الحل أمثلا.

- ما هو مجال التغير المسموح به في معاملات الأنشطة المربحة الذي يبقي على الحل أمثلا.

- ما أثر تغير المورد الثاني إلى 300 وحدة و المورد الثالث إلى 400 وحدة على حل البرنامج الأصلي وقيمة دالة الهدف.

- ما أثر تغير دالة الهدف إلى الشكل التالي : $\mathbf{Max\ Z_P = 5\ x_1 + 5\ x_2 + 15\ x_3}$ على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف.

حل التمرين رقم (1):

- إكمال الجدول:

1- متغيرات الأساس ومعاملاتها.

متغيرات الأساس هي: x_1، x_3، S_1

S_1: مكانه الأول في الأساس كما وضع في جدول الحل الأولي ومعامله 0.

x_3: وهو المتغير الذي دخل للأساس في الجدول الثاني لأن معامله في دالة الهدف هو الأكبر (10)، ولكن هل دخل في مكان S_2 أو S_3؟

نحسب حاصل قسمة قيم الطرف الأيمن على معاملات x_3 المقابلة لها في القيدين الثاني والثالث:

$$240/2=120;\ \ 360/1=360$$

$120 < 360$ إذن x_3 دخل في مكان S_2 ومكانه الثاني في الأساس. ويبقى المكان الثالث للمتغير x_1.

معاملات x_1 ، x_3 هي على التوالي 6 ، 10.

2- قيم أعمدة المتغيرات x_1 ، x_3، S_1 وهي أعمدة متغيرات الأساس عبارة عن أشعة وحدة.

3- قيم كل من a و b

$$(0 \times 1/4) + (10 \times a) + (6 \times 1/4) = 13/2\ \Rightarrow a = 1/2$$

$$(0\times 3/2)+(10\times 1/2)+(6\times b)=7/2\ \Rightarrow b=-1/4$$

4- عناصر عمود الموارد RHS.

$$\begin{pmatrix}1 & 3/4 & -3/2\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}400\\240\\360\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\120\\120\end{pmatrix}$$

5- عناصر السطر Z.

$$Z_1=(0\times 0)+(10\times 0)+(6\times 1)=6$$
$$Z_3=(0\times 0)+(10\times 1)+(6\times 0)=10$$
$$Z_4=(0\times 1)+(10\times 0)+(6\times 0)=0$$
$$Z_6=(0\times(-3/2))+(10\times 0)+(6\times 1/2)=3$$
$$Z=\ (0\times 40)+(10\times 120)+(6\times 120)=1920$$

6- عناصر السطر C - Z.

$$(C-Z)_1=4-13/2=-5/2$$
$$(C-Z)_5=0-7/2=-7/2$$
$$(C-Z)_6=0-3=3$$

Cof		6	4	10	0	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	1/4	0	1	3/4	-3/2	40
10	x_3	0	1/2	1	0	1/2	0	120
6	x_1	1	1/4	0	0	-1/4	1/2	120
Z		6	13/2	10	0	7/2	3	1920
C - Z		0	-5/2	0	0	-7/2	-3	

- تحديد طبيعة الموارد والأنشطة:

- المورد الأول متوفر (S_1=40), المورد الثاني نادر (S_2=0), المورد الثالث نادر (S_3=0).

- النشاط x_1 مربح (x_1=120), النشاط غير مربح (x_2=0),النشاط x_3 مربح (x_3=120).

- مجال التغير المسموح به في الموارد النادرة الذي يبقي على الحل أمثلا.

مجال التغير المسموح به في المورد الثاني:

قيم عمود RHS	قيم عمود S_2	حاصل القسمة
40	3/4	160/3
120	1/2	240
120	−1/4	−480

$$240 - 160/3 \leq \Delta b_2 \leq 240 + |-480|$$
$$560/3 \leq \Delta b_2 \leq 720$$

مجال التغير المسموح به في المورد الثالث:

قيم عمود RHS	قيم عمود S_3	حاصل القسمة
40	−3/2	−80/3
120	0	/
120	1/2	240

$$360 - 240 \leq \Delta b_3 \leq 360 + |-80/3|$$
$$120 \leq \Delta b_3 \leq 1160/3$$

- مجال التغير المسموح به في معاملات الأنشطة المربحة الذي يبقي على الحل أمثلا.

مجال التغير المسموح به في معامل النشاط X_1:

قيم السطر Z −C	0	5/2	0	0	7/2	3
سطر المتغير X_1	1	1/4	0	0	−1/4	1/2
حاصل القسمة	0	10	/	/	−14	6

$$6 - 6 \leq \Delta C_1 \leq 6 + |-14|$$
$$0 \leq \Delta C_1 \leq 20$$

مجال التغير المسموح به في معامل النشاط X_3:

قيم السطر Z −C	0	5/2	0	0	7/2	3
سطر المتغير X_3	0	1/2	1	0	1/2	0
حاصل القسمة	/	5	/	/	7	$+\infty$

$$10 - 5 \leq \Delta C_3$$
$$5 \leq \Delta C_3$$

- أثر تغير المورد الثاني إلى 300 وحدة و المورد الثالث إلى 400 وحدة على حل البرنامج الأصلي وقيمة دالة الهدف.

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 150 \\ 125 \end{pmatrix}$$

إذن هذا التغير في الموارد يغير قيم الحل الأمثل إلى:

$$S_1 = 25, \quad x_3 = 150, \qquad x_1 = 125$$

$$Z_P = 6\,(125) + 4\,(0) + 10\,(150) = 2250$$

- أثر تغير دالة الهدف إلى الشكل التالي: $\mathbf{Max\ Z_P = 5\,x_1 + 5\,x_2 + 15\,x_3}$

على قيم الثنائية المثلى وقيمة دالة الهدف

$$(U_1 \quad U_2 \quad U_3) = (0 \quad 10 \quad 6) \times \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad 25/4 \quad 5/2)$$

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 25/4, \qquad U_3 = 5/2$$

$$Z_d = 400(0) + 240(25/4) + 360(5/2) = 2400$$

$$Z_P = 5\,(120) + 5\,(0) + 15\,(120) = 2240$$

التمرين رقم (2): لديك جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$\mathbf{Max\ Z_P = 100\,x_1 + 200\,x_2}$

S/T

$x_1 + x_2 \leq 150$

$4x_1 + 2x_2 \leq 440$

$x_1 + 4x_2 \leq 480$

$x_1 \leq 90$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Cof		100	200	0	0	0	0	RHS
Var		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
100	x_1	1	0	4/3	0	-1/3	0	40
0	S_2	0	0	-14/3	1	2/3	0	60
200	x_2	0	1	-1/3	0	1/3	0	110
0	S_4	0	0	-4/3	0	1/3	1	50
Z		100	200	200/3	0	100/3	0	26000
C-Z		0	0	-200/3	0	-100/3	0	

المطلوب : - حدد طبيعة الموارد والأنشطة.

- أوجد النموذج المقابل واستنتج حله.

- ما هو مجال التغير المسموح به في الموارد النادرة الذي يبقي على الحل أمثلا.

- ما هو مجال التغير المسموح به في معاملات الأنشطة المربحة الذي يبقي على الحل أمثلا.

التمرين رقم (3): لديك النموذج الخطي الأولي التالي :

$$\text{Max } Z_P = 40\,x_1 + 30\,x_2 + 20\,x_3$$

S/T

$$2x_1 + 5\,x_2 + 10x_3 \leq 900$$

$$2x_2 + 5x_3 + 3x_3 \leq 400$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600$$

$$x_1\,,\, x_2\,,\, x_3 \geq 0$$

المطلوب: - أكتب النموذج المقابل لهذا النموذج الخطي.

- أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل.

- من قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل استنتج قيم الحل الأمثل للنموذج الأولي.

المحاضرة الثامنة

مشاكل النقل

تعتبر مشكلة النقل أحد الحالات الخاصة في البرمجة الخطية وتعتبر من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع (أو المواد) من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة.

شروط استخدام طريقة النقل

- وجود مجموعة من مراكز أو مصادر التوزيع (المنابع)، وتمثل جانب العرض.
- وجود مجموعة من مراكز الاستلام أو الطلب (المصبات), وتمثل جانب الطلب.
- توفر مجموعة من بدائل النقل الممكنة لكل بديل منها تكلفة معينة وقابلية استيعابية معينة.
- وجود هدف يسعى صانع القرار لتحقيقه, وغالبا ما يكون الهدف النقل بأقل تكلفة ممكنة.
- يجب أن يتساوى مجموع المعروض في مصادر التوزيع مع مجموع المطلوب مراكز الطلب.
- تجانس الموارد (نفس وحدة القياس: طن, كلغ, لتر,......).

الصيغة العامة لنموذج النقل

بافتراض وجود (m) مصدر من مصادر التوزيع و(n) مركز من مراكز الطلب، فان الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل هي على النحو التالي:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,3,4, \dots \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_i \qquad j = 1,2,3,4, \dots \dots, n.$$

$$X_{ij} \geq 0$$

لتوضيح عناصر ومكونات نموذج مشكلة النقل لا بد من بناء جدول النقل الذي على أساسه يتم إيجاد الحل والذي يأخذ عادة الشكل التالي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	....	D_n	العرض
S_1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	....	X_{1n} C_{1n}	a_1
S_2	X_{21} C21	X_{22} C22	....	X_{2n} C2n	a_2
			....		
S_m	X_{m1} Cm1	X_{m2} Cm2	....	X_{mn} Cmn	a_m
الطلب	b_2	b_2	....	b_n	$\sum$ / $\sum$

دالة الهدف: الهدف هو تقليل تكاليف النقل الإجمالية.

$$\text{Min } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \cdots \ldots . \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . +C_{mn}X_{mn}$$

القيود:

- قيود مصادر الإنتاج: تساوي الكمية المعروضة في كل مصدر مع الكميات الموزعة منه نحو جميع مراكز الطلب.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \cdots \ldots \ldots \ldots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \cdots \ldots \ldots \ldots + X_{2n} = a_2$$

$$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \cdots \ldots \ldots + X_{mn} = a_m$$

- قيود مراكز الاستهلاك: تساوي الكمية المطلوبة في كل مركز مع الكميات الموزعة اليه من جميع مصادر الإنتاج.

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \cdots \dots \dots \dots + X_{m1} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \cdots \dots \dots \dots + X_{m2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \cdots \dots \dots .. + X_{mn} = b_n$$

شرط عدم السلبية:

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots \dots \dots \dots, X_{mn} \geq 0$$

حيث:

C_{ij}: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i نحو المركز j.

x_{ij}: الكمية المنقولة من المصدر i نحو المركز j.

a_i: الكمية المعروضة في المصدر i.

b_j: الكمية المطلوبة في المركز j.

طرق حل نموذج النقل الخطي

تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين الأولى هي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول وتتم بعدة طرق والثانية هي مرحلة اختبار الحل الأساسي وتحسينه وتتم بطريقتين.

أولا/ تحديد الحل الأولي: هذا الحل المبدئي يضمن أن كل منطقة إنتاجية توزع إنتاجها وأن كل مركز توزيع يشبع حاجته، حيث في الحل الأولي يجب تساوي العرض والطلب.

مثال: شركة الجنوب للنقل تريد نقل السلع من ثلاث مخازن (S_1, S_2, S_3) نحو ثلاث مراكز تسويق (D_1, D_2, D_3), الكمية المعروضة في كل مخزن والكمية المطلوبة في كل مركز وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلع مبينة في الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	1	8	100
S_2	7	4	3	250
S_3	6	2	4	200
الطلب	150	180	220	

- اوجد خطة النقل بأقل تكلفة.

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: من خلال اسم هذه الطريقة، فان التوزيع يكون في الخانة التي تقع في أقصى الشمال الغربي (أول خانة يسارا) حيث نطبق القاعدة:

$X_{ij} = \text{Min}\ (a_i\ ,\ b_j\ )$ وكلما نوزع كمية يتم تعديل الطلب والعرض.

إن عملية التوزيع بموجب هذه الطريقة تستمر بنفس الصف حتى يتم إغلاقه ونفاذ الكمية المعروضة في المصدر المقابل للصف المعني.

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

في البداية يجب التأكد من شرط التوازن: مجموع العرض = مجموع الطلب

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	100 (2)	(1)	(8)	100 0
S_2	50 (7)	180 (4)	20 (3)	250 200 20 0
S_3	(6)	(2)	200 (4)	200 0
الطلب	150 50 0	180 0	220 200 0	550 / 550

التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 2(100)+7(50)+4(180)+3(20)+4(200)=2130$$

طريقة أقل التكاليف: وهي أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية وتختلف عنها في إيجاد الحل الأولي، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في ملء الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا دائما بتطبيق قاعدة التوزيع $X_{ij} = \text{Min}\ (a_i\ ,\ b_j\ )$ حتى يتم استفاء كل العرض والطلب.

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة اقل التكاليف.

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	1 100	8	100 0
S_2	7 30	4	3 220	250 220 0
S_3	6 120	2 80	4	200 80 0
الطلب	150 120 0	180 80 0	220 0	550 550

التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z =1(100)+7(30)+3(220)+6(120)+2(80)=1850$$

طريقة فوجل التقريبية Vogel: وتعرف أيضا بطريقة الجزاء وتقوم هذه الطريقة على الخطوات التالية:

خ1- حساب الفرق بين أقل تكلفتين للأعمدة وكذلك للصفوف وتأشير هذه الفروق على جانبي الجدول.

خ2- تحديد العمود أو السطر ذو الفرق الأكبر.

خ3- نختار الخلية ذات التكلفة الأقل في السطر أو العمود المحدد ويتم إشباعها بالكامل وذلك بتطبيق قاعدة التوزيع $X_{ij} = Min\ (a_i\ ,\ b_j\ )$ ونعدل الطلب والعرض.

خ3- نعيد الخطوات السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

ملاحظة:

1- إذا تساوى اكبر فرق لأكثر من سطر أو عمود نحسب نأخذ الفرق الثاني ثم الثالث .... وهكذا, وإذا تساوت جميع الفروق نختار الخانة الأقل تكلفة.

2- تعتبر طريقة فوجل التقريبية أكثر دقة في توزيعها مقارنة بالطرق الأخرى فهي تمكننا من الوصول إلى الحل الأمثل أو حل قريب من الحل الأمثل.

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة فوقل التقريبية.

	D_1	D_2	D_3	العرض			
S_1	2 100	1	8	100	1		
S_2	7 30	4	3 220	250	1	1	4
S_3	6 20	2 180	4	200	2	2	2
الطلب	150	180	220				
	4	1	1				
	1	2	1				
	1		1				

التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550$$

وهي أقل من تكلفة مقارنة بالتكلفة عند استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو طريقة أقل التكاليف.

ثانيا/ اختبار أمثلية الحل الأولي

إن الحصول على الحل الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى للاختيار هل الحل الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل؟ وهل هو الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولا أمثل منه؟

وهناك طريقتين لاختيار أمثلة الحل هما طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل.

طريقة المسار المتعرج

وتسمى أيضا بطريقة الحجر المتنقل (القفز على الصخور)، وهي أسلوب تكراري الهدف منه بيان ما إذا كان الحل أمثلا أم أن هناك إمكانية لتحسينه وذلك عن طريق تقييم الخلايا الفارغة في جدول (الحل الأولي) لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموعة التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة، ويتم تقسيم أثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية كالتالي:

1. يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.
2. تكوين مسار مغلق من مستقيمات أفقية وعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.
3. يتم وضع إشارة (+) للخلية المراد تقييمها ثم إشارة (−) للخلية التي تليها في المسار، ثم إشارة (+) للخلية الموالية في المسار، وهكذا تتالي الإشارة الموجبة والسالبة حتى نصل إلى الخلية التي بدأنا منها.
4. نقوم بحساب التكلفة الغير مباشرة للخلية، وذلك بجمع كلف جميع الخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الإشارات عليها.
5. إذا كانت التكلفة غير مباشرة لخلية ما بالسالب فإن ذلك يعني أن شغل تلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.

6. في حالة وجود أكثر من خلية فارغة لها تكلفة غير مباشرة بالسالب، فإنه تعطي الأولوية للخلية صاحبة أكبر رقم سالب، حيث أن شغل تلك الخلية يكون أكثر فاعلية في خفض التكاليف.

7. أقل قيمة في الخلايا التي تحمل إشارة (−) يتم إضافتها إلى قيم الخلايا التي تحمل إشارة (+) وإنقاصها من قيم الخلايا التي تحمل إشارة (−).

8. تعديل الجدول وتقييم الخلايا الفارغة في هذا الجدول لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة كما سبق في جدول الحل الأولي ويكون الحل امثلا إذا كانت التكاليف غير المباشرة للخلايا الفارغة موجبة أو معدومة.

طريقة التوزيع المعدلة MODI

وتعتمد هذه الطريقة على الأرقام القياسية للصفوف والأعمدة على افتراض منطقي هو أن تكون هناك في كل صف أو عمود على الأقل خلية مشغولة واحدة لأنها ضرورية لاحتساب الأرقام القياسية لكل صف أو عمود، أما خطوات الطريقة فهي:

خ1- احتساب الرقم القياسي لكل صف Ui ولكل عمود Vj وذلك بالاعتماد على الخلايا المشغولة فقط من خلال ما يأتي:

- افتراض أن الرقم القياسي للصف الأول في جدول الحل الأول هو صفر أي $U_1=0$.

- احتساب الرقم القياسي للعمود الخاص بكل خلية مشغولة في الصف الأول وفق الصيغة:

$$\mathbf{C_{ij} = U_i + V_j}$$

- استخدام الأرقام القياسية لكل عمود ولكل صف أيضا التي تم التوصل إليها لاحتساب الأرقام القياسية للصفوف والأعمدة المتبقية.

خ2- تقييم الخلايا الفارغة بحساب التكاليف غير المباشرة لكل خلية فارغة باستخدام الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\sigma = C_{ij} - V_j - U_i}$$

خ4- يكون الحل امثلا إذا كانت التكاليف غير المباشرة للخلايا الفارغة موجبة أو معدومة, ولكن في حالة وجود تكاليف سالبة فان ذلك يعني أن شغل الخلايا الموافقة لها سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل (تحسين الحل).

خ5- من بين الخلايا ذات التكاليف السالبة نختار الخلية الأكثر سلبية في التكلفة لان شغلها يكون أكثر فاعلية في خفض التكاليف، ويتم عمل مسار مغلق لها بشرط:

- أن يبدأ المسار من الخلية الفارغة المعنية وينتهي عندها.

- أن يتألف المسار من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المملوءة في الزوايا القائمة.

خ6- وضع إشارة (+) للخلية الفارغة المراد ملؤها ثم إشارة (-) للخلية التي تليها في المسار ثم إشارة (+) للخلية التي تليها في المسار, وهكذا تتالي الإشارات (+) و (-) إلى نهاية المسار المغلق.

أقل قيمة في الخلايا التي تحمل إشارة (-) يتم إضافتها إلى قيم الخلايا التي تحمل إشارة (+) وإنقاصها من قيم الخلايا التي تحمل إشارة (-).

خ7- تعديل الجدول وفقا لما تم في الخطوة السابقة وإعادة الخطوات.

ملاحظة: إن تطبيق الطريقتين السابقتين يتطلب أن يكون الحل المراد اختبار أمثليته أساسي [عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة)= عدد الصفوف + عدد الأعمدة- 1]

مثال: اختبار أمثلية الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة اقل التكاليف لمؤسسة الجنوب.

عدد الخلايا المملوءة = عدد المراكز + عدد المصادر – 1 (الحل الأولي أساسي)

– حساب الرقم القياسي لكل صف U_i ولكل عمود V_j:

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	2	1 100	8	100	$U_1=0$
S_2	7 30	4	3 220	250	$U_2=2$
S_3	6 120	2 80	4	200	$U_3=1$
الطلب	150	180	220	550 550	
	$V_1=5$	$V_2=1$	$V_3=1$		

التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 1(100)+7(30)+3(220)+6(120)+2(80)=1850$$

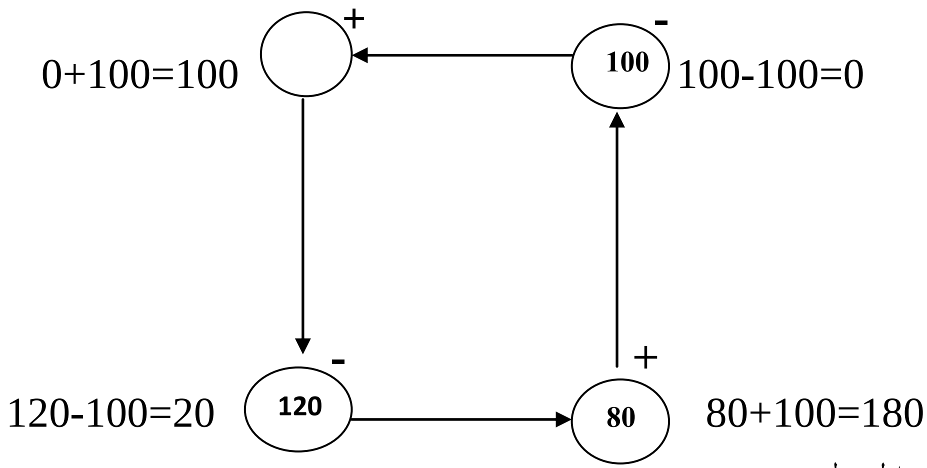
– تقييم الخلايا الفارغة:

$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$	الخلية
2–0–5=–3	S_1،D_1
8–0–1=7	S_1،D_3
4–2–1=1	S_2،D_2
4–1–1=2	S_3،D_3

الخلية (S_1،D_1) شغلها إلى تخفيض تكاليف النقل.

– المسار المغلق للخلية (S_1,D_1): موضح في الجدول

Min (100, 120) =100



– تعديل الجدول:

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	2 100	1	8	100	$U_1=0$
S_2	7 30	4	3 220	250	$U_2=5$
S_3	6 20	2 180	4	200	$U_3=5$
الطلب	150	180	220	550 550	
	$V_1=2$	$V_2=-3$	$V_3=-2$		

التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550$$

– إعادة الخطوات السابقة: (اختبار أمثلية الحل الجديد)

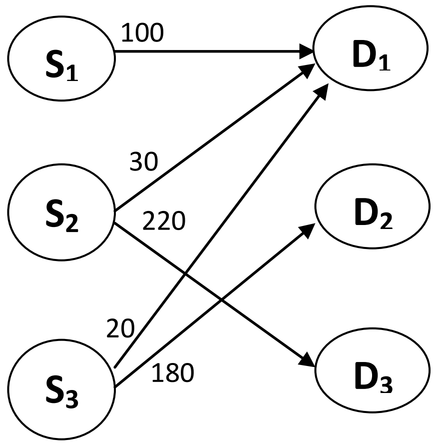
عدد الخلايا المملوءة = عدد المراكز + عدد المصادر – 1 (الحل أساسي)

– حساب الرقم القياسي لكل صف U_i ولكل عمود V_j: (موضحة في الجدول أعلاه)

- تقييم الخلايا الفارغة:

الخلية	$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
S_1،D_2	$1-0-(-3)= 3$
S_1،D_3	$8-0-(-2)=10$
S_2،D_2	$4-5-(-3)=2$
S_3،D_3	$4-5-(-2)=1$

بما أن التكاليف المباشرة لجميع الخلايا الفارغة موجبة فان الجدول السابق يعطي خطة النقل المثلى وهي:



التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550$$

تطبيقات

التمرين رقم (1): تقوم مؤسسة صناعية بإنتاج ثلاث أنواع من الكوابل (A; B; C), وتريد في سنة 2021 إنتاج 11000 وحدة: 3000 وحدة من A و3600 وحدة من B و4400 وحدة من C.

يتم إنتاج الكوابل في ثلاث ورشات إنتاجية، الطاقة الإنتاجية لكل ورشة هي: 2000 وحدة للورشة الأولى، 5000 وحدة للورشة الثانية، 4000 وحدة للورشة الثالثة. تكاليف إنتاج الكوابل في مختلف الورشات تظهر في الجدول التالي:

	A	B	C
الورشة الأولى	40	20	160
الورشة الثانية	140	80	60
الورشة الثالثة	120	40	80

المطلوب : - أكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة.

- توزيع إنتاج الكوابل على مختلف الورشات. (الحل الأولي يكون بمختلف الطرق).

حل التمرين رقم (1): - كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

	A	B	C	الطاقة الإنتاجية
الورشة 1	40	20	160	2000
الورشة 2	140	80	60	5000
الورشة 3	120	40	80	4000
الإنتاج المخطط	3000	3600	4400	11000 / 11000

$$\text{Min } Z = 40X_{11} + 20X_{12} + 160X_{13} + 140X_{21} + 80X_{22} + 60X_{23} + 120X_{31} + 40X_{32} + 80X_{33}$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 2000$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 5000$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 4000$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 3000$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 3600$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 4400$$
$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots \dots \dots \dots, X_{33} \geq 0$$

- إيجاد خطة الإنتاج بأقل تكلفة (الحل الأولي يكون بمختلف الطرق).
- إيجاد الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

في البداية يجب التأكد من شرط التوازن: مجموع العرض = مجموع الطلب

	A	B	C	الطاقة الإنتاجية
الورشة 1	40 2000	20	160	2000 0
الورشة 2	140 1000	80 3600	60 400	5000 4000 400 0
الورشة 3	120	40	80 4000	4000 0
الإنتاج المخطط	3000 1000 0	3600 0	4400 4000 0	11000 11000

التكلفة الإجمالية للإنتاج هي:

$$Z = 40(2000)+140(1000)+80(3600)+60(400)+80(4000)=852000$$

- إيجاد الحل الأولي بطريقة اقل التكاليف.

	A	B	C	الطاقة الإنتاجية
الورشة 1	40	20 2000	160	2000 0
الورشة 1	140 600	80	60 4400	5000 4400 0
الورشة 1	120 2400	40 1600	80	4000 1600 0
الإنتاج المخطط	3000 2400 0	3600 1600 0	4400 0	11000 11000

التكلفة الإجمالية للإنتاج هي:

$$Z = 20(2000)+140(600)+60(4400)+120(2400)+40(1600)=740000$$

- إيجاد الحل الأولي لمشكلة النقل فوقل التقريبية.

	A	B	C	الطاقة الإنتاجية			
الورشة 1	40 2000	20	160	2000 0	20		
الورشة 2	140 600	80	60 4400	50000 4400 0	20	20	80
الورشة 3	120 400	40 3600	80	4000 3600 0	40	40	40
الإنتاج المخطط	150	180	220				
	800	20	20				
	20	40	20				
	20		20				

التكلفة الإجمالية للإنتاج هي:

$$Z = 40(2000)+140(600)+60(4400)+120(400)+40(3600)=620000$$

- اختبار أمثلية الحل الأولي.

عدد الخلايا المملوءة = عدد المراكز + عدد المصادر – 1 (الحل الأولي أساسي)

- حساب الرقم القياسي لكل صف U_i ولكل عمود V_j:

	A	B	C	الطاقة الإنتاجية	
الورشة 1	40	20 2000	160	2000	$U_1=0$
الورشة 2	140 600	80	60 4400	5000	$U_2=40$
الورشة 3	120 2400	40 1600	80	4000	$U_3=20$
الإنتاج المخطط	3000	3600	4400	11000 11000	
	$V_1=100$	$V_2=20$	$V_3=20$		

التكلفة الإجمالية للإنتاج هي:

$$Z = 20(2000)+140(600)+60(4400)+120(2400)+40(1600)=740000$$

- تقييم الخلايا الفارغة:

$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$	الخلية
40–0–100= – 60	A,1و
160–0–20=140	C،1و
80–40–20=20	B,2و
80–20–20=40	C،3و

الخلية ($A,1$و) شغلها سيؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل.

- المسار المغلق للخلية ($A,1$و): موضح في الجدول

- تعديل الجدول:

	A	B	C	الطاقة الإنتاجية	
الورشة 1	40 / 2000	20	160	2000	$U_1=0$
الورشة 2	140 / 600	80	60 / 4400	5000	$U_2=100$
الورشة 3	120 / 400	40 / 3600	80	4000	$U_3=80$
الإنتاج المخطط	3000	3600	4400	11000 / 11000	
	$V_1=40$	$V_2=-40$	$V_3=-40$		

التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 40(2000)+140(600)+60(4400)+120(400)+40(3600)=620000$$

- إعادة الخطوات السابقة: (اختبار أمثلية الحل الجديد)

عدد الخلايا المملوءة = عدد المراكز + عدد المصادر – 1 (الحل أساسي)

- حساب الرقم القياسي لكل صف U_i ولكل عمود V_j: (موضحة في الجدول أعلاه)

- تقييم الخلايا الفارغة:

الخلية	$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
و$B,1$	$20-0-(-40)= 60$
و$C،1$	$160-0-(-40)=200$
و$B,2$	$80-100-(-40)=20$
و$C،3$	$80-80-(-40)=40$

بما أن التكاليف المباشرة لجميع الخلايا الفارغة موجبة فان الجدول السابق يعطي خطة النقل المثلى وهي:

- تنتج الورشة الأولى 2000 وحدة من A
- تنتج الورشة الثانية 600 وحدة من A و 4400 وحدة من C
- تنتج الورشة الثالثة 400 وحدة من A و 3600 وحدة من B

التكلفة الإجمالية للإنتاج هي: 620000 وحدة نقدية.

التمرين رقم (2): تقدر سعة ثلاث مستودعات (A, B, C) بالأعداد التالية من الحفلات وعلى التوالي (50, 60, 40)، هذه الحافلات مطلوبة عند أربع نقط انطلاق (X, Y, Z, H) وذلك بالأعداد التالية بالترتيب (30, 20, 70, 30) والمسافة بين كل مستودع ونقطة انطلاق موضحة بالكلم في الجدول التالي :

H	Z	Y	X	
17	8	10	16	A
15	10	14	13	B
12	11	8	20	C

المطلوب : ما هو العدد الأمثل من الحافلات التي تخرج من كل مستودع إلى كل نقطة انطلاق والذي يجعل إجمالي المسافات المقطوعة أقل ما يمكن.

التمرين رقم (3): مؤسسة لإنتاج الحليب لها ثلاث وحدات إنتاجية، الطاقة الإنتاجية اليومية لكل وحدة محددة كما يلي:

الوحدة A 30000 لتر – الوحدة B 60000 لتر – الوحدة C 80000 لتر.

وتعاقدت هذه المؤسسة مع أربع مراكز تسويقية، حيث قدرت الطلبات اليومية لهذه المراكز كما يلي:

المركز الأول 75000 لتر – المركز الثاني 35000 لتر – المركز الثالث 40000 لتر – المركز الرابع 20000 لتر.

تكاليف النقل بالنسبة لألف لتر من الحليب من الوحدات الإنتاجية إلى المراكز التسويقية تظهر في الجدول التالي:

المركز الرابع	المركز الثالث	المركز الثاني	المركز الأول	
500	600	700	900	A
1200	900	800	200	B
800	1000	300	400	C

المطلوب : - أكتب البرنامج الخطي لهذه المسألة.

- أوجد الحل الأولي للمسألة بمختلف الطرق (الزاوية الشمالية الغربية – أقل التكاليف– العقاب والجزاء)

- أوجد خطة التوزيع المثلى والتي تجعل تكاليف النقل اليومية في حدها الأدنى.

التمرين رقم (4): تقوم مؤسسة صناعية بإنتاج ثلاث أنواع من الكوابل (A; B; C), وتريد في سنة 2019 إنتاج 10000 وحدة: 5000 وحدة من A و2000 وحدة من B و3000 وحدة من C.

يتم إنتاج الكوابل في ثلاث ورشات إنتاجية، الطاقة الإنتاجية لكل ورشة هي: 6000 وحدة للورشة الأولى، 2000 وحدة للورشة الثانية، 3000 وحدة للورشة الثالثة. تكاليف إنتاج الكوابل في مختلف الورشات تظهر في الجدول التالي :

	A	B	C
الورشة الأولى	10	20	30
الورشة الثانية	50	60	70
الورشة الثالثة	90	80	40

المطلوب : توزيع إنتاج الكوابل على مختلف الورشات خلال سنة 2019 نظرا لعدم توفر المواد الخاصة بصنع هذا النوع من الكوابل.

قائمة المراجع

1- سليمان محمد مرجان, **بحوث العمليات**، ط1، دار الكتب الوطنية، بنغازي، 2002،

2- حيدر محمد فرحات، محمد سليمان، **بحوث العمليات**، ط1، دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، عمان، 1998.

3- محمد توفيق البلقيني، مرفت طلعت المحلاوي، **الأساليب الكمية في الإدارة**، دار المريخ للنشر، الرياض, السعودية, 2006،

4- أحمد الخطيب، خالد زيغان، **إدارة المعرفة ونظم المعلومات**، ط1، عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.

5- أكرم محمد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية (بحوث عمليات)**،ط1، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان،

6- فتحي خليل حمدان، رشيق رفيع مرعي، **بحوث العمليات**، ط6، دار وائل للنشر، بدون بلد النشر، 2011.

7- صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم حداد، **تطبيقات بحوث العمليات**، ط1، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن.

8- سهيلة عبد الله سعيد, **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**، دار الحامد، عمان، 2007.

9- محمد توفيق ماضي، محمد صالح الحناوي، **بحوث العمليات في التخطيط ومراقبة الإنتاج**، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2006.

10- محمد العزاوي، الإنتاج وإدارة العمليات –منهج كمي تحليلي, دار اليازوري للنشر،عمان، الأردن ،2006.

11- فريد النجار، **بحوث العمليات في الإدارة،** ط1، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2009.

12- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، **مدخل لبحوث العمليات،** ط1،دار وائل للنشر والتوزيع، عمان- الأردن.

13- مؤيد عبد الحسين الفضل, **الأساليب الكمية (نماذج خطية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج),** دار مجدلاوي, 2004.

14- محمد عبيدات، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار**،دار وائل، الأردن، 2006.

15- إبراهيم احمد مخلوف، **التحليل الكمي في الإدارة،** بدون دار نشر، الرياض،1994.

16- كاسر نصر منصور، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرارات الإدارية**،دار الحامد، الأردن، 2006.

17- علي علاونة ومحمد عبيدات، **بحوث العمليات في العلوم التجارية،** دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن،2000.

18- محمد راتول، **بحوث العمليات،** ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر, 2006،.

19- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات،** دار اليازوري, عمان، الأردن، 2008.

20- حمودي حاج صحراوي، **رياضيات المؤسسة كمدخل إلى التقنيات الكمية،** دار جيطالي ، برج بوعريريج، الجزائر.

21- حسن علي مشرقي, زياد عبد الكريم القاضي, **بحوث العمليات (تحليل كمي في الإدارة)**, دار المسيرة, عمان, 1997.

22- نبيل محمد مرسي, **الأساليب الكمية في الإدارة**, المكتب الجامعي الحديث, الإسكندرية, 2006.

23- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان, الأردن، 2008.

24- رشيق رفيق مرعي، فتحي خليل حمدان، **مقدمة في بحوث العمليات**، ط 4، 2004, دار وائل للنشر والتوزيع، عمان, الأردن.

25- عبد الرزاق عبد الرسول الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2001.

26- محمد عبد العال النعيمي وآخرون، **مقدمة بحوث العمليات**، ط 1، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، 1999.