Exercice 1. Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}$ comme suit :

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(On prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\| (x,y) \|_2=\sqrt{x^2+y^2}$).

1. Justifier que soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |xy|\leq x^2+y^2$.

2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$, de deux manières différentes (en utilisant: la définition de différentiabilité, les dérivées partielles).

Exercice 2. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}$ comme suit :

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Considérons l'espace $E=C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et l'application φ de E à $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f)=(f\circ\sin)(x)$ avec $x\in[0,1],\ f\in E$.

1. Montrer que φ est une application linéaire continue sur E.

2. Déduire sa différentielle. Est-ce que $\varphi\in C^1(E)$?.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et l'application $\varphi : L(E)\times L(E)\longrightarrow L(E)$ définie par $\varphi(u,v)=v\circ u$.

Montrer que φ est une application bilinéaire et continue. Déterminer sa différentielle.

Exercice 5. Soit E, F, G des espaces vectoriels normés, $f : E\times F\longrightarrow G$ une application bilinéaire continue et $u:\mathbb{R}\longrightarrow E$, $v:\mathbb{R}\longrightarrow F$ deux applications de classe C^1. On définit l'application φ sous la forme $\varphi(t)=f(u(t),v(t))$ pour tout t en $\mathbb{R}$.

- Calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 6. Considérons l'espace $E=C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et l'application φ définie par :

$$\varphi : E\longrightarrow\mathbb{R},\ \ f\longmapsto\varphi(f)=\int_0^1\frac{dx}{(f(x))^2+1}.$$

1. Calculer la dérivée de φ en f de E suivant le vecteur v de $E-\{0_E\}$.

2. Montrer que φ est différentiable en f de E, déterminer sa différentielle.