الفصل الاول

الاعداد المركبة و الطوبولوجيا في المستوي المركب

I) الاعداد المركبة:

تمهيد:

نعلم بأن مربع أي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب أو معدوم أي $\forall x \in IR, x^2 \geq 0$ و منه المساوة $\forall x \in IR, \exists a \in IR_+^*; x^2 = -a$ غير محققة و بالتالي: المعادلة $x^2 + a = 0; a > 0$ لا تقبل حلا في IR
لذى نبحث عن مجموعة أعداد تحقق ما يلي:

1) لكل معادلة من الشكل $x^2 + a = 0; a > 0 \left(a \in IR_+^*\right)$ تقبل حل على الأقل
مثلا: $x^2 + 1 = 0; \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftarrow x = \pm i$ أي $(\pm i)^2 = -1$
2) تقبل تمديد لكل من العمليتين +، x أي الجمع و الضرب العاديين معرفين بها
3) هذه المجموعة تحتوي المجموعة IR للأعداد الحقيقية (كل عدد حقيقي هو عدد من هذه المجموعة)

نسمي هذه المجموعة التي تحقق الشروط السابقة مجموعة الاعداد المركبة و نرمز إليها بالرمز C
و كل عنصر منها يسمى عدد مركب و ترمز إليه z

الشكل الجبري لعدد مركب:

تعريف: ليكن z عدد مركب بحيث $\forall (x, y) \in IR^2; z = x + iy$ $\quad (*)$
نسمي الصيغة (*) و نسمي x الجزء الحقيقي للعدد المركب z و نرمز إليه $\text{Re}(z)$ و نكتب $\text{Re}(z) = x$ ، و نسمي أيضا y الجزء الحقيقي للعدد المركب z و نرمز إليه $\text{Im}(z)$ و نكتب $\text{Im}(z) = y$ أي $z = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)$

حقل المجموعة C للأعداد المركبة:

الجمع:

ليكن عددان مركبان z_1 ، z_2 حيث $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بحيث $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in IR^2$
لدينا $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
واضح أن $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in C$
كذلك $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) = z_2 + z_1 \in C$ أي أن الجمع تبديلي
و إذا كان العدد المركب $z_3 = x_3 + iy_3; (x_3, y_3) \in IR^2$ و كان

$$(z_1 + z_2) + z_3 = ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) + x_3 + iy_3 = x_1 + iy_1 + ((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)) = z_1 + (z_2 + z_3)$$

نقول عن عملية الجمع أنها تجميعية
و معكوس العدد مركب $z = x + iy$ بالنسبة لعملية الجمع هو $-z = -x - iy$
و منه يمكن تعريف عملية الطرح $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ أو
$(x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
و من المساواة السابقة من أجل $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ نستنتج أن $0 = 0 + i0$ وهو العنصر الحيادي
من خلال الخطوات السابقة نكون قد بينا أن الجملة $(C, +)$ زمرة تبديلية.

الضرب: ليكن العددان المركبان z_1 ، z_2 حيث $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بحيث $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in IR^2$

لدينا $z_1.z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in C$

كذلك $z_1.z_2 = z_2.z_1 \in C$ أي أن الضرب تبديلي

و $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3) \in C$ أي أن الضرب تجميعي

العنصر الحيادي لعملية الضرب هو الواحد لأن $1 + i0 = 1$

مقلوب العدد المركب $z = x + iy \neq 0$ هو $z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ و هو العنصر النظير لعملية الضرب،

و بالتالي نعرف عملية القسمة $z_2 \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = z_2 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)\frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2}$

توزيعية الضرب على الجمع:

لتكن الاعداد المركبة z, w, p بحيث $z = x + iy$ ، $w = a + ib$ و $p = k + ih$

$$z.(w + p) = (x + iy)((a + k) + i(b + h)) = [x(a + k) - y(b + h)] + i[x(b + h) + y(a + k)]$$

$= [(ax - by) + i(bx + ay)] + [(kx - hy) + i(hx + ky)] = z.w + z.p$ و منه النظرية التالية

نظرية: مجموعة الاعداد المركبة تشكل جسم (حقل).

ملاحظات هامة:

1- إذا كان $z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

2- $z = w \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$

3- حقل الاعداد المركبة غير مرتب

4- حقل الاعداد المركبة هو أصغر جسم يحتوي مجموعة الاعداد الحقيقية و لكل معادلة من الدرجة الثانية حل.

مرافق عدد مركب:

تعريف: نسمي العدد المركب الذي نرمز إليه $\bar{z}$ حيث $\bar{z} = x - iy$ مرافق العدد المركب $z = x + iy$.

خواص:

1) $z.\bar{z} = |z|^2$ ، 2) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ ، 3) $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)$ ، 4) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$ ، 5) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

6) $z \in IR \Rightarrow z = \operatorname{Re}(z) = x$ ، 7) z تخيلي صرف $z = i\operatorname{Im}(z) = iy \Rightarrow$ ، 8) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$

أمثلة: أكتب على الشكل الجبري

$(1 + i)(3 + 2i)$ ، $\frac{2 - i}{1 + i\sqrt{2}}$ ، $\frac{z + ia}{z - ia}, a \in IR$.

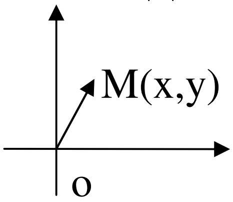
الحل:

$$(1 + i)(3 + 2i) = 1 + 5i \quad ، \quad \frac{2 - i}{1 + i\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} - i\frac{(1 + \sqrt{2})}{3}$$

$$\frac{z + ia}{z - ia} = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + (y - a)^2} + i\frac{2ax}{x^2 + (y - a)^2}$$

المستوي المركب:

يوجد تشاكل تقابلي (ايزومورفيزم) بين المجموعة للأعداد المركبة المستوي المركب بحيث نرفق بكل عدد مركب z $(z = x+iy)$ نقطة وحيدة $M(x,y)$ من المستوي المركب و كذلك يمكن أن نرفق بكل عدد مركب شعاع $\overrightarrow{oM}$ طويلة $oM = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ و تسمى طويلة العدد المركب



خواص طويلة عدد مركب:

-1 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ، -2 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$ ، -3 $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

-4 $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ ، -5 $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

مثال: بين أن $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$

الحل:

نضع $z = x+iy$ و $w = a+ib$ و بالتالي:

$$|z+w|^2 = (x+a)^2 + (y+b)^2$$
$$= x^2 + y^2 + 2(ax+by) + a^2 + b^2$$

من جهة أخرى $z\overline{w} = (x+iy)(a-ib) = ax+by+i(ay-bx) \Rightarrow \operatorname{Re}(z\overline{w}) = ex+by$

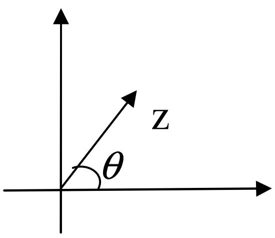
و منه نستنتج أن $|z+w|^2 = |z|^2 + 2(z\overline{w}) + |w|^2$

الشكل المثلثي لعدد مركب:

لتكن (r,θ) الاحداثيات القطبية المرفقة بالإحداثيات الكارتيزية (x,y) و اليكن العدد المركب $z = x+iy$ و $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ و بالتالي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ أو $z:[r,\theta]$

إذا كانت $|z| = r$ فإن $\arg(z) = \theta + 2k\pi : k \in Z$ و $\theta \in [-\pi,\pi[$

ملاحظة: إذا كان $z=0$ فإن $|z|=0$ و $\arg(z)$ غير معرفة



مثال: اكتب العدد المركب $z = -1-i$ على الشكل المثلثي.

الحل:

$|z| = \sqrt{2}$ و $\cos(\arg z) = -1/\sqrt{2}$ ، $\sin(\arg z) = -1/\sqrt{2}$ و منه نستنتج أن

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$ و بالتالي $\arg(z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\equiv\frac{7\pi}{4}+2k\pi$

خواص:

ليكن العددان المركبان $z_1:[r_1,\theta_1]$ ، $z_2:[r_2,\theta_2]$

1- $z_1z_2:[r_1r_2,\theta_1+\theta_2]$ أي $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

2- إذا كان $z_2\neq 0$ فإن $\frac{z_1}{z_2}:\left[\frac{r_1}{r_2},\theta_1-\theta_2\right]$ أي $\arg(z_1/z_2)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

3- $\forall n\in Z; z^n:[r^n,n\theta]$ أي $\arg(z^n)=n\arg(z)$

مثال: باستخدام الخواص السابقة اكتب العدد المركب التالي: $z=i^3\left(1-\sqrt{3}i\right)^2$ على الشكل المثلثي

الحل:

$$i=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)\xrightarrow{moivre}i^3=\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$$

كذلك

$$1-i\sqrt{3}=2(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))\xrightarrow{moivre}\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=4(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))$$

ومنه $z=4(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))$

و ذلك لان $|z|=1\times 4=4$ و $\arg(z)=\frac{3\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}=2\pi+\frac{5\pi}{6}$

الشكل الأس لعدد مركب ـصيغة أولر-

ليكن العدد المركب $z:[r,\theta]$ صيغة أولر لهذا العدد هي $z=re^{i\theta}$

ملاحظة: يمكن إعادة صياغة خواص العدد المركب كالتالي:

1- $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ، 2- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}, z_2\neq 0$ ، 3- $\forall n\in Z, z^n=r^ne^{in\theta}$

دستور موفر: $\forall n\in Z, z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

الجذر النوني: إذا كان $z=re^{i\theta}$ و كان w عدد مركب بحيث $\forall n\in IN, z=w^n$ نسمي w الجذر النوني للعدد المركب z و كان $w=\rho e^{i\alpha}$ مما سبق يكون $\rho^ne^{in\alpha}=re^{i\theta}$ أي أن $\rho=\sqrt[n]{r}$ و $\alpha=\frac{\theta+2k\pi}{n}$

مثال:- جد الجذور النونية z للعدد المركب L حيث $L=z^5=1+i\sqrt{3}$

- حل في C المعادلة التالية: $z^2-(2+i)z+2i=0$

الحل: نضع $L=\rho e^{i\alpha}=2e^{i\pi/3}\Leftarrow \rho=2$ و $\alpha=\pi/3+2k\pi$ ، كذلك $z=re^{i\theta}\Leftarrow z^5=r^5e^{5i\theta}$

$L=z^5\Leftrightarrow r^5=\rho$ و $5\theta=\alpha+2k\pi$ وبالتالي: $r=\sqrt[5]{\rho}$ و $\theta=\frac{\alpha}{5}+\frac{2k\pi}{5}$

أي أن $r=\sqrt[5]{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}$ و منه الجذور الخمس....$z_k;k=0,1,2,$ للعدد L هي

من أجل $k=0$ و $z_0=2^{1/5}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

من أجل $k=1$ و $z_1 = 2^{1/5}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

من أجل $k=2$ و $z_2 = 2^{1/5}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

من أجل $k=3$ و $z_3 = 2^{1/5}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$

من أجل $k=4$ و $z_4 = 2^{1/5}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

- حل المعادلة $z^2 - (2+i)z + 2i = 0$

$$\Delta = (2+i)^2 - 8i = 3 - 4i$$

ليكن δ جذرا تربيعيا للمميز Δ أي $\Delta = \delta^2$

إذا كان $\delta = a + ib \Leftarrow \Delta = \delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ م بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2ab = -4 \\ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \vee a = -2 \end{cases}$$

و منه إذا كان $a = 2 \Leftarrow b = -1 \Leftarrow \delta = 2 - i$ و إذا كان $a = -2 \Leftarrow b = 1 \Leftarrow -\delta = -2 + i$

و بالتالي حلول المعادلة في C هي $z_1 = \frac{2+i+2-i}{2} = 2$ ، $z_2 = \frac{2+i-2+i}{2} = i$.

ب بن علي

II) المناطق في المستوي المركب:

الجوار: يعرف الجوار لنقطة معينة z_0 مجموعة النقط $V(z_0)$ بحيث

$$V(z_0)=\{z\in C/|z-z_0|<\varepsilon,..,\varepsilon>0\}$$

النقطة الداخلية: لتكن S مجموعة جزئية من C للأعداد المركبة و التكن w نقطة من S تكون w نقطة داخلية من S إذا وجد عدد حقيقي موجب $(\varepsilon>0)$ ε بحيث $V(w,\varepsilon)\subset S$

النقطة الخارجية: تكون النقطة w خارجية عن المجموعة S إذا كانت نقطة داخلية لمكملة أي $w\in S^c\equiv C-S$

النقطة الحدودية: تكون النقطة w نقطة حدودية أذا كانت لا داخلية في S و لا خارجية عن المجموعة S و نرمز الى مجموعة النقط الحدودية بالرمز ∂S

مثال: مجموعة النقط التي تحقق المعادلة $|z+i|=2$ هي الدائرة S ذات المركز $w(0.-1)$ و نصف القطر $R=\sqrt{2}$.

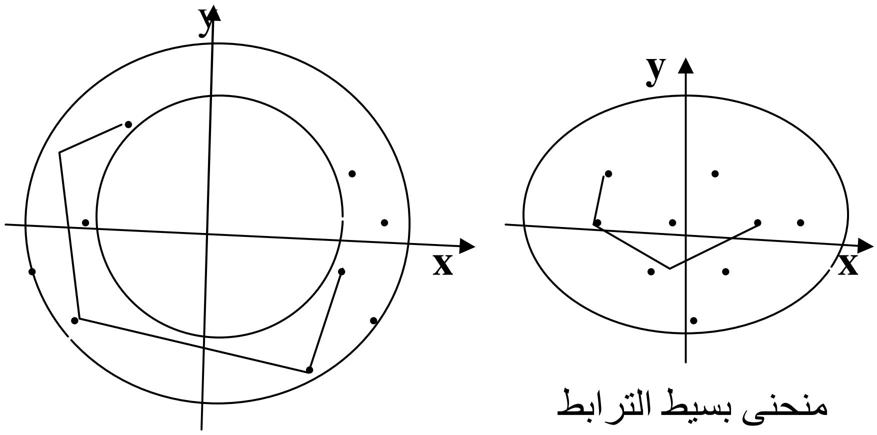
المجموعة المفتوحة: تكون S مجموعة مفتوحة إذا كانت لا تحتوي أي نقطة حدودية

مثال: مجموعة النقط التحقق المجموعة $S=\{z\in C:\arg(z)<\pi/4\}$ مفتوحة

المجموعة المغلقة: تكون S مجموعة مغلقة إذا كانت تحتوي كل النقطة الحدودية لها.

مثال: مجموعة النقط التحقق المجموعة $S=\{z\in C:|z-1|\le|\text{Re}(z)|\}$ مجموعة مغلقة

المجموعة المترابطة(connexe): تكون المجموعة S من C مترابطة إذا كان بالإمكان أن نصل أي نقطتين من نقاطها بمسار مضلعي يتكون من عدد محدود من القطع المستقيمة متصلة نهاية ببداية و يقع بكامله داخلها، و تكون بسيطة الترابط إذا كانت S^c بسيطة الترابط أما إذا كانت S^c ليست بسيطة الترابط تكون S مضاعفة الترابط.



منحنى مضاعف الترابط

مجموعة مترابطة

منحنى بسيط الترابط

مجموعة مترابطة

ب بن علي

III) الفضاء المتري:

تعريف: X مجموعة غير خالية و d تطبيق من $X\times X$ في IR مسافة إذا تحقق مايلي:

لتكن x,y,z ثلاث عناصر من X

1- $d(x,y)\geq 0$

2- $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

3- $d(x,y)=d(y,x)$

4- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

نسمي الثنائية (X,d) فضاء متري

أمثلة: 1- إذا كان $X=C$ مجموعة الاعداد المركبة و اليكن z,w عنصران من C، نعرف المسافة $d_1(z,w)=|z-w|$ الثنائية (d_1,C) فضاء متري.

2- الثنائية (C,d_2) حيث $d_2(x+iy,a+ib)=Max(|x-a|,|y-b|)$ فضاء متري.

كرة مفتوحة: من أجل كل x_0 ثابت و $r>0$ نعرف كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r و نرمز إليها بالرمز $B(x_0,r)$ حيث $B(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}$.

كرة مغلقة: من أجل كل x_0 ثابت و $r>0$ نعرف كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r و نرمز إليها بالرمز $\overline{B}(x_0,r)$ حيث $\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X: d(x,x_0)\leq r\}$

تعريف: (X,d) فضاء متري، $B(z_0,\rho)=\{z\in C: d(z,z_0)<\rho\}$ قرص مفتوح

$G\subset X$، G مفتوح في X إذا كان من أجل كل x من X يوجد $\varepsilon(\varepsilon>0)$ بحيث $G\supset B(x,\varepsilon)$.

قضية: لتكن (X,d) فضاء متري لدينا الاثباتات التالية:

1- X مفتوح

2- من أجل كل المفتوحات $G_1,G_2,...,G_n$ فإن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مفتوح

3- مهما كانت المفتوحات $G_j, j\in J$ يكون $\bigcup_{j\in J} G_j$ مفتوح

البرهان:

1- X مفتوح لأنه أكبر المفتوحات

2- ليكن x من $\bigcap_{i=1}^{n} G_i=G \Longleftarrow x\in G_k, \forall k\in\{1,2,...,n\}$ أي يوجد $\varepsilon_k>0$ بحيث $B(x,\varepsilon_k)\subset G_k$

و اليكن $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$ أي أن $B(x,\varepsilon)\subset G \Leftarrow B(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon_k)\subset G_k$ أي أن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مفتوح

3- ليكن $x\in \bigcup_{j\in J} G_j$ و بالتالي $\exists l\in J$ بحيث $x\in G_l$ أي أن G_l جوار للنقطة x و بما أن $G_l\subset \bigcup_{j\in J} G_j$ و منه نستنتج أن $\bigcup_{j\in J} G_j\in V(x)$ هو جوار لكل نقطة x فهو مفتوح.

تعريف: ليكن $X\supset F$ ، F مغلق إذا كان $F^c=X-F$ مفتوح.

قضية: لتكن (X,d) فضاء متري لدينا الاثباتات التالية:

1- X مغلق

2- من أجل كل المغلقات $F_1,F_2,...,F_n$ فإن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مغلق

3- مهما كانت المغلقات $F_j, j\in J$ يكون $\bigcap_{j\in J} F_j$ مغلق.

النقطة الداخلية:

تعريف: لتكن $A\supset X$ و اليكن $a\in X$ نقول عن النقطة a أنها داخلية في المجموعة A إذا كانت A جوار للنقطة a أي أنه $\exists\varepsilon>0$ بحيث $A\supset B(a,\varepsilon)$، و نرمز إلى مجموعة النقط الداخلية للمجموعة A بالرمز A^0

قضية: A^0 هي مفتوح محتوى في A و هل أكبرها

البرهان: مما سبق $A^0\subset A$ لنبين أن A^0 مفتوح

ليكن $x\in A$ و أنه $\exists\varepsilon>0$ بحيث $A\supset B(x,\varepsilon)$ و اليكن $y\in B(x,\varepsilon)$ لنثبت أن $y\in A^0$، $B(x,\varepsilon)$ مفتوح فهي جوار لكل نقطة منها و بما أن $A \Leftarrow A\supset B(x,\varepsilon)$جوار للنقطة y لأي أن $y\in A^0$ و بالتالي $A^0 \Leftarrow B(x,\varepsilon)\subset A^0$ مفتوح

لنبين أن A^0 أكبر المفتوحات، ليكن Ω مفتوح$(A\supset\Omega)$ و لنبين أن $\Omega\subset A^0$

ليكن $x\in\Omega$ و Ω مفتوح و بالتالي $\Omega\in V(x)$، لكن $x\in A^0 \Leftarrow A\in V(x)\Leftarrow A\supset\Omega$ أي أن A^0 أكبر المفتوحات.

ملاحظة: داخلية الكرة المغلقة هي الكرة المفتوحة ذات نفس المركز و نصف القطر.

النقطة اللاصقة:

تعريف: لتكن $A\supset X$ و اليكن $a\in X$ نقول عن النقطة a أنها لاصقة للمجموعة A إذا كان من أجل كل جوار $V\in V(a)$ يشمل جزء من A أي $\forall V\in V(a)\Rightarrow V\cap A\neq\phi$ و نرمز لمجموعة النقط اللاصقة بالرمز $\overline{A}$.

قضية: لاصقة A $(\overline{A})$ مغلق يحوي A وهي أصغر المغلقات التي تحتوي A

البرهان: لدينا $\overline{A}\supset A$ و بما أنه $\forall a\in A,\forall V\in V(a)\Rightarrow V\cap A\neq\phi$

ليكن $C_X\overline{A}=\Omega$ و لنبين أنها مفتوح، و اليكن $x\in\Omega\Rightarrow x\notin\overline{A}\Rightarrow\exists W\in V(x)/W\cap A=\phi$

و $\varepsilon>0$ بحيث $B(x,\varepsilon)\cap A=\phi\Leftarrow W\supset B(x,\varepsilon)$ نضع $W'=B(x,\varepsilon)$، W' مفتوح $\Omega\supset W'$ كذلك

$\forall y\in W'\Rightarrow W'\in V(y)$ إضافة هذا الجوار(لا يحوي A) $\Leftarrow y\in\Omega\Leftarrow y\notin\overline{A}$ و بالتالي $\Omega\in V(x)$

أي Ω مفتوح و منه $\overline{A}$ مغلق.

بيان أنه أصغر المغلقات: ليكن F مغلق و $A\subset F$ لنبين أن $F\supset\overline{A}$ ؟

ليكن $x\in\overline{A}\xleftarrow{?}x\in F$، لنفرض أن $x\in C_X F\Leftarrow x\notin F$ و بما أن $C_X F$ مفتوح فإنه $\exists V\in V(x)$ بحيث $C_X F\supset V$ أي $V\cap A=\phi\Leftarrow V\cap F=\phi$ و هذا يناقض $x\in\overline{A}$ إذن $F\supset\overline{A}$ أي أصغر المغلقات.

المتتاليات:

قضية: لتكن (U_n) متتالية من المجموعة X^n و $l\in K(K=IR\vee C)$ لدينا التكافؤ التالية:

$(U_n)\Leftrightarrow\forall V\in V(l),\exists N,\forall n\geq N,U_n\in V$ متقاربة نحو l

البرهان: $\Leftarrow$ نفرض أن $U_n\to l$ و $V\in V(l)$ و ليكن $\exists\varepsilon>0$ بحيث$V\supset B(l,\varepsilon)$

و بما أن (U_n) متقاربة نحو l أي $\exists N\in IN$ بحيث $\forall n\in IN\Rightarrow|U_n-l|<\varepsilon$

أي أنه $\forall n\in IN,U_n\in B(l,\varepsilon)$ و بما أن و هذا $\forall V\in V(l)$

$\Rightarrow$ نفرض أنه $\forall V\in V(l),\exists N\in IN,\forall n\geq N,U_n\in V$ و ليكن $B(l,\varepsilon)\in V(l)\Leftarrow\varepsilon>0$ أي أنه $\exists n\in IN$ بحيث $\forall n\geq N,U_n\in B(l,\varepsilon)$ و بالتالي $(U_n)\Leftrightarrow\forall n\geq N\Rightarrow|U_n-l|<\varepsilon$ متقاربة نحو l.

قضية: ليكن A مجموعة جزئية من X و اليكن a عنصر من المجموعة X لدينا التكافؤ التالي:

(A لاصقة) $a\in\overline{A} \Leftrightarrow \exists(U_n)\subset A$ تتقارب نحو a.

البرهان: $\Rightarrow$ لتكن a نقطة من $\overline{A}$ و منه $\forall n\in IN^*, B\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\phi$ و بالتالي يمكن اختيار

$U_n\in B\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap A \Rightarrow A\supset(U_n)$ و $\forall n\in IN^* \Rightarrow |U_n-a|<\frac{1}{n}$ أي أن $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

$\Leftarrow$ ليكن a عنصر من X، نفرض أنه توجد $(U_n)_{n\in IN}$ من المجموعة A^{IN} و التي تتقارب نحو a

ليكن $\varepsilon>0$، $\exists N\in IN$ بحيث $\forall n\geq N, U_n\in B(a,\varepsilon)$ و كون $U_N\in A\Rightarrow A\cap B(a,\varepsilon)\neq\phi$

و النتيجة محققة مهما كان $\varepsilon>0$ و منه نستنتج أن $a\in\overline{A}$.

جزء كثيف في اخر:

تعريف: ليكن A و B جزءان من المجموعة X و $A\subset B$

نقول أن المجموعة A كثيفة في المجموعة B عندما تكون $\overline{A}\supset B$

أو بعبارة اخرى $\forall b\in B, \forall\varepsilon>0, B(b,\varepsilon)\cap\overline{A}\neq\phi$

قضية: المجموعة A كثيفة في المجموعة B هذا يعني $\forall b\in B, \exists(a_n)\subset A / a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

مثال: المجموعة Q للأعداد الناطقة كثيفة المجموعة IR للأعداد الحقيقية لأي ($IR\subset\overline{Q}$)

ألانهاية في المستوي المركب (ما لانهاية في المستوي المركب):

نسمي المستوي المعرف بالعلاقة $C\cup\{\infty\}$ بالمستوي المركب الممدد و بالتالي تعريفا إذا كانت (z_n) متتالية الاعداد المركبة و كانت $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Leftrightarrow |z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

كذلك $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

و إذا كان لما $n\to+\infty$ $\begin{cases} z_n\to+\infty \\ w_n\to a\end{cases} \Longleftarrow z_n+w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ و $z_n.w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty; a\neq 0$

نتائج: - كل متتالية من $\overline{C}$ تحتوي متتالية جزئية تتقارب نحو نقطة من $\overline{C}$

- للمستوي المركب $\overline{C}$ تمثيل هندسي شكل كرة (تسمى كرة الوحدة لريمان)، في بعض المراجع تسمى المجموعة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2=1$ كرة ريمان.

- جوار ∞ مجموعة النقط من C المعرفة كما يلي: $V(\infty)=\left\{z\in C / |z|>\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon>0\right\}$.