جامعة الشهيد حمه لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

حلول السلسلة الاولى

التمرين الأول:

$$(\alpha_n) \in \ell^\infty \Rightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n\geq 0} |\alpha_n| \leq M$$

(١).

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$
$$\Rightarrow (\alpha_n x_n) \subset \ell^2(\mathbb{C})$$

(٢). لدينا

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq M^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = M^2 \|x\|_{\ell^2}$$
$$\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^2} \leq \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$$

اذن $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ و $\|T\|_{\mathcal{L}} \leq \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$.

(٣). لنبرهن على انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n توجد متتالية $(x_n) \subset \ell^2$ تحقق $\|Tx_n\|_{\ell^2} = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$ و $\|x_n\| = 1$.

من اجل $n = 1$ المتتالية $x_1 = (1, 0, 0, 0...)$ تحقق $\|Tx_n\|_{\ell^2} = |\alpha_1|, \quad \|x_n\|_{\ell^2} = 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$.

نفرض انه من اجل كل طبيعي غير معدوم n توجد متتالية $(x_n) \subset \ell^2$ تحقق $\|Tx_n\|_{\ell^2} = |\alpha_n|$ و $\|x_n\| = 1$.

ونبرهن انه من اجل $n+1$ توجد متتالية $(x_{n+1}) \in \ell^2$ تحقق المطلوب.

فعلا لو ناخذ المتتالية $x_{n+1} = (\underbrace{0, 0, ...0}_{n}, 1, 0, ...)$ نجد انها تحقق

$$\|Tx_{n+1}\|_{\ell^2} = |\alpha_{n+1}|, \quad \|x_{n+1}\|_{\ell^2} = 1 \Rightarrow |\alpha_{n+1}| \leq \|T\|_{\mathcal{L}}.$$

اذن من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا

$$|\alpha_n| \leq \|T\|_{\mathcal{L}} \Rightarrow \sup |\alpha_n| \leq \|T\|_{\mathcal{L}}.$$

اذن

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|.$$

التمرين الثاني:

(١). $|Tx| \leq \int_0^t (t+s)|x(s)|ds \Rightarrow \sup_{0\leq t\leq 1}|Tx(t)| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}|x| \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^t (t+s)ds$

$$\Rightarrow \|Tx\|_\infty \leq \frac{3}{2}\|x\|_\infty$$

اذن T محدود و $\|T\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{3}{2}$.

(٢). ناخذ الدالة $x^*(t) = 1$.

لدينا $\|Tx\|_\infty = \frac{3}{2}$ و $\|x\|_\infty = 1$ ومنه $\|T\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{3}{2}$ اذن $\|T\|_{\mathcal{L}} = \frac{3}{2}$.

التمرين الثالث:

(١). $\|Tx\|_{\ell^1} = 3\|x\|_{\ell^1)} \Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}} = 3$

(٢). $\|Tx\|_\infty^p = \sup x(\frac{t}{2})|^p = \sup_{0\leq t\leq 1}|x(t)|^p = \|x\|_\infty^p$

$$\Rightarrow \|Tx\|_\infty = \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{\mathcal{L}} = 1.$$

التمرين الرابع:

(١). من أجل $(a_i) \in \ell^2$، لدينا

$$\begin{aligned}\|T_n x\|_{\mathbb{C}} &= |\sum_{i=1}^n |a_i xi| \leq \sum_{i=1}^n |a_i xi| \\ &\leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M\|x\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

ومنه $T_n` \in (\ell^2)^*$.

ليكن

$$z_i = \begin{cases} a_i, & i \leq n \\ 0, & i > 0 \end{cases}$$

بإذن $\|T_n z_i\| = |\sum_{i=1}^n |a_i|^2$

$$\begin{aligned}\frac{\|T_n z_i\|}{\|z_i\|} &= (\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|T_n\|_{\mathcal{L}}.\end{aligned}$$

(٢). $\|T_x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^\infty |a_i xi| \leq \sum_{i=1}^\infty |a_i xi|$.

$$\begin{aligned}&\leq (\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M'\|x\|_{\ell^2}\end{aligned}$$

إذن $T \in (\ell^2)^*$.

لنفس السبب يمكن إيجاد أن $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$|T_n x - Tx| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i x_i| = R_n \to 0.$$

التمرين الخامس:

(١). لنثبت أن (T_n) محدودة، لدينا

$$\|T_n x\|_{\mathbb{C}} = |\sum_{i=1}^{n} |a_i xi| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i xi| < \infty,$$

إذن

$$\sup_{n \geq 1} \|Tx\|_{\mathbb{C}} < \infty.$$

(٢). لدينا $\|T_n\|_{\mathcal{L}} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$، بمان ℓ^2 بناخي فانه حسب نظرية بناخ ستان هاوس، المتتالية (T_n) محدودة بانتظام، ومنه

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*; \|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M$$

اي ان

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n\|_{\mathcal{L}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} < M.$$

التمرين السادس:

(١). $\|T_n x\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|T_n x\|_{\ell^1} = 0$$

(٢). حسب السؤال السابق المتتالية (T_n) متقاربة نحو المؤثر المعدوم.

(٣). $\|T_n x\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^1}$.

من اجل $y = (0; 0, ..., 1, 0, ...)$

$$\|T_n y\|_{\ell^1} = \frac{\|T_n x\|_{\ell^1}}{\|T_n x\|_{\ell^1}} = 1 \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}}$$

ومنه

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}} = 1$$

اذن التقارب ليس منتظما.