

# Conditions aux limites

Une condition aux limites représente l'état physique de la variable à résoudre aux limites du domaine d'étude. Par exemple, la valeur de la température sur la paroi d'une conduite, où s'écoule à l'intérieur de ce dernier un fluide. La nature mathématique des conditions aux limites dépend généralement de la forme mathématique de(s) équation(s) gouvernante(s) (*nature physique du problème*), et du nombre de variables mis en jeu. Pour cette raison on trouve plusieurs types de conditions aux limites. Dans ce cours on s'intéresse plus particulièrement aux conditions aux limites suivant :

**1. Conditions aux limites de Dirichlet** On dit que la condition aux limites est de type Dirichlet, sur une portion ou la totalité de la frontière du domaine d'étude, si à cet endroit les valeurs de l'inconnue sont imposées. Mathématiquement cela peut se traduire par

$$\Phi = \alpha(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega$$

A désigne la valeur de la variable physique à déterminer  $\Phi$  sur la frontière du domaine d'étude  $\Omega$ .

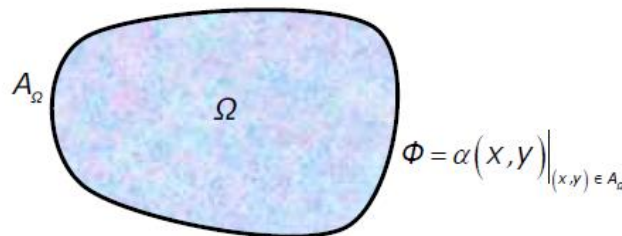


Figure II.1 : Exemple de condition aux limites de Dirichlet

## 2. Conditions aux limites de Neumann

Si le gradient de la variable  $\Phi$  est imposé sur la frontière  $A_\Omega$ , on dit qu'on a une condition aux limites de type Neumann. Dans ce cas, cette condition peut se mettre comme suit :

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \beta(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega$$

Ici  $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $A_\Omega$ , et  $\beta$  la valeur du gradient de  $\Phi$  à un point donné  $M(x, y)$  de  $A_\Omega$ .

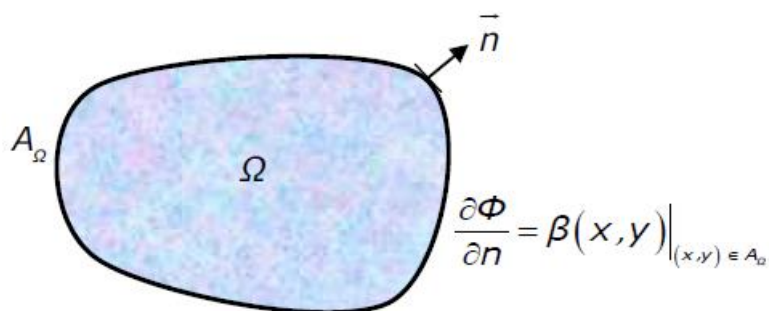


Figure II.2 : Exemple de conditions aux limites de Neumann

### 3. Conditions aux limites de Cauchy

La condition aux limites de Cauchy consiste à imposer une condition mixte sur une portion ou bien la totalité de la frontière  $A_\Omega$ .

Cette condition peut s'écrire mathématiquement comme suit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha(x, y) \Phi = \beta(x, y) \quad \text{avec } (x, y) \in A_\Omega$$

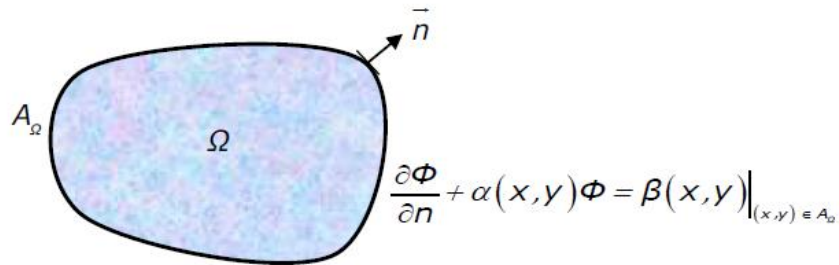


Figure II.3 : Exemple de condition aux limites de Cauchy

### 4. Conditions initiales

On dit conditions initiales toute condition sur la propriété  $\Phi$  imposé à  $t=0$ . Cette condition, en plus des conditions aux limites, sont nécessaire pour la résolution des problèmes instationnaires. Les conditions initiales peuvent formuler comme suit :

$$\Phi(x, y, t=0) = \alpha_i(x, y) \quad \text{avec } (x, y) \in \Omega$$

Avec  $\alpha_i$  désigne les valeurs de  $\Phi$  dans le domaine d'étude à l'instant initiale  $t=t_0$