

Conditions aux limites

Une condition aux limites représente l'état physique de la variable à résoudre aux limites du domaine d'étude. Par exemple, la valeur de la température sur la paroi d'une conduite, où s'écoule à l'intérieur de ce dernier un fluide. La nature mathématique des conditions aux limites dépend généralement de la forme mathématique de(s) équation(s) gouvernante(s) (*nature physique du problème*), et du nombre de variables mis en jeu. Pour cette raison on trouve plusieurs types de conditions aux limites. Dans ce cours on s'intéresse plus particulièrement aux conditions aux limites suivant :

1. Conditions aux limites de Dirichlet On dit que la condition aux limites est de type Dirichlet, sur une portion ou la totalité de la frontière du domaine d'étude, si à cet endroit les valeurs de l'inconnue sont imposées. Mathématiquement cela peut se traduire par

$$\Phi = \alpha(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega$$

A désigne la valeur de la variable physique à déterminer Φ sur la frontière du domaine d'étude Ω .

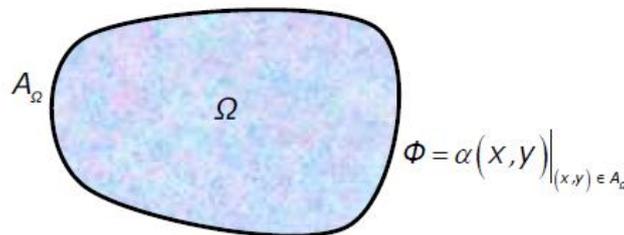


Figure II.1 : Exemple de condition aux limites de Dirichlet

2. Conditions aux limites de Neumann

Si le gradient de la variable Φ est imposé sur la frontière A_Ω , on dit qu'on a une condition aux limites de type Neumann. Dans ce cas, cette condition peut se mettre comme suit :

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \beta(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega$$

Ici \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à A_Ω , et β la valeur du gradient de Φ à un point donné $M(x, y)$ de A_Ω .

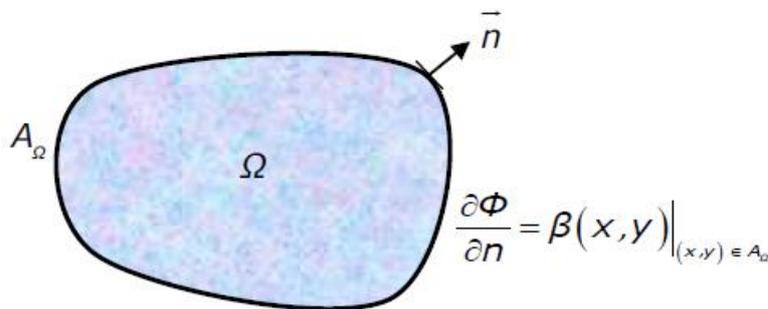


Figure II.2 : Exemple de conditions aux limites de Neumann

3. Conditions aux limites de Cauchy

La condition aux limites de Cauchy consiste à imposer une condition mixte sur une portion ou bien la totalité de la frontière A_Ω .

Cette condition peut s'écrire mathématiquement comme suit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha(x, y) \Phi = \beta(x, y) \text{ avec } (x, y) \in A_\Omega$$

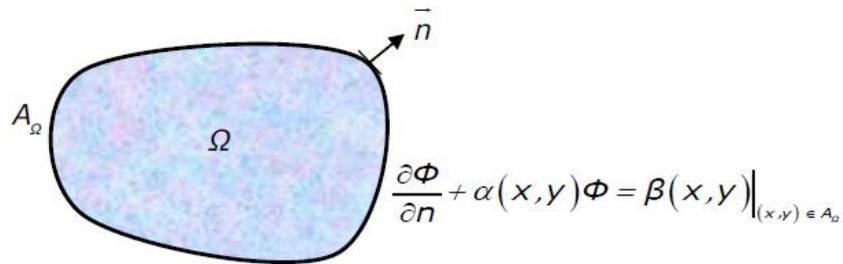


Figure II.3 : Exemple de condition aux limites de Cauchy

4. Conditions initiales

On dit conditions initiales toute condition sur la propriété Φ imposé à $t=0$. Cette condition, en plus des conditions aux limites, sont nécessaire pour la résolution des problèmes instationnaires. Les conditions initiales peuvent formuler comme suit :

$$\Phi(x, y, t=0) = \alpha_i(x, y) \text{ avec } (x, y) \in \Omega$$

Avec α_i désigne les valeurs de Φ dans le domaine d'étude à l'instant initiale $t=t_0$