جامعة الشهيد حمه لخضر- الـــــوادي
كلية العلوم الدقيقة

قسم: الرياضيات والاعلام الآلي

السنة: ثانية رياضيات

المقياس :

التحليل العددي 02

الأستـــــاذ:

✓**بقـــاص محمـد**

الموسم الدراسي : 2022/2021

المحتويات

I. مراجعة المفاهيم الأساسية للمصفوفات

II. الفصل الأول:

الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

1. مقدمة
2. طرق الحذف
3. طرق التفكيك
4. تمارين مقترحة

III. الفصل الثاني:

الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية

1. مقدمة
2. طريقة جاكوبي
3. طريقة غوص- سايدل
4. تمارين مقترحة

IV. الفصل الثالث:

الحل العددي للمعادلات التفاضلية

1. مقدمة
2. مراجعة بعض المفاهيم الأساسية
3. طريقة اويلر
4. طريقة تايلور
5. تمارين مقترحة

V . حلول التمارين المقترحة

مراجعة حول المصفوفات

I. مقدمة:

سنتناول في هذا الفصل العمليات التي يتم إجراؤها على المصفوفات او المحددات إضافة الى تعريف بعض المصفوفات الخاصة.

مما يسهل علينا التعامل مع الطرق المباشرة او التكرارية لحل جمل معادلات خطية كون المصفوفات تلعب دورا رئيسيا في هذ العملية.

II. مفاهيم أساسية:

1- تعريف المصفوفة

كل تطبيق خطي l معرف من الفضاء الشعاعي E وبعده n نحو الفضاء الشعاعي F وبعده m يمكن ان يمثل بواسطة جدول مستطيل A مكون من m سطر و n عمود، على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & a_{m.n} \end{bmatrix}$$

نسمي A: المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي l .

وتكتب :

$$A = \left(a_{i,j}\right) \ : \quad \begin{cases} 1 \le i \ \le \ n \\ 1 \le j \ \le \ m \end{cases}$$

$a_{i,j}$: يمثل العنصر ذو الرتبة i بالنسبة للأسطر وذو الرتبة j بالنسبة للأعمدة.

- اذا كانت : m=n

A تسمى مصفوفة مربعة.

- اذا كانت : m=1

نحصل على سطر شعاع : $A = [a_{11,} \quad a_{12,} \quad \cdots\cdots \quad a_{1n}]$

- اذا كانت : n=1

نحصل على عمود شعاع : $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}$

2- العمليات على المصفوفات:

ستقدم على شكل تمارين للمراجعة في حصة الاعمال الموجهة.

3- بعض الخواص الأساسية:

لتكن $A\left(a_{i,j}\right)$ مصفوفة مربعة $1 \leq i,j \leq n$

أ- المصفوفة A متناظرة اذا وفقط اذا تحقق :

$$\forall_{i,j} \; : \; 1 \leq i,j \leq n \quad : \quad a_{i,j} = a_{j,i}$$

ب- منقول المصفوفة A ورمزها A^t حيث :

$$A^t = \left(a_{j,i}\right)$$

نتيجة : اذا كانت A مصفوفة متناظرة، فإن: $A^t = A$

ت- المصفوفة العكسية للمصفوفة A ورمزها A^{-1} بحيث : $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

ث- تكون المصفوفة A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad : \; X \neq 0 \; : \; X^t\,AX > 0$$

اذا كانت : $X^t\,AX \geq 0$ فإن المصفوفة A في هذه الحالة موجبة لكن غير معرفة.

ج- تكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر بالنسبة للأسطرأوالاعمدة اذا تحقق :

$$\left|a_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|a_{i,j}\right| \quad \forall_{i,j}$$

اذا كانت العلاقة $(>)$ نقول ان A ذات قطر مسيطر تماما .

4- المصفوفات المثلثية والقطرية :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

A : مصفوفة قطرية

B : مصفوفة مثلثية سفلية

C : مصفوفة مثلثية علوية

5- المحددات:

نرمز للمحدد مصفوفة بالرمز : det A أو $|A|$ المحدد هو عبارة عن ثابت متغير في الكثير من التطبيقات وخاصة في حل جمل المعادلات الخطية.

بالنسبة للمصفوفة المرتفعة $A(2 \times 2)$ حيث :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ |A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

بالنسبة للمصفوفة المربعة الثلاثية $A(3 \times 3)$ يمكن حساب محددها عن طريق تكرار أول عمودين كما يلي :

$$A=\left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right]$$

حيث :

$$|A| = \det A = (a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + \quad a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32})$$
$$- (a_{31} \quad a_{22} \quad a_{13} + \quad a_{32} \quad a_{23} \quad a_{11} + \quad a_{33} \quad a_{22} \quad a_{12})$$

حساب المحدد بإستعمال المحددات المساعدة:

$$|A| = \det A = a_{11}(-1)^{|+|} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يمكن اختيار أي سطر او عمود حسب سهولة الحساب.

6- القيم الذاتية والاشعة الذاتية:

لتكن : $y = AX$ حيث :

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \ ; \ A(n \times n) \, ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

نضع : $y = \lambda X$ حيث λ عدد حقيقي أو مركب.

نجد : $(y = \lambda X = AX) \leftrightarrow (A - \lambda I)\, X = 0$

فنحصل على جملة معادلات خطية متجانسة.

الجملة $(A - \lambda I)\, X = 0$ تقبل حل غير معدوم اذا وفقط اذا كان :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- هذه المعادلة تسمى : المعادلة المميزة.
- جذورهذه المعادلة تسمى القيم الذاتية لـ A.
- الاشعة التي تمثل حلول الجملة تسمى :

الاشعة الذاتية لـ A وكل قيمة ذاتية مرفقة بشعاع ذاتي.

- **الشعاع الطيفي :**

نرمز للشعاع الطيفي للمصفوفة A بالرمز $\rho(A)$ حيث : $\rho(A) = max|\lambda i| : 1 \le i \le n$

λ_i : القيم الذاتية لـ A :

ملاحظة:

الشعاع الطيفي يلعب دورا هاما في معرفة تقارب الطرق التكرارية.

7- النظيم المصفوفي :

سوف نذكر ثلاث نظيمات :

$$1 \le i, j \le n \qquad \mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)$$

1) $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |ai, j|$

2) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |ai, j|$

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$

الفصل الأول: الطرق المباشرة كل جملة معادلات خطية

مقدمة

الكثير من التطبيقات يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية وعندما يكون عدد هذه المعادلات

صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات.

أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى العشرات أو المئات فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق التكرارية لحل جملة المعادلات الخطية هذه الطرق سنتعرض لها في الفصل الموالي.

توجد نظم المعادلات الخطية في الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، والجوامد المرنة، والتدفق الحرارى، والمجالات الكهرومغناطيسية والدوائر الكهربية وغيرها الكثير .

تعتمد الطرق المباشرة على تحويل مجموعة المعادلات المعطاة إلى مجموعة أخرى من المعادلات التي يسهل حلها كما سنرى.

هذا التحويل يتم عن طريق إجراء بعض العمليات الأولية على مصفوفة المعاملات وهذه العمليات ليس لها أي تأثير على محددة هذه المصفوفة ولذلك فهي لن تؤثر على الحل النهائي و هي:

1 - تبديل معادلتين بين بعضهما البعض.

2 - ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر.

3 - ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر ثم طرحها من معادلة أخرى.

4- تفكيك مصفوفة المعاملات الى جداء مصفوفتين مثلثيتين .

وهذه العمليات كلها سنستخدمها فى هذه الطرق المباشرة لحل جمل المعادلات.

III.تذكير:

لحل جملة معادلات خطية تعرضنا سابقا لطريقة كرامر والمصفوفة العكوس. سيتم التطرق لهما في الاعمال الموجهة أما في هذا الفصل فسوف نتعرض للطرق التالية:

8- طريقة غوص للحذف
9- طريقة التفكيك : LU
10- طريقة شوليسكي

1) طريقة غوص:

تعتمد طريقة غوص على تبديلات تخص الجملة الخطية $(AX = b)$ بحيث يتم في كل مرة حذف متغير من معادلة الى ان نصل الى جملة خطية تتحول من خلالها A الى مصفوفة علوية او سفلية ثم يتم استنتاج الحلول بالتعويض.

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\ \ x_2 + a_{13}\,x_3\ +\ a_{14}\,x_4 =\ \ \ y_1\ (1) \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\ \ x_2 + a_{23}\,x_3\ +\ a_{24}\,x_4 =\ \ \ y_2\ (2) \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\ \ x_2 + a_{33}\,x_3\ +\ a_{34}\,x_4 =\ \ \ y_3\ (3) \\ a_{41}\,x_1 + a_{42}\ \ x_2 + a_{43}\,x_3\ +\ a_{44}\,x_4 =\ \ \ y_4\ (4) \end{cases}$$

المرحلة الأولى: (للحذف)

أ- $a_{11} \neq 0$: نقوم بقسمة المعادلة (1) على a_{11} .

فنحصل على:

$$(1) : x_1\ +\ a_{12}^1\ x2\ +\ a_{13}^1\ x3\ +\ a_{14}^1\ x4\ =\ y1$$

$$a_{i,j}^1 = a_{i,j} / a_{11} \quad ; \quad y_1^1 = y_1/a_{11} \quad j=1,2,3,4$$

ثم نقوم بحذف المتغير x1 من المعادلات (2)، (3)، و (4) نجد:

$$(S^2)\begin{cases} x_1\ \ +\ \ a_{12}^1\,x_2\ \ +a_{13}^1\,x_3\ +\ a_{14}^1\,x_4\ =\ \ y_1^1\ \ (1^1) \\ 0 +\ \ a_{22}^1\,x_2\ \ +\ \ a_{23}^1\,x_3\ +\ \ a_{24}^1\,x_4\ =\ \ y_2^1\ \ (2^1) \\ 0\ +\ \ a_{32}^1\,x_2\ +\ \ a_{33}^1\,x_3\ \ +\ \ a_{34}^1\,x_4 =\ \ \ y_3^1\ (3^1) \\ 0\ +\ \ a_{42}^1\,x_2\ \ +\ \ a_{43}^1\,x_3\ +\ \ a_{44}^1\,x_4\ =\ \ y_4^1\ \ (4^1) \end{cases}$$

حيث:

$$a_{i,j}^1 = \ \ a_{i,j}\ \ /\ \ a_{i,1}\ \ a_{i,j}^1 \qquad\qquad 2 < i \leq 4$$

$$y_1^1 = \ \ y_i\ \ /\ \ a_{i,1}\ y_1^1 \qquad\qquad 2 < j \leq 4$$

ب- نكرر نفس العملية مع السطر الثاني بالقسمة على (a_{22}^1) على اعتبار أن: ($a_{22}^1 \neq 0$)
فنحصل على:

$$(2^2)\ \ :\ x_2\ +\ a_{23}^2\ x_3\ +\ a_{24}^2\ x_4\ \ =\ \ y_2^2$$

حيث:

$$a_{2,j}^1 = \ \ a_{2,j}^1\ /\ \ a_{22}^1 \qquad\qquad j=3,4$$

$$y_2^2 = \ \ y_2^1\ /\ \ a_{22}^1$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من المعادلات (3^1) و (4^1) نجد :

$$(S^2)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1\ (1^1) \\ 0 + x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2\ (2^2) \\ 0 + 0 + a_{33}^2\, x_3 + a_{34}^2\, x_4 = y_3^2\ (3^2) \\ 0 + 0 + a_{43}^2\, x_3 + a_{44}^2\, x_4 = y_4^2\ (4^2) \end{cases}$$

ج- نعتبر أن ($a_{33}^2 \neq 0$) ونقوم بعملية القسيمة كما سبق المعادلة (3^2) تصبح من الشكل :

$$(3^3)\ :\ x_3 + a_{34}^3\, x_4 = y_3^3$$

حيث:

$$a_{3,j}^3 = a_{3,j}^2 \,/\, a_{33}^2 \qquad j = 4$$
$$y_3^3 = y_3^2 \,/\, a_{33}^2$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_3 من السطر الرابع فنجد :

$$(S^3)\begin{cases} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + a_{14}^1\, x_4 = y_1^1 \\ 0 + x_2 + a_{23}^2\, x_3 + a_{24}^2\, x_4 = y_2^2 \\ 0 + 0 + x_3 + a_{34}^2\, x_4 = y_3^3 \\ 0 + 0 + 0 + a_{44}^2\, x_4 = y_4^4 \end{cases}$$

د- نقوم بقسمة السطر الرابع على (a_{44}^3) على اعتبار ان ($a_{44}^3 \neq 0$) فنحصل على :

$$y_4^4 = y_4^3 \,/\, a_{44}^3$$
$$a_{44}^4 = 1$$

أخيرا نحصل على شكل مصفوفي بمصفوفة مثلثية يسهل حلها بالتراجع : Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^2 \\ y_3^3 \\ y_4^4 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض):

$x_4 = y_4^4$

$x_3 = y_3^3 - a_{34}^3\, x_4$

$x_2 = y_2^2 - a_{23}^2\, x_3 - a_{24}^2\, x_4$

$x_1 = y_1^1 - a_{12}^1\, x_2 - a_{13}^1\, x_3 - a_{14}^1\, x_4$

مثال:

حل الجملة التالية باستعمال طريقة غوص للحذف : Ax = b

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الأولى: الحذف $a_{11} = 2 \neq 0$

لتسهيل العملية سوف نحافظ على شكل المصفوفة A مع إضافة الشعاع b

المصفوفة الموسعة $[A; b]$

أ- نقوم بقسمة السطر الأولى على a_{11}

$$L_1/a_{11} : L_{1/2} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 2 & 1 & 4 & : & 1 \\ 6 & 4 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

نحذف x_1 من L_2 و L_3 نجد:

$$\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 6L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & -2 & -4 & : & 0 \\ 0 & -5 & -22 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ب- (a_{44}^3 = -2 ≠ 0) نقوم بقسمة السطر الثاني على (-2) ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من السطر L_3 نجد :

$$\begin{matrix} L_2/-2 \\ \text{و} \\ L_3 - 5L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -12 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ج- نقوم بقسمة السطر الثالث على (-12) نجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/6 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$x_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 0 - 2x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 = \frac{1}{3}$$

حلول الجملة هي :

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

1) العدد $\left(a_{ii}^{k}\right)$ يسمى محور اذا كان $\left(a_{ii}^{k} = 0\right)$ نقوم بعملية تبديل الاسطر او الاعمدة لكي نحصل على محو غير معدوم.مع مراعاة ما ينتج عن هذا التبديل.
2) يمكن الحصول على مصفوفة مثلثية علوية او سفلية حسب الانطلاق من الأعلى الأسفل او العكس ونحصل على نفس النتيجة.

3) طريقة غوص- جوردان:

نتبع نفس الخطوات السابقة لطريقة غوص وعند الحصول على مصفوفة مثلثية نواصل العملية للحصول على مصفوفة A قطرية (عناصر قطرها تساوي 1)

4) نستعمل طريقة غوص - جوردان أيضا في اتجاه المصفوفة العكسية للمصفوفة A بإتباع نفس الخطوات حيث تكون المصفوفة الموسعة من الشكل : $[A:I]$

$$[A:I] \longrightarrow [I,A^{-1}]$$

(سيتم التعرض لها في الاعمال الموجهة)

2) طريقة التفكيك: LU (Lower - Upper)

لحل الجملة: Ax = b حيث A مصفوفة قابلة للقلب نقوم بإيجاد مصفوفتين مثلثتين:

مصفوفة سفلية : L

مصفوفة علوية : U

حيث A = L x U

نتيجة: يوجد تفكيك وحيد لـ A اذا وفقط اذا كانت كل المحددات الصغرى لـ A غير معدومة.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خلال عملية الجداء (L x 4) ومساواتها بـ A نجد :

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31} = a_{31}$$

- $(l_{11}U_{12} = a_{12}) \Longrightarrow U_{12} = {}^{a_{12}}/_{l_{11}}$
- $(l_{11}U_{13} = a_{13}) \Longrightarrow U_{13} = {}^{a_{13}}/_{l_{11}}$
- $(l_{21}U_{12} + l_{22}) = a_{22} \Longrightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}U_{12}$
- $(l_{31}U_{12} + l_{22}) = a_{32} \Longrightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31}U_{12}$

ثم:

- $l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = a_{23}$

ومنه:

$$U_{23} = {[a_{23} - l_{21}U_{13}]}\Big/{l_{22}}$$

- $l_{31}U_{13} + l_{31}U_{23} + l_{33} = a_{33}$

ومنه:

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}U_{13} - l_{32}U_{23}$$

بعد الحصول على L و U نقوم بحل الجملة على مرحلتين حيث:

Ax = b : L (U X) = b

نضع : U X = Z ثم نقوم بحل الجملة:

$$\begin{cases} L.Z = b \\ U\,X = Z \end{cases}$$

نقوم أولا بإيجاد الشعاع Z ثم نحل الجملة الثانية بحيث يصبح Z معلوما.

تطبيق :

حل الجملة Ax = b حيث:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

المرحلة الأولى: التفكيك

A مصفوفة قابلة للقلب وكل المحددات الصغرى غير معدومة.

نضع : LU = A أي :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

اذن:

- $l_{11} = 1$; $l_{21} = 3$; $l_{31} = 2$
- $(l_{11}U_{12} = 1) \Longrightarrow U_{12} = 1$
- $(l_{11}U_{13} + 0 \text{ x } U_{23} = 1) \Longrightarrow U_{13} = 1$

ثم :

- $(l_{21}U_{12} + l_{22} = 9) \Longrightarrow l_{22} = 6$
- $(l_{31}U_{12} + l_{32} = 4) \Longrightarrow l_{32} = 2$
- $(l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = 27) \Longrightarrow U_{23} = 4$

وأخيرا:

- $(l_{31}U_{13} + l_{32}U_{23} + l_{33} = 2) \Longrightarrow l_{33} = -2$

ومنه نجد :

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية:

نضع $UX = Z$ ونقوم بحل الجملة : $LZ = b$ أي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

نجد:

$$Z_1 = 14$$

$$Z_2 = {(120 - 3 \text{ x } 14)}\Big/{6} = 13$$

$$Z_3 = {(50 - 2 \text{ x } 14 - 2 \text{ x } 13)}\Big/{-2} = 2$$

اذن حل الجملة $LZ = b$ هو : $Z = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$

نقوم الآن بحل الجملة الثانية لإيجاد X

أي : $UX = Z$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نجد :

$x_3 = 2$

$x_2 = 13 - 4x_2 = 13 - 8 = 5$

$x_1 = 14 - 5 - 2 = 7$

اذن حل الجملة $AX = b$ هي : $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) طريقة شولسكي:

نظرية : اذا كانت A مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة فيمكن تفكيكها على الشكل التالي:

$A = L^t.L$ حيث L^t مصفوفة حقيقية مثلثية.

مثال: $A = L^t.L$ أي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

تطبيق نفس العمل في تفكيك (LU) مع الأخذ بالإعتبار أن:

$\forall_i , \forall_j \quad l_{i,j} = l_{j,i}$ ومنه :

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- $l_{12} = {a_{21}}/{l_{11}}$
- $l_{13} = {a_{31}}/{l_{11}}$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{12})^2}$
- $l_{23} = {[a_{23} - l_{12}.l_{13}]}/{l_{22}}$
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{13})^2 - (l_{23})^2}$

حل الجملة يكون على الشكل :

$$\begin{cases} L^t.Z = b \\ L\,X = Z \end{cases}$$

تمارين مقترحة الفصل الاول

التمرين الأول:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \; ; \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

1) احسب : B x A , $A \times B$, A – B ثم $\det A$; $\det B$; $det\,(A \times B)$

2) استنتج $\det(A^{-1})$

3) احسب $\|B\|_\infty$, $\|B\|_1$

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة ثلاثية الأقطار A حيث :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

1) بين ان A متناظرة هل A معرفة موجبة ؟ برر

2) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر اجابتك

3) اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A ثم عين قيمة الشعاع الطيفي. استنتج $\|A\|_2$.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية :

$$(\text{I})\begin{cases}3x + z = 1\\ -x + 2y + z = 2\\ x + y - 4z = 3\end{cases}$$

1) ضع الجملة (I) على الشكل المصفوفي : $AX = b$

2) حل الجملة (I) مستعملا طريقة كرامر.

3) اوجد حل الجملة (I) بإستعمال طريقة غوص للحذف.

التمرين الرابع :

اوجد حلول الجملة التالية مستعلا طريقة غوص مع تغيير المحاور :

$$\begin{cases}3x + 8y + 9z = 6\\ 3x + 8y + z = 11\\ x + 2y + 4z = 20\end{cases}$$

التمرين الخامس :

لدينا الجملة $AX = b$ حيث :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) جل الجملة مستعملا طريقة غوص ، جوردان.
2) اوجد المصفوفة العكسية لـ A بإستعمال طريق غوص ، جوردان.

التمرين السادس:

حل الجملة الخطية المعرفة على شكل المصفوفي $AX = b$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) بإستعمال طريقة غوص .
2) بإستعمال طريقة غوص ، جوردان.

التمرين السابع:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

حل الجملة مستعملا طريقة التفكيك (LU) (كروت).

التمرين الثامن:

حل الجملة التالية مستعملا طريقة شولبسكي:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

الفصل الثاني : الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية

مقدمة

طرق الحل لأى نظام من المعادلات الخطية التي رأيناها في الفصل السابق تعتبر طرقا مباشرة لإيجاد الحل، وتتميز هذه الطرق بأنها تصل إلى الحل النهائي بعدد محدد من الخطوات، وحيث أن الحاسب يعمل حسب دقة محددة نتيجة العدد.

على العكس من ذلك، فإن الطرق التكرارية التي نقدمها هنا، و تسمى بالطرق غير المباشرة أيضا، تبدأ بتخمين حل معين، وبطريقة تكرارية تحاول هذه الطرق التحسين من هذا الحل الذى تم تخمينه في خطوات متتالية حتى يصبح التغير في الحل مع التقدم في هذه الخطوات صغيرا، عندها نوقف الخطوات ويكون هذا الحل الأخير هو الحل المقدم لمجموعة المعادلات.

هذه الخطوات التكرارية من الممكن أن يكون عددها كبيرا جدا، ولذلك فإن هذه الطرق تكون أبطأ كثيرا من الطرق المباشرة.

الجدير بالذكر أن هذه الطرق لا تعتمد على قيمة الحل الابتدائي الذى نبدأ به محاولات الحل. كما

أن هذه الطرق من الممكن ألا تصل إلى حل، بمعنى أن الحلول تتباعد مع تكرار المحاولات. على الرغم من ذلك فإن

هذه الطرق يكون لها المميزات التالية التي تجعلها هي الأفضل عند حل مسائل معينة:

1 - في المصفوفات المتناثرة العناصر تكون معظم عناصر المصفوفة تساوى أصفارا، ولذلك فإن هذه الطرق تسمح بتخزين العناصر غير الصفرية فقط والتعامل معها حسابيا مما يوفر وقتا في الحساب وفى مساحة التخزين -خاصة إذا كان بعد المصفوفة كبيرا- وذلك على العكس من الطرق المباشرة التي لا تميز بين العناصر الصفرية وغير الصفرية في الحساب. وهناك الكثير من التطبيقات التي تكون مصفوفاتها متناثرة.

2 - الميزة الثانية أن الطريقة التكرارية تكون ذاتية التصحيح، بمعنى أن كل محاولة للحل تكون أصح من المحاولة السابقة لها.

3 - الميزة الثالثة أن الطرق التكرارية لا تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية، على العكس من الطرق المباشرة فإنها تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية بل وفى ترتيب الصفوف كما رأينا في الفصل السابق.

I. طريقة جاكوبي : (jacobi)

لتكن الجملة التالية:

$$
(I)\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_n x_n \;=\; b_1 & (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \;=\; b_2 & (2)\\
\vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{n1} x_n \;=\; b_n & (n)
\end{cases}
$$

نعتمد طريقة جاكوبي على إيجاد:

- قيمة x_1 من المعادلة (1) بدلالة باقي المتغيرات.
- قيمة x_2 من المعادلة (2) بدلالة باقي المتغيرات.

⋮

⋮

- قيمة x_n من المعادلة (n) بدلالة باقي المتغيرات.

فنحصل على الجملة التالية:

$$
(I')\begin{cases}
x_1 = c_1 \;+\; t_{12}x_2 \;+ \cdots + t_{1n}x_n\\
x_2 = c_2 \;+\; t_{21}x_1 \;+ \cdots + t_{2n}x_n\\
\vdots\\
\vdots\\
x_n = c_n \;+\; t_{n1}x_1 \;+\; t_{n2}x_2 + \cdots + t_{n,n-1}x_{n-1}
\end{cases}
$$

حيث: $(a_{i,i} \neq 0)$

$$C_i = {}^{b_i}\!/_{a_{ii}} \qquad\qquad i= 1,2, \dots ,n$$

$$t_{i,j} = {}^{-a_{i,j}}\!/_{a_{ii}} \qquad\qquad (j \neq i)$$

$$t_{ii} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, n$$

الجملة ('I) يكمن كتابتها على الشكل:

$$X^k = TX^{(k-1)} + C \qquad\qquad k=1, \dots,n$$

$$
T=\begin{cases}
0 \quad t_{12} \;\dots\dots \qquad t_{1n}\\
t_{21} \quad 0 \;\dots\dots \qquad t_{2n}\\
\vdots\\
\vdots\\
t_{n1} \quad t_{n2} \;\dots\dots \qquad 0
\end{cases}
\quad ; \quad C=\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{bmatrix}
$$

المصفوفة التكرارية حيث : T قطرها كل عناصره معدومة .

الكتابة العامة لخوارزمية جاكوبي:

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = c_i + \sum_{j=1}^{1} t_{i,j}\, x_j & \mathrm{k} = 1, 2, \dots, n \\ t_{ii} = 0 & \mathrm{i} = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

يمكن كتابتها مباشرة بإستعمال المصفوفة A كالآتي :

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right] \Big/ a_{ii} & \mathrm{k} = 1, \dots, n \\ \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

لحل الجملة نقوم بالخطوات التالية:

1- نقوم بإختيار قيمة بدائية $X^{(0)}$ أي من اجل (k=0).

2- نضع k=1 ثم نقوم بحساب $X^{(1)}$ من خلال مركباته $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$. مع الشرط a_{11}≠0 اذا لم يتحقق الشرط نقوم بالتبديل، ثم نضع k=2 ونعيد الحساب بنفس الكيفية لـ $X^{(2)}$ ثم $X^{(3)}, \dots X^{(k)}$.

3- اختبار التوقف:

اذا كان $X^{(k)}$ يمثل الحل التقريبي فهو يحقق اختبار التوقف المعطى من خلال العبارة التالية:

$$\left| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right| < \varepsilon \qquad \text{القيمة } \varepsilon \text{ معطاة}$$

اذا لم يحقق $X^{(k)}$ اختيار التوقف نضيف 1 للعدد k ونعود الى (2).

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

اذن حسب ما سبق:

$$(\mathrm{I'}) \begin{cases} x_1 = 1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 = 1.333 - 0.222x_1 + 0.111x_2 \end{cases}$$

نكتب الآن الصيغة العامة بدلالة k :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k-1)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k-1)} - 0.111x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

$$X^{(k)} = T_j X^{(k-1)} + C$$

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & -0.125 \\ 0.143 & 0 & 0.286 \\ -0.222 & -0.111 & 0 \end{bmatrix}$$ **المصفوفة التكرارية لجاكوبي**

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.571 \\ 1.333 \end{bmatrix}$$

يمكنك التأكد أنه من أجل (K=6)

نجد : $$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 1.001 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

علما ان الحل الصحيح للجملة هو :

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II. طريقة غوص- سايدل:

هي عبارة عن تحسين لطريقة جاكوبي فعوض استعمال المركبات:

(i >1) $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$ للشعاع $X^{(k-1)}$ نستعمل المركبات: $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ للشعاع $X^{(k)}$ التي تم حسابها ومنه نحصل على الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{1} a_{ij}x_j^{(k-1)} \right] \Big/ a_{ii} \\ \\ i = 1, \dots, n. \qquad k = 1, 2, \dots, n \quad (a_{11} \neq 0) \end{cases}$$

مثال:

سنقوم بحل المثال السابق المعطى في طريقة جاكوبي لملاحظة الفرق:

نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k-1)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k-1)} - 0.111x_2^{(k-1)} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

يمكنك التأكد أن:

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.007 \\ 0.996 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

ثم مقارنتها بالنتائج السابقة لطريقة جاكوبي ونلاحظ عملية التسريع في الوصول للحل التقريبي.

III. تفكيك المصفوفة: A

من خلال الجملة: AX =b يمكن تفكيك المصفوفة A للحصول على المصفوفة التكرارية لطريقة جاكوبي وغوص- سايدل.

نضع:

D: $d_{ii} = a_{ii}$ مصفوفة قطرية

L: $l_{ii} = -a_{ij} \quad {}_{i<j}$ مصفوفة سفلية

U: $U_{ii} = -a_{ij} \quad {}_{i>j}$ مصفوفة علوية

نحصل على العلاقة التالية:

A = D – L – U

= D – (L+U)

أ) لمصفوفة التكرارية لجاكوبي: T_j

الجملة AX=b تصبح من الشكل:

$$[D - (L + U)]\, X = b$$

ومنه:

$$DX = (L + U)\, X + b$$

بما ان المصفوفة D قابلة للقلب نحصل على :

الطريقة التكرارية لجاكوبي :

$$DX^{(k)} = (\ L + U\ )X^{(k-1)} + b$$

ومنه :

$$X^{(k)} = D^{-1}(\ L + U\ )X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لجاكوبي هي :

$$\boldsymbol{T_j = D^{-1}\ (L + U)}$$

ب) المصفوفة التكرارية لغوص-سايدل :

الصيغة التكرارية:

$$(D - L)X^k = UX^{(k-1)} + b$$

اذن:

$$X^{(k)} = (D - L)^{-1}UX^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لغوص سايدل:

$$\boldsymbol{T_G = (D - L)^{-1}U}$$

IV. **التقارب** :

نظرية

تتقارب طريقة جاكوبي و غوص سايدل اذا تحقق احد الشروط الثلاث الآتية :

1) المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما.
2) اذا كان : $\|T_j\| < 1$ (أو $\|T_G\| < 1$) باستعمال أي نظيم (ممكن $\|\ \|_1$ أو $\|\ \|_\infty$).
3) الشعاع الطبقي للمصفوفة والتكرارية اصغر تماما من واحد أي :

$$\rho(T_G) < 1 \quad \text{و} \quad \rho(T_j) < 1$$

ملاحظات :

1) شروط التقارب (1)و (2)كل شرط هو كاف وغير لازم أما الشرط الثالث فهو كاف ولازم.
2) اذا كانت الطريقة متقاربة فإن أي اختيار للشعاع الابتدائي $X^{(0)}$ يوصلنا للحل الصحيح X.
3) في حالة تقاب الطريقتين فإن طريقة غوص- سايدل تكون اسرع من جاكوبي .
4) طريقة غوص سايدل تتطلب n قيمة للتخزين في الذاكرة بينما جاكوبي تتطلب 2n.

مبرهنة

إذا كانت المصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة فإن طريقة غوص- سايدل تتقارب.

V. تطبيقات :

تمرين 1

لتكن الجملة التالية :

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - \ 3x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + \ 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - \ x_4 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + \ 20x_4 = 15 \end{cases}$$

1) برهن ان طريقة جاكوبي لهذه الجملة تتقارب.

2) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى يكون الخطأ المرتكب: 10^{-4}

الحل:

1) تحول الجملة الى الشكل:

$$X^{(k)} = T_j\, X^{(k-1)} + C$$ نجد:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.1x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} + \ 0.3x_4^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} + 0.1x_3^{(k-1)} - \ 0.2x_4 + 0.5 \\ x_3^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} - 0.15x_2^{(k-1)} + \ 0.05x_4 - 0.5 \\ x_4^{(k)} = -0.15x_1^{(k-1)} - 0.1x_2^{(k-1)} - \ 0.05x_3^{(k-1)} + 0.75 \end{cases}$$

حيث:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ -0.15 & -0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\|T_j\|_1 = \max\{0.35, 0.35\ , 0.35, 0.55\} = 0.55$$

لأن $\|T_j\|_1 = 0.55 < 1$ فإن

طريقة جاكوبي تتقارب.

يمكن اثبات التقارب يكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر (يمكنك التأكد)

2) قبل الإجابة سنعرض المبرهنة التالية:

اذا كان $\|T\| < 1$ فإن المتتالية:

$$X^{k} = TX^{(k-1)} + C \qquad (k \geq 1)$$ تتقارب

من اجل أي اختبار لـ $X^{(0)}$ نحو الحل الصحيح X

ولدينا :

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^{k}}{1 - \|T\|} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$$

اذن:

نأخذ $X^{(0)} = C$ ومنه:

$$\left\|X^{(0)}\right\|_1 = \|C\|_1 = 1.75$$

لدينا:

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^{k}}{1 - \|T\|} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^{k}}{1 - \|T\|} \left\|TX^{(0)} + C - X^{(0)}\right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^{k+1} . \|C\|}{1 - \|T\|} = 10^{-4}$$

نجد $k \geq 16.7$ يمكن أخذ $k = 17$ $(k \in N)$

تمرين2

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي : AX = b حيث :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

1) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر.

هل يمكن استنتاج تباعد او تقارب الطرق التكرارية؟ برر.

2) اوجد المصفوفة التكرارية T_j و T_G ، ثم احسب الشعاع الطبقي.

3) أي الطريقتين تتقارب؟

الحل:

1) A ليست ذات قطر مسيطر لأن:
- حسب الأعمدة: $2 + 1 < 1$ غير محققة.
- حسب الأسطر: $1 + 1 < 1$ غير محققة.

لا يمكن استنتاج التقارب او التباعد لأن شرط A ذات قطر مسيطر هو شرط كاف لكنه غير لازم.

2) المصفوفات التكرارية:

يمكنك ايجادها بواسطة العبارة التكرارية او تفكيك المصفوفة A حسب كل طريقة نجد:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} ; T_G = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الشعاع الطبقي : $\rho = max|\lambda i|$ لدينا: $det\left(T_j - \lambda I\right) = 0$

أي : $(\lambda = 0) \longrightarrow (-\lambda^3 = 0)$

ومنه : $\rho\left(T_j\right) = 0$

- $det\ (T_G - \lambda I) = -\lambda\ (2 - \lambda)^2 = 0$

ومنه : $\lambda = 0$ أو $\lambda = 2$

اذن : $\rho(T_G\ ) = 2$

بما ان $\rho\ \left(T_j\right) = 0 < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب و $\rho(T_G) = 2 > 1$ فإن طريقة غوص سايدل تتباعد.

هذا المثال يبين أن أفضلية طريقة غوص- سايدل تكون عند تقارب الطريقتين فقط.

تمارين مقترحة الفصل الثاني

التمرين الأول:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي :

$AX = b$ حيث :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1) اكتب الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي معينا T_j C_j

2) احسب الشعاع الطيفي للمصفوفة T_j ثم استنتج تقارب او تباعد طريقة جاكوبي.
3) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى سكون الخطأ المرتكب 10^{-4} نأخذ $X^0 = C_j$

التمرين الثاني:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- عين قيم α التي تحقق تقارب طريقتي جاكوبي و غوص - سايدل.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية: $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) عين المصفوفة التكرارية T_G لطريقة غوص - سايدل.
2) احسب $l\ (T_G)$ ثم اوجد الشرط الضروري والكافي على α حتى تتقارب الطريقة.

التمرين الرابع:

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) احسب $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ علما ان $X^{(0)} = (2,2,2)$

بإستعمال طريقة جاكوبي ثم غوص – سايدل بعد التأكد من تقاربهما.

2) حل الجملة الخطية مستعملا طريقة غوص للحذف ثم طريقة التفكيك (LU).
3) استنتج أي الطريقتين اسرع في التقارب.