<u>ExO1.</u>*Solution*

On calcule la chaleur spécifique ; $c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = 519.84\, m^2/s^2.K$,

a) La température initiale et la masse volumique se calculent d'après la loi des gaz parfaits ;

$\boldsymbol{T_0} = {}^{P_0}/_{r\rho_0} = \frac{1.7\times10^6}{(208)(18)} = \mathbf{454.1\ K}$,

b) La masse volumique est : $\boldsymbol{\rho_s} = {}^{P_s}/_{rT_s} = \frac{248\times10^3}{(208)(400)} = \mathbf{2.98}\ \frac{\boldsymbol{kg}}{\boldsymbol{m^3}}$.

c) La variation d'enthalpie est :

$\boldsymbol{h_s - h_0} = c_p(T_s - T_0) \implies \Delta h = 519.84(400 - 454.1) = \mathbf{-28123.344\ J/kg}$,

La température et l'enthalpie de l'argon diminuent quand on avance dans le tube. Réellement c'est un refroidissement mais l'enthalpie se convertit par frottement pour accroitre l'énergie cinétique.

d) Le changement d'entropie est :

$$\boldsymbol{s_s - s_0} = c_p ln\frac{T_s}{T_0} - r\ ln\frac{P_s}{P_0} = \mathbf{334.45}\frac{\boldsymbol{m^2}}{\boldsymbol{s^2}},$$

L'entropie du fluide est augmentée.

<u>ExO2.</u>*Solution*

a) L'air;

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \implies V_2 = \sqrt{2c_p\left(T_1 - T_2 + \frac{V_1^2}{2c_p}\right)}$$

$$\implies \boldsymbol{V_2} = \sqrt{2\times1005\times\left(260 - 207 + \frac{75^2}{2\times1005}\right)} = \mathbf{337.89}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

$$s_2 - s_1 = c_p ln\frac{T_2}{T_1} - r\ ln\frac{P_2}{P_1} \implies s_2 - s_1 = 1005\ ln\frac{207+273}{260+273} - 287\ ln\frac{30}{140} = \mathbf{336.85}\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{kg.K}}.$$

b) L'argon; $\gamma = 1.667,\ \ r = 208\frac{m^2}{s^2K}, \implies c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = 519.84\, m^2/s^2.K$,

$$\boldsymbol{V_2} = \sqrt{2\times519.84\times\left(260 - 207 + \frac{75^2}{2\times519.84}\right)} = \mathbf{246.43}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

$$\boldsymbol{s_2 - s_1} = c_p ln\frac{T_2}{T_1} - r\ ln\frac{P_2}{P_1} = 519.84\ ln\frac{207+273}{260+273} - 208\ ln\frac{30}{140} = \mathbf{265.97}\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{kg.K}}.$$

<u>ExO3.</u>*Solution*

a) Sous les conditions isentropiques, la pression de stagnation à l'entrée du compresseur (sortie du diffuseur) peut être déterminée, mais il faut d'abord connaitre la température de stagnation T_{01} à l'entrée du compresseur.

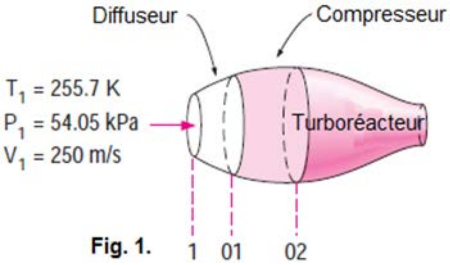

Fig. 1.

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 255.7 + \frac{250^2}{2\times1005} = 286.8\ K$$

$$\boldsymbol{P_{01}} = P_1\left(\frac{T_{01}}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 54.05\left(\frac{286.8}{255.7}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = \mathbf{80.77\ kPa}$$

b) Pour déterminer le travail du compresseur, il faut connaitre la température de stagnation de l'air à la sortie du compresseur T_{02}. Le rapport des pressions de stagnation à travers le compresseur P_{02}/P_{01} est specifié d'être 8.
Puisque le processus de compression est supposé d'être isentropique, T_{02} peut être déterminée de l'équation d'un gaz parfait ;

$$T_{02} = T_{01}\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 286.8(8)^{\frac{0.4}{1.4}} = 519.5\ K$$

En négligeant l'énergie potentielle et le transfert de chaleur le travail du compresseur par unité de masse d'air est :

$$\boldsymbol{W_{in}} = c_p(T_{02} - T_{01}) = 1005 \times (519.5 - 286.8) = \boldsymbol{233.89\ kJ/kg}$$

Le travail est fourni au compresseur.

ExO4.*Solution*

La configuration de cet écoulement est conçue sur la **Fig. 2.**

On a : $\gamma = 1.67,\ \mathcal{M} = 39.9\frac{g}{mol}$;
$P_0 = 500\ kPa, T_0 = 303\ K; V_0 = 0\frac{m}{s}$.

Ecoulement stationnaire isentropique 1D.

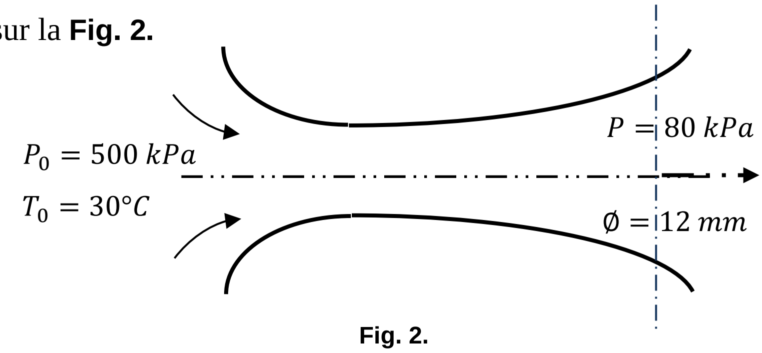

Fig. 2.

a) D'après les relations isentropiques

$$\boldsymbol{M} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2}{1.67-1}\left[\left(\frac{500}{80}\right)^{\frac{0.67}{1.67}} - 1\right]} = \boldsymbol{1.80}$$

Aussi :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 = 1 + \frac{0.67 \times 1.80^2}{2} = 2.086 \implies \boldsymbol{T = 145.3\ K}$$

Cette valeur de température donne : $a = \sqrt{\gamma\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}\,T} = 224.9\ m/s$

d'où : $\boldsymbol{V} = a\,M = \boldsymbol{404.7\frac{m}{s}}$.

b) Le débit massique est donné par : $\dot{m} = \rho VA$, mais en utilisant les valeurs de la température et la pression précédemment calculées on aura la masse volumique comme :

$$\rho = \frac{P}{rT} = \frac{80 \times 10^3}{(8314/39.9) \times 145.3} = 2.64\ kg/m^3$$

d'où : $\boldsymbol{\dot{m}} = 2.64 \times 404.7 \times \frac{\pi}{4}(0.012)^2 = \boldsymbol{0.122\ kg/s}$.

ExO5.*Solution*

Pour le gaz considéré :

$$r = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} = \frac{8314}{4} = 2078.5\ J/kgK$$

d'où, le nombre de Mach à la section **1** sera :

$$\boldsymbol{M_1} = \frac{V_1}{a_1} = \frac{150}{\sqrt{1.3 \times 2078.5 \times 288}} = \boldsymbol{0.170}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{T_2/T_1} \Longrightarrow a_2 = 842.99\ m/s$$

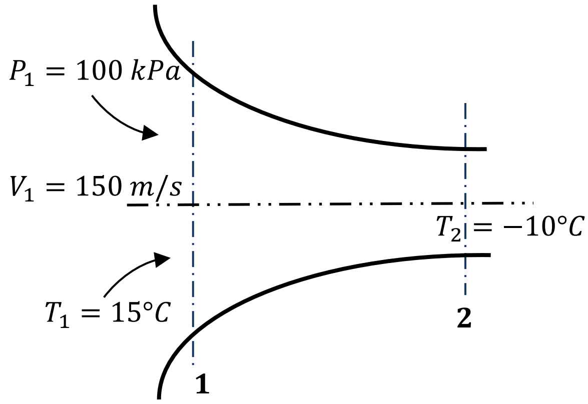

Fig. 3.

Les relations isentropiques donnent:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M_2^2}$$

Ce qui donne : $\boldsymbol{M_2 = 0.8157}$

Mais la vitesse du son à la section **2** est donnée par : $a_2 = 843\ m/s$

D'où : $\boldsymbol{V_2} = a_2 M_2 = \boldsymbol{687.63\ m/s}$

Les relations aussi donnent :

$$\boldsymbol{P_2} = P_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = 100 \left(\frac{843}{882.15}\right)^{\frac{2.6}{0.3}} = \boldsymbol{67.47\ kPa} \quad \therefore$$

<u>ExO6.</u>*Solution*

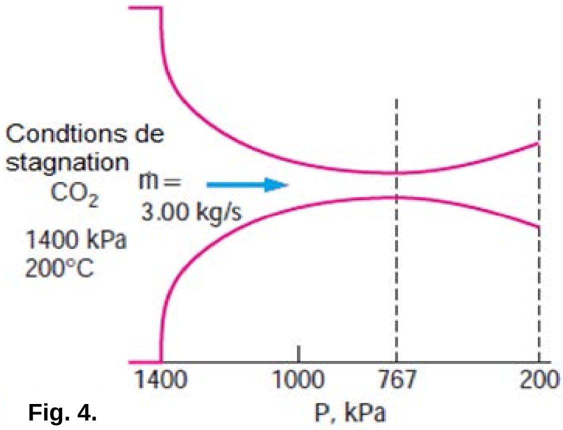

Fig. 4.

Puisque la vitesse est faible ($V \approx 0$) à l'entrée, la température d'entrée est presque égale à la température de stagnation, l'écoulement est isentropique donc la température et la pression de stagnation restent constantes le long de la tuyère, donc :
$P_0 = 1400\ kPa, T_0 = 200°C = 473\ K$.

Pour une section ayant $P_1 = \boldsymbol{1000}\ kPa$:

$$\boldsymbol{T_1} = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 473 \left(\frac{1000}{1400}\right)^{\frac{0.3}{1.3}} = \boldsymbol{437.7\ K}$$

$$\boldsymbol{V_1} = \sqrt{2c_p(T_0 - T_1)} = \sqrt{2 \times \frac{1.3 \times 189}{1.3 - 1}(473 - 437.7)} = \boldsymbol{240.46\ \frac{m}{s}}$$

$$\boldsymbol{\rho_1} = \frac{P_1}{rT_1} = \frac{1000 \times 10^3}{189 \times 437.7} = \boldsymbol{12.088\ kg/m^3}$$

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{\dot{m}}{\rho_1 V_1} = \frac{3}{12.088 \times 240.46} = \boldsymbol{10.32 \times 10^{-4}\ m^2 = 10.32\ cm^2}$$

$$\boldsymbol{M_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma\ r\ T_1}} = \frac{240.46}{\sqrt{1.3 \times 189 \times 437.7}} = \boldsymbol{0.733}$$

Le tableau suivant récapitule les résultats des calculs correspondants aux autres sections :

$\boldsymbol{P}\ [\boldsymbol{kPa}]$	$\boldsymbol{T}\ [\boldsymbol{K}]$	$\boldsymbol{V}\ [\boldsymbol{m/s}]$	$\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{kg/m^3}]$	$\boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{cm^2}]$	$\boldsymbol{M}$
1400	473	0	15.66	∞	0
1000	437.7	240.46	12.088	10.32	0.733

767	411.7	316.87	9.86	9.60	$0.996 \approx 1$
200	301.9	529.24	3.51	16.17	1.943

ExO7.*Solution*

Pour l'air on prend ; $\gamma = 1.4,\ c_p = 1005\,\frac{m^2}{s^2K}, et\ r = 287\ m^2/s^2K,$

a) Avec V_1 et T_1 connues, on peut calculer T_{01} sans connaitre le nombre de Mach :

$$\boldsymbol{T_{01}} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 320 + \frac{240^2}{2 \times 1005} = \mathbf{348.7\ K}$$

Puis on calcule M_1 du rapport connu des températures :

$$M_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\frac{T_{01}}{T_1} - 1\right] = 0.4484 \quad \Longrightarrow \quad M_1 = 0.67$$

(ou alternativement, $a_1 = \sqrt{\gamma r T_1} = 358.57\ m/s$, donc $M_1 = \frac{V_1}{a_1} = 0.67$.)

b) La pression de stagnation à la section **1** sera :

$$\boldsymbol{P_{01}} = P_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 170\left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \times 0.67^2\right)^{3.5} = \mathbf{229.67\ kPa}$$

c) On veut calculer la masse volumique de l'éq. du gaz parfait avant de calculer la masse volumique de stagnation :

$$\rho_1 = \frac{P_1}{rT_1} = \frac{170 \times 10^3}{287 \times 320} = 1.85\ kg/m^3$$

Par suite,

$$\boldsymbol{\rho_{01}} = \rho_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1.85\left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \times 0.67^2\right)^{2.5} = \mathbf{2.29\ \ kg/m^3}$$

(Alternativement, on peut avoir directement $\rho_0 = \frac{P_0}{rT_0} = 2.29\ kg/m^3$)

d) On a déjà calculé $\boldsymbol{M_1 = 0.67}$

e) Aussi, la vitesse maximale :

$$\boldsymbol{V_{max}} = \sqrt{2c_pT_0} = \sqrt{2 \times 1005 \times 348.7} = \mathbf{837.19\ m/s}$$

f) Et la vitesse sonique (critique) est :

$$\boldsymbol{V^*} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}rT_0} = \sqrt{\frac{2 \times 1.4 \times 287 \times 348.7}{2.4}} = \mathbf{341.70\ m/s}$$

g) Au point **2**, la température n'est pas connue, mais puisqu'on connait que l'écoulement est adiabatique, la température de stagnation est constante $T_{02} = T_{01} = 348.7\ K,$ d'où :

$$T_2 = T_{02} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 348.7 - \frac{290^2}{2 \times 1005} = 306.9\ K$$

et puisque l'écoulement n'est pas isentropique, la pression de stagnation locale est calculée par la condition isentropique locale :

$$\boldsymbol{P_{02}} = P_2\left(\frac{T_{02}}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 135\left(\frac{348.7}{306.9}\right)^{3.5} = \mathbf{211.07\ kPa}$$

Cela est 8% inférieur à la pression de stagnation en amont P_{01}.

On note que dans cette 2ème partie de l'exercice, on prend l'avantage de la connaissance de T_{02}, P_2, V_2 pour avoir calculer P_{02} d'une manière efficace. Mais, on pourra vérifier que l'approche par nombre de Mach est plus laborieuse.
