جامعة الشهيد حمه لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

السلسلة رقم 01

التمرين الأول: لتكن $(\alpha_n) \in \ell^\infty(\mathbb{C})$ و $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{C})$.

(١). تحقق ان $\alpha_n x_n \in \ell^2(\mathbb{C})$

(٢). نعتبر المؤثر $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$، والمعرف بـــ $T(x_n) = (\alpha_n x_n)$.
بين ان $T \in \mathcal{L}(\ell^2((C)))$.

(٣). احسب $\|T\|_{\mathcal{L}}$.

التمرين الثاني: ليكن $E = C([0,1])$ فضاء الدوال المستمرة على $[0,1]$ وليكن $T : E \to E$ مؤثرا معرفا بـــ $Tx(t) = \int_0^t (t+s)x(s)ds$.

(١). بين ان T مؤثرا خطيا محدودا.

(٢). احسب نظيمه.

التمرين الثالث: احسب نظيم المؤثرات التالية:

(١). $E = \ell^1(\mathbb{C}), T : E \to E,\ \ Tx = (3x_1, x_2, x_3, ...)$

(٢). $E = L^p([0,1]),\ ,\ T : E \to E,\ \ Tx(t) = x(\frac{t}{2})$.

التمرين الرابع: لتكن $(a_i), (x_i)$ متتاليتين من $\ell^2(\mathbb{C})$،
ونعرف متتالية المؤثرات (T_n) من $\ell^2(\mathbb{C})$ نحو $\mathbb{C}$، بحيث. $T_n x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

(١). أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $T_n \in (\ell^2)^*$

(٢). بين أن $\|T_n\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

(٣). لتكن $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$، بحيث $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$

- برهن أن $T \in (\ell^2)^*$ وأن $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
- برهن أن (T_n) متقاربة نحو T في $(\ell^2)^*$.

التمرين الخامس: لتكن (a_i) متتالية عناصر عقدية، $(x_i) \in \ell^2$، بحيث تكون السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ متقاربة في $\mathbb{C}$ و $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ بحيث $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

(١). أثبت أن (T_n) محدودة.

(٢). أثبت أن $a_i \in \ell^2(\mathbb{C})$.

التمرين السادس: ليكن $T_n : \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C})$، بحيث $T_n x = (x_n, x_{n+1}, 0, 0, ..., 0, ...)$.

(١). أحسب $\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\ell^1}$. أثبت أن T_n متقاربة ببساطة نحو T يطلب تعينه.

(٢). هل المتتالية متقاربة بانتظام؟