II Chapitre 2. Matrices de transformations homogènes

La présence conjointe de produits et de sommes dans l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{O_0P}_{/0} = \overrightarrow{O_0O_1}_{/0} + R_{01} \times \overrightarrow{O_1P}_{/1}$$

est peu commode pour effectuer des calculs systématiques, dus par exemple à des changements successifs de repères. On lui préfère une représentation matricielle de dimension 4, basée sur les coordonnées homogènes.

La représentation en coordonnées homogènes consiste à doter toute notation vectorielle d'un facteur d'échelle en introduisant une coordonnée supplémentaire. Soit par exemple, un point ***M*** de l'espace, rapporté à trois axes rectangulaires, donné par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Alors la représentation du point ***M*** à l'aide de coordonnées homogènes est faite avec un quaternion, *i.e.*,

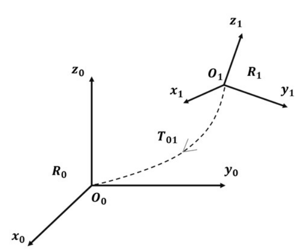
$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} avec \quad a = x/w \ , \ b = y/w, \qquad c = z/w$$

Soit la matrice de transformation homogène $\boldsymbol{T_{01}}$ correspondant à la matrice partitionnée suivante :

$$T_{01} = \begin{pmatrix} \underbrace{R_{01_{(3,3)}}}_{\text{rotation}} & \underbrace{t_{01_{(3,1)}}}_{\text{translation}} \\ 0\,0\,0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le facteur d'échelle est unitaire (w =1).

La matrice $\boldsymbol{T_{01}}$ représente la transformation permettant de passer du repère $\boldsymbol{R_1}$ au repère $\boldsymbol{R_0}$.



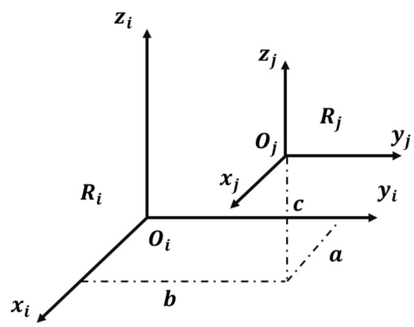
En effet, elle permet d'exprimer dans le repère R_0 les coordonnées d'un vecteur exprimées dans le repère R_1. Autrement dit, on a :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_{01} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.1 Cas de transformations homogènes

II.1.1 Simple translation

On note $\boldsymbol{Trans}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ la matrice de transformation homogène correspondant à une translation de $\boldsymbol{a}$ selon l'axe $\boldsymbol{x}$.



On a : $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

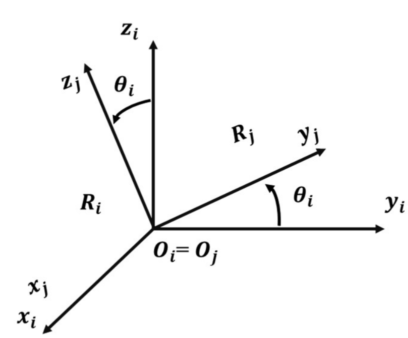
On a : $T_{ij} = Trans(x_i, a) \times Trans(y_i, b) \times Trans(z_i, c)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point M dans le repère R_j (c-à-d : $\overrightarrow{O_j M}_{/j} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$), alors les coordonnées du point M dans le repère R_i sont : $T_{ij} \times M_{/j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.1.2 Simple rotation

On note $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$ la matrice de rotation d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ autour de l'axe $\boldsymbol{x}$.



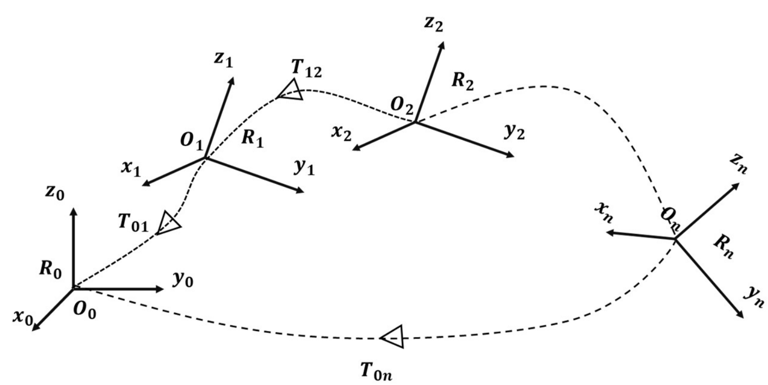
On a : $T_{ij} = Rot(x_i, \theta_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & R_{ij}(x_i, \theta_i) & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point M dans le repère R_j, alors les coordonnées du point M dans le repère R_i sont : $T_{ij} \times M_{/j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \cos(\theta_i)\, y - \sin(\theta_i)\, z \\ \sin(\theta_i)\, y + \cos(\theta_i)\, z \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une matrice de transformation peut se décomposer en 2 matrices de transformation :

$$T = \begin{pmatrix} A_{(3,3)} & t_{(3,1)} \\ 0\,0\,0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & t_{(3,1)} \\ 0\,0\,0 & 1 \end{pmatrix}}_{translation} \times \underbrace{\begin{pmatrix} & 0 \\ A_{(3,3)} & 0 \\ & 0 \\ 0\,0\,0 & 1 \end{pmatrix}}_{rotation}.$$

- ***Remarque*** : *Le produit de matrices de transformation homogène n'est pas commutatif, du fait de la non-commutativité de la rotation*.



On a : $T_{0n} = T_{01} \times T_{12} \times \cdots \times T_{n-1,\,n}$.

Soit $\overrightarrow{O_n M}_{/n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $T_{0n} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ exprime les coordonnées du point M dans le repère R_0 (c-à-d : $\overrightarrow{O_0 M}_{/0} = T_{0n} \times \overrightarrow{O_n M}_{/n}$).