

محاضرات في الرياضيات المالية

المحور الأول: العمليات المالية قصيرة الأجل

محاضرات في الرياضيات المالية

أولاً: الفائدة البسيطة:

1- تعريف:

تعرف الفائدة البسيطة على أنها مقابل التنازل عن حق الانتفاع والاستخدام لرأس مال معين بمعدل معلوم، وفترة زمنية متفق عليها.

2- محددات الفائدة:

تتحكم في قيمة الفائدة مجموعة من العوامل نذكرها فيما يلي:

- رأس المال (الأصل الموظف): وهي القيمة الابتدائية للمبلغ المستثمر في شكل وديعة بفائدة، وعلى أساسه يتم حساب الفوائد طيلة فترة التوظيف، ويرمز له بالرمز a .
- معدل الفائدة المطبق: وهو نسبة مئوية، على أساسها يتم حساب الفائدة الناتجة عن التوظيف انطلاقاً من الأصل الموظف لقاء كل فترة من فترات التوظيف، ويرتبط معدل الفائدة بوحدة زمنية، كأن نقول معدل فائدة سنوي، سداسي، أو فصلي. ويرمز له بالرمز t .

- مدة التوظيف: وهي الفاصل الزمني بين تاريخ بداية عقد التوظيف، وتاريخ انقضائه، على أن يتم احتساب يوم بداية العقد، دون احتساب يوم انتهائه، ويعبر عن مدة التوظيف بالوحدات الزمنية منفردة أو مجتمعة، كأن نقول مدة التوظيف سنتين، 04 أشهر، أو نقول مدة التوظيف 01 سنة و05 أشهر و20 يوم. ويرمز لها بالرمز n .

3- الصيغة العامة لحساب الفائدة البسيطة، والجملة المكتسبة:

إذا اعتبرنا أن شخصاً قام بتوظيف مبلغ قدره a بمعدل فائدة سنوي قدره t لمدة n من السنوات، سيكون تطور رصيد المتعامل خلال مدة التوظيف كما يظهره الجدول أدناه:

محاضرات في الرياضيات المالية

الفترة i	الأصل الموظف للفترة i	فائدة الفترة i	الفائدة الناتجة عن التوظيف	الجملة المكتسبة نهاية الفترة i
01	A	$I_1 = a.t$	$I = a.t.1$	$A = a + I$ $A = a + a.t = a.(1+t)$
02	A	$I_2 = a.t$	$I = a.t + a.t = a.t.2$	$A = a + I = a + a.t.2$ $A = a.(1 + t.2)$
...
N	A	$I_n = a.t$	$I = a.t.n$	$A = a.(1 + t.n)$

من الجدول أعلاه يمكن كتابة:

الصيغة العامة لحساب الفائدة البسيطة: $I = a . t . n$

الصيغة العامة لحساب الجملة المكتسبة: $A = a . (1 + t . n)$

للإشارة فإن الصيغتين الحسابيتين أعلاه لا يمكن تطبيقهما مباشرة على حالتيهما إلا إذا تحقق التجانس بين الوحدة الزمنية المرتبطة بمعدل التوظيف، والوحدة الزمنية الأخرى المرتبطة بمدة التوظيف، كأن يكون معدل التوظيف سنوي ومدة التوظيف معبر عنها بالسنوات، أو معدل التوظيف فصلي، ومدة التوظيف معبر عنها بالفصول ...
مثال:

- قام شخص بتوظيف مبلغ قدره 125000 دينار لمدة 02 سنة
- المطلوب: - أحسب الفائدة الناتجة عن التوظيف بمعدل سنوي 12% .
 - أحسب الجملة المكتسبة بمعدل توظيف سنوي 09% .

الحل:

- حساب الفائدة الناتجة عن التوظيف حيث: $a = 125000 . n = 2_a . t = 12\%$
 $I = a . t . n = 125000 \times 0.12 \times 2 = 30000$

- حساب الجملة المكتسبة من التوظيف حيث: $a = 125000 n = 2_a t = 09\%$
 $A = a . (1 + t . n) = 125000 \times (1 + 0.09 \times 2) = 147500$

4- الصيغة العامة لحساب الفائدة البسيطة في حالة عدم تجانس الوحدات الزمنية المرتبطة بالمدة والمعدل:

محاضرات في الرياضيات المالية

لإيجاد الصيغة العامة لحساب الفائدة البسيطة في هذه الحالة، يمكننا البداية من صيغتها الحسابية في حالة تجانس الوحدات الزمنية المرتبطة بمعدل ومدة التوظيف، فيكون لدينا $I = a.t.n \Leftrightarrow I = a.t.\frac{n}{1}$ إن القيمة 1 في مقام العلاقة الأخيرة يمثل إجابة للسؤال التالي: كم من الوحدات الزمنية من التي ارتبطت بمدة التوظيف في وحدة زمنية واحدة من التي ارتبطت بمعدل التوظيف؟

و الإجابة عن هذا السؤال تكون بناء على العلاقة الأساسية بين الوحدات الزمنية للسنة التجارية، حيث تتألف السنة من 2 سداسي، أو 4 فصول، أو 12 شهر، أو 360 يوم

$$01a = 02 s = 04 t = 12 m \quad 360 j$$

وعلى هذا الأساس يمكن كتابة مقام الصيغة العامة لحساب الفائدة البسيطة أو الجملة المكتسبة بما تقتضيه العلاقة القائمة بين الوحدة الزمنية المرتبطة بمعدل التوظيف، والوحدة الزمنية المرتبطة بمدة التوظيف.

فإذا اعتبرنا معدل التوظيف سنوي ومدة التوظيف بالأشهر، سيكون السؤال المذكور أعلاه: كم شهرا في السنة الواحدة؟ فتكون الإجابة 12 شهرا فتكتب العلاقة كما يلي:

$$I = a.t_a \cdot \frac{n_m}{12}$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$I = a.t_s \cdot \frac{n_m}{6}$$

$$I = a.t_s \cdot \frac{n_j}{180}$$

$$I = a.t_t \cdot \frac{n_s}{\frac{1}{2}}$$

مع الإشارة إلى أنه في حالة تعدد الوحدات الزمنية المرتبطة بمدة التوظيف يعاد التعبير عنها بالوحدة الزمنية الأصغر، فإذا كانت لديك مدة توظيف مقدرة ب 01 سنة و 10

محاضرات في الرياضيات المالية

أشهر ستعيد التعبير عنها بالأشهر (الشهر أصغر من السنة) فتصبح المدة 22 شهرا. والهدف من ذلك هو ضمان التعبير عن مدة التوظيف بوحدة زمنية واحدة بالدرجة الأولى، وجعلها تكتب بعدد طبيعي بدرجة أقل أهمية.

مثال:

أحسب الفائدة الناتجة عن التوظيف في الحالات التالية:

الحالة	الأصل الموظف	معدل التوظيف	مدة التوظيف	المدة بالوحدة الأصغر
01	196000	12% سنوي	01 سنة و 03 أشهر	15 شهر
02	485000	07.5% سداسي	02 سنة	-
03	675000	04.5% فصلي	01 سداسي و 01 فصل و 02 شهر	11 شهر
04	900000	18% سنوي	01 سنة و 09 أشهر و 15 يوم	645 يوم

الحل:

$$1- I = a \cdot t_a \cdot \frac{n_m}{12} = 196000 \times 0.12 \times \frac{15}{12} = 29400$$

$$2 - I = a \cdot t_s \cdot \frac{n_a}{\frac{1}{2}} = 485000 \times 0.075 \times \frac{2}{\frac{1}{2}} = 145500$$

$$3 - I = a \cdot t_t \cdot \frac{n_m}{3} = 675000 \times 0.045 \times \frac{11}{3} = 111375$$

$$4 - I = a \cdot t_a \cdot \frac{n_j}{360} = 900000 \times 0.18 \times \frac{645}{360} = 290250$$

5- المعدلات المتناسبة:

نقول أن المعدلات t% السنوي، t% السداسي، t% الفصلي، t% الشهري، معدلات مناسبة إذا فقط إذا أنتجت نفس مبلغ الفائدة البسيطة لنفس الأصل الموظف في نفس مدة التوظيف، أي أنه إذا فرضنا أن شخصا وظف مبلغا قدره a لمدة n من السنوات، فحسب مبدأ التناسب تتحقق المساواة التالية:

$$I = a \cdot t_a \cdot n_a = a \cdot t_s \cdot \frac{n_a}{\frac{1}{2}} = a \cdot t_t \cdot \frac{n_a}{\frac{1}{4}} = a \cdot t_m \cdot \frac{n_a}{\frac{1}{12}}$$

محاضرات في الرياضيات المالية

وبعمليات الاختزال في العلاقات السابقة نجد:

$$t_a = 2.t_s = 4.t_t = 12.t_m$$

من خلال العلاقة السابقة يمكن إيجاد المعدلات المتناسبة، حيث تظهر هذه الأخيرة عملية من خلال خلق تجانس الوحدة الزمنية المرتبطة بالمعدل مع الأخرى المرتبطة بمدة التوظيف.

مثال:

أوجد مبلغ الجملة المكتسبة بطريقة المعدلات المتناسبة في الحالات التالية:

الحالة	الأصل الموظف	معدل التوظيف	مدة التوظيف
01	320000	6% سداسي	1.5 سنة
02	550000	15% سنوي	03 فصول
03	732000	4.5% فصلي	08 أشهر
04	800000	1% شهري	01 سداسي

الحل:

®1 لحساب الجملة المكتسبة علينا إيجاد المعدل المتناسب السنوي للمعدل السداسي بما أن

$$t_a = 2.t_s \Rightarrow t_a = 2 \times 6\% = 12\% \quad \text{مدة التوظيف بالسنوات، لدينا:}$$

$$A = a \times (1 + t.n) \Rightarrow A = 320000 \times (1 + 0.12 \times 1.5) = 377600$$

®2 لحساب الجملة المكتسبة علينا إيجاد المعدل المتناسب الفصلي للمعدل السنوي بما أن

$$t_a = 4.t_s \Rightarrow t_t = \frac{t_a}{4} \% = \frac{15\%}{4} = 3.75\% \quad \text{مدة التوظيف بالفصول}$$

$$A = a \times (1 + t.n) \Rightarrow A = 550000 \times (1 + 0.0375 \times 3) = 611875$$

®3 لحساب الجملة المكتسبة علينا إيجاد المعدل المتناسب الشهري للمعدل الفصلي بما أن

مدة التوظيف بالأشهر، لدينا:

$$4 \times t_t = 12 \times t_m \Rightarrow t_m = \frac{4 \times t_t}{12} \% = \frac{4 \times 4.5\%}{12} = 1.5\%$$

$$A = a \times (1 + t \times n) = 732000 \times (1 + 0.015 \times 8) = 819840$$

محاضرات في الرياضيات المالية

4 @ لحساب الجملة المكتسبة علينا إيجاد المعدل المتناسب السداسي للمعدل الشهري بما أن مدة التوظيف بالسداسيات، لدينا:

$$2 \times t_s = 12 \times t_m \Rightarrow t_s = \frac{12 \times t_m}{2} \% = \frac{12 \times 1\%}{2} = 6\%$$

$$A = a \times (1 + t.n) \Rightarrow A = 800000 \times (1 + 0.06 \times 1) = 848000$$

6- طريقة النمر والقاسم:

نعتبر أن أصلاً موظفاً قيمته a بمعدل فائدة سنوي قدره t_a % لمدة n من السنوات، تكون الصيغة العامة لحساب الفائدة كما يلي: $I = a \cdot t_a \cdot n$ ، وبعد تعبيرنا عن مدة التوظيف بالأيام تتحول العبارة: $I = a \times t_a \times \frac{n_j}{360}$ ، وإرجائنا القسمة على 100 تصبح

العلاقة: $I = a \times t_a \% \times \frac{n_j}{36000}$ ، وهي نفسها العلاقة $I = \frac{a \times n_j}{36000} \cdot t_a \%$ ، من هذه الأخيرة نضع:

$$I = \frac{N}{D} \quad \text{فتصبح صيغة حساب الفائدة:} \quad D = \frac{36000}{t_a \%} \quad \text{و} \quad N = a \times n_j$$

حيث N : النمر، D : القاسم.

وتكون طريقة النمر والقاسم عملية في استخدامها إذا كنا بصدد حساب مجموع الفوائد الناتجة عن مجموعة من المبالغ مختلفة القيمة ومدة التوظيف ولها نفس معدل الفائدة المطبق، في هذه الحالة يحسب النمر وفقاً للعلاقة التالية: $N = \sum_{i=1}^k a_i \times n_{ij}$ ، حيث k تمثل عدد المبالغ الموظفة وهي معرفة بالقيمة ومدة التوظيف معبر عنها بالأيام.

مثال:

باستخدام الصيغة العامة وطريقة النمر والقاسم، أحسب مجموع الفوائد الناتجة عن توظيف المبالغ التالية بمعدل فائدة سداسي 09%.

540000	180000	240000	128000	الأصول الموظفة
04 أشهر	1 سداسي	09 أشهر	1 سنة و 4 أشهر	مدة التوظيف

الحل:

1- حساب مجموع الفوائد باستعمال الصيغة العامة:

محاضرات في الرياضيات المالية

$$I = 128000 \times 0.09 \times \frac{16}{6} + 240000 \times 0.09 \times \frac{9}{6} + 180000 \times 0.09 \times 1 + 540000 \times 0.09 \times \frac{4}{9}$$

$$= 30720 + 32400 + 16200 + 32400 = 111720$$

2- حساب مجموع الفوائد بطريقة النمر والقاسم:

$$I = \frac{N}{D} \text{ حيث } D = \frac{36000}{t_a \%} \text{ و } N = \sum_{i=1}^k a_i \times n_{ij} \text{ ، وبما أن معدل التوظيف المعطى سداسي}$$

يجب حساب المعدل المتناسب السنوي للمعدل السداسي، فيكون:

$$t_a = 2 \cdot t_s \Rightarrow t_a = 2 \times 9\% = 18\%$$

وعليه يصبح:

$$D = \frac{36000}{18} = 2000$$

كما أن مدد التوظيف لا يعبر عنها بالأيام، لذا يجب تحويلها كذلك لتصبح:

$$n_4 = 4 \times 30 = 120j \text{ ، } n_3 = 1 \times 6 \times 30 = 180j \text{ ، } n_2 = 9 \times 30 = 270j \text{ ، } n_1 = 1 \times 360 + 4 \times 30 = 480j$$

ومنه يصبح:

$$N = 128000 \times 480 + 240000 \times 270 + 180000 \times 180 + 540000 \times 120$$

$$= 61440000 + 64800000 + 32400000 + 64800000 = 223440000$$

وبالتعويض في الصيغة الحسابية لمجموع الفوائد نجد:

$$I = \frac{223440000}{2000} = 111720$$

7- حساب مختلف محددات الفائدة البسيطة والجملة المكتسبة:

مثال:

1- إليك الجدول التالي، والمطلوب إتمام الفراغات الواردة مع إظهار العمليات الحسابية

اللازمة

A _i	I _i	n _i	t _i	a _i	i
	28500	19 m		150000	01
	5203.125		9% _s	18750	02
	6234.375	875 j	9% _a	28500	03
205968.75		9 m		195000	04
1253125		15 j	6% _a		05

محاضرات في الرياضيات المالية

الحل:

الحالة الأولى:

- حساب معدل الفائدة السنوي:

$$I = a \times t_a \times \frac{n_j}{360} \Leftrightarrow 28500 = 150000 \times t_a \times \frac{19}{12}$$

$$\Rightarrow t_a = \frac{28500 \times 12}{150000 \times 19} = 0.12 = 12\%$$

- حساب الجملة المكتسبة:

$$A = a + I = 150000 + 28500 = 178500$$

الحالة الثانية:

- حساب مدة التوظيف:

$$I = a \times t_s \times \frac{n_j}{180} \Leftrightarrow 5203.125 = 18750 \times 0.09 \times \frac{n_j}{180}$$

$$\Rightarrow n_j = \frac{5203.125 \times 180}{18750 \times 0.09} = 555j$$

$$= 01a + 06m + 15j$$

حساب الجملة المكتسبة:

$$A = a + I = 18750 + 5203.125 = 23953.125$$

الحالة الثالثة:

- حساب الأصل الموظف:

$$I = a \times t_a \times \frac{n_j}{360} \Leftrightarrow 6234.375 = a \times 0.09 \times \frac{875}{360}$$

$$\Rightarrow a = \frac{6234.375 \times 360}{0.09 \times 875} = 28500$$

- حساب الجملة المكتسبة:

$$A = a + I = 28500 + 6234.375 = 34734.375$$

محاضرات في الرياضيات المالية

الحالة الرابعة:

- حساب معدل الفائدة السنوي:

$$A = a \times \left(1 + t_a \times \frac{n_m}{12}\right) \Leftrightarrow 205968.75 = 195000 \times \left(1 + t_a \times \frac{9}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{205968.75}{195000} = \left(1 + t_a \times \frac{9}{12}\right)$$

$$\Rightarrow t_a = (1.05625 - 1) \times \frac{12}{9} = 0.075 = 7.5\%$$

- حساب الفائدة:

$$A = a + I \Rightarrow I = A - a = 205968.75 - 195000 \Rightarrow I = 10968.75$$

الحالة الخامسة:

- حساب الأصل الموظف

$$A = a \times \left(1 + t_a \times \frac{n_j}{360}\right) \Leftrightarrow 1253125 = a \times \left(1 + 0.06 \times \frac{15}{360}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{1253125 \times 360}{360.9} = 1250000$$

- حساب الفائدة:

$$A = a + I \Rightarrow I = A - a = 1253125 - 1250000 \Rightarrow I = 3125$$