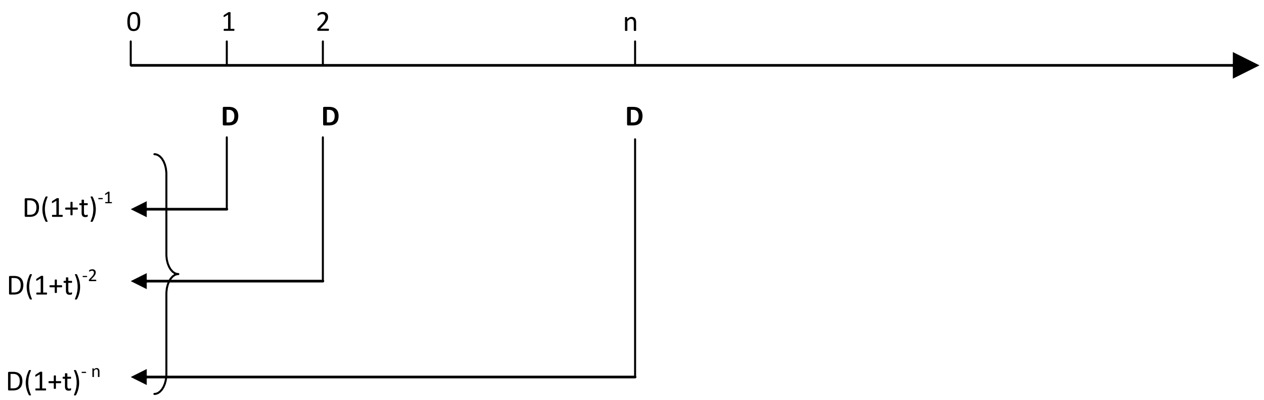
الدرس الثامن: القيمة الحالية لمجموع الدفعات الثابتة

1 – القيمة الحالية لمجموع الدفعات العادية الثابتة:

2 – 1 الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية لمجموع الدفعات العادية الثابتة:

إذا اعتبرنا أن شخصا ملتزما بموجب عقد بدفع سنوي لمبلغ قدره D يستحق نهاية كل سنة من السنوات المتضمنة في العقد، وعلى اعتبار معدل الفائدة المطبق سنوي ثابت طيلة مدة العقد، يمكن إيجاد القيمة الحالية لمجموع الدفعات المسددة بداية العقد من خلال التمثيل البياني التالي:



من خلال التمثيل البياني نجد الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية للدفعات العادية الثابتة كما يلي: $A_0 = D(1+t)^{-1} + D(1+t)^{-2} + \ldots + D(1+t)^{-n}$

نلاحظ أن القيمة الحالية لمجموع الدفعات العادية الثابتة تمثل فيما بينها حدود لمتتالية هندسية متناقصة، حدها الأول $U_1 = D(1+t)^{-1}$ وأساسها $R = (1+t)^{-1}$ وعبارة حدها العام $U_i = D(1+t)^{-i}$، وعليه تكون صيغة المجموع:

$$\sum U_i = U_1 \frac{1-R^n}{1-R} \Leftrightarrow A_0 = D(1+t)^{-1} \frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

$$A_0 = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{(1+t)\left[1-(1+t)^{-1}\right]} = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{1+t-1}$$

الدرس الثامن: القيمة الحالية لمجموع الدفعات الثابتة

وباختصار العلاقة نجد: $A_0 = D\dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ وهي الصيغة الحسابية للقيمة الحالية لمجموع الدفعات العادية الثابتة، وهي تقيم الدفعات فترة قبل تاريخ الدفعة الأولى.

2 – 2 حساب مختلف حدود الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية لمجموع الدفعات العادية الثابتة:

– حساب قيمة الدفعة:

لدينا:
$$A_0 = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow D = \frac{A_0 \times t}{1-(1+t)^{-n}}$$

– حساب عدد الدفعات:

لدينا:
$$A_0 = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{A_0 \times t}{D} = 1-(1+t)^{-n}$$

$$\Rightarrow (1+t)^{-n} = 1-\frac{A_0 \times t}{D}$$

وبإدخال اللوغاريتم النيبيري على طرفي المساواة نجد:

$$-nLn(1+t) = Ln\left(1-\frac{A_0 \times t}{D}\right)$$
ومنه نجد:
$$n = \frac{Ln\left(1-\frac{A_0 \times t}{D}\right)}{-Ln(1+t)}$$

– حساب معدل الفائدة:

لدينا:
$$A_0 = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{A_0}{D} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

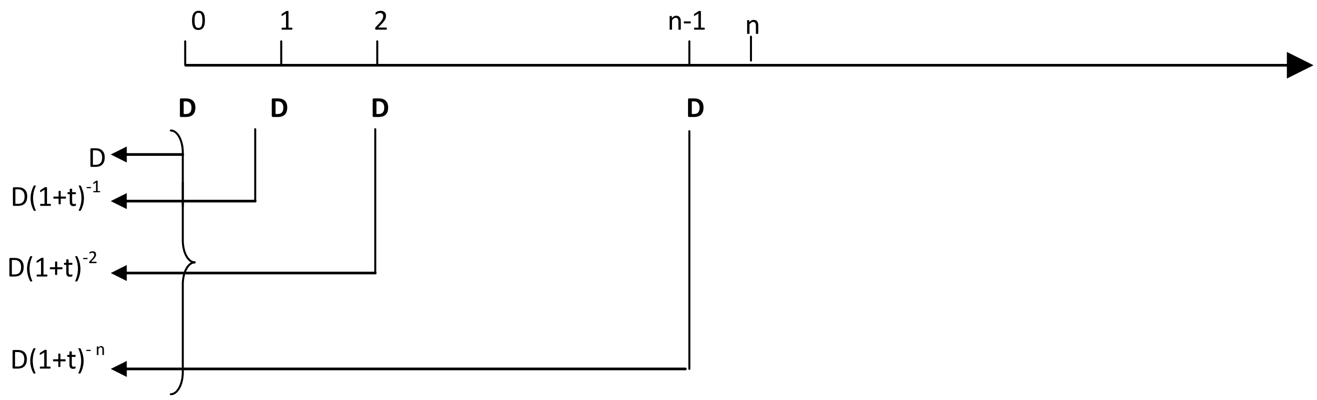
بافتراض معدلان يحققان حصر المعدل المطلوب يتم تحديد قيمة المعدل المطبق بإتباع نفس الخطوات الواردة في حساب المعدل انطلاقا من الصيغة العامة لحساب جملة مجموع الدفعات الثابتة.

الدرس الثامن: القيمة الحالية لمجموع الدفعات الثابتة

2 – القيمة الحالية لمجموع الدفعات الفورية الثابتة:

2 – 1 الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية لمجموع الدفعات الفورية الثابتة:

إذا اعتبرنا أن شخصا ملتزما بموجب عقد بدفع سنوي لمبلغ قدره D يستحق بداية كل سنة من السنوات المتضمنة في العقد، وعلى اعتبار معدل الفائدة المطبق سنوي ثابت طيلة مدة العقد، يمكن إيجاد القيمة الحالية لمجموع الدفعات المسددة بداية العقد من خلال التمثيل البياني التالي:



من خلال التمثيل البياني نجد الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية للدفعات العادية الثابتة كما يلي:

$$A_0 = D + D(1+t)^{-1} + D(1+t)^{-2} + \dots + D(1+t)^{-(n-1)}$$

نلاحظ أن القيمة الحالية لمجموع الدفعات العادية الثابتة تمثل فيما بينها حدود لمتتالية هندسية متناقصة، حدها الأول $U_1 = D$ وأساسها $R = (1+t)^{-1}$ وعبارة حدها العام $U_i = D(1+t)^{-(i-1)}$، وعليه تكون صيغة المجموع:

$$\sum U_i = U_1 \frac{1-R^n}{1-R} \Leftrightarrow A_0 = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

$$A_0 = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-\frac{1}{1+t}} = D\frac{1-(1+t)^{-n}}{\frac{1+t-1}{1+t}}$$

الدرس الثامن: القيمة الحالية لمجموع الدفعات الثابتة

وباختصار العلاقة نجد: $A_0 = D(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ وهي الصيغة الحسابية للقيمة القيمة الحالية لمجموع الدفعات الفورية الثابتة، وهي تقيم الدفعات بتاريخ الدفعة الأولى.

2 – 2 حساب مختلف حدود الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية لمجموع الدفعات الفورية الثابتة:

– حساب قيمة الدفعة:

لديـنا:

$$A_0 = D(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow D = \frac{A_0 \times t}{(1+t)\left(1-(1+t)^{-n}\right)}$$

– حساب عدد الدفعات:

لديـنا:

$$A_0 = D(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{A_0 \times t}{D(1+t)} = 1-(1+t)^{-n}$$

$$\Rightarrow (1+t)^{-n} = 1-\frac{A_0 \times t}{D(1+t)}$$

وبإدخال اللوغاريتم النيبيري على طرفي المساواة نجد:

$$-n\mathrm{Ln}(1+t) = \mathrm{Ln}\left(1-\frac{A_0 \times t}{D(1+t)}\right)$$

ومنه نجد:

$$n = \frac{\mathrm{Ln}\left(1-\frac{A_0 \times t}{D(1+t)}\right)}{-\mathrm{Ln}(1+t)}$$

الدرس الثامن: القيمة الحالية لمجموع الدفعات الثابتة

- حساب معدل الفائدة:

لديـنا:

$$A_0 = D(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \Rightarrow \frac{A_0}{D} = (1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

بافتراض معدلان يحققان حصر المعدل المطلوب يتم تحديد قيمة المعدل المطبق بإتباع نفس الخطوات الواردة في حساب المعدل انطلاقا من الصيغة العامة لحساب جملة مجموع الدفعات الثابتة.

التمرين الأول:

أ)- يسدد تاجر سنويا 800000 دينار كمقابل إيجار محل لمدة خمس سنوات بمعدل فائدة سنوي 10%. 1)- أحسب جملة مجموع الإيجارات المسددة نهاية العقد

2)- أحسب جملة إيجار السنتين الأولى والثانية نهاية العقد

ب)- إذا اعتبرنا أن معدل الفائدة المطبق تغير نهاية السنة الثالثة من العقد ليصبح 12% سنوي

1)- أحسب جملة مجموع الإيجارات المسددة نهاية العقد

2)- أحسب القيمة الحالية لمجموع الإيجارات المسددة بداية العقد بطريقتين.

التمرين الثاني:

يودع احد الأشخاص آخر كل سنة في البنك مبلغ 20000 دينار ولمدة 20 سنة بمعدل فائدة 5%.

1)- أحسب جملة المبالغ المودعة عند آخر دفعة

2)- أ) وبداية من الدفعة الحادية عشر وبنفس المعدل كانت الدفعات السنوية 30000 دينار. أحسب الجملة الجديدة عند آخر دفعة

ب) بعد تكوينه لرأسمال أراد شراء منزل غير أنه وجد أن القيمة المكتسبة غير كافية،

فاضطر للتعاقد مع البائع على تسديد البقية بخمس دفعات متساوية مبلغ الدفعة 51000 دينار بمعدل 6%. ما هو سعر المنزل؟

التمرين الثالث:

يوظف شخص بداية كل سنة مبلغا قدره 500000 دينار بمعدل فائدة سنوي 10%، في نهاية السنة الرابعة من التوظيف قرر شراء محل فأقترح عليه طرق التسديد التالية:

- التسديد الفوري باستخدام الجملة المكتسبة من عملية التوظيف ليبقى بذلك في رصيده مبلغا قدره 52550 دينار.

- التسديد بواسطة أربع دفعات سنوية تدفع الأولى منها بعد سنة من تاريخ الشراء

1)- أحسب الجملة الناتجة عن عملية التوظيف

2)- أحسب ثمن المحل بتاريخ الشراء

3)- أحسب قيمة الدفعة الثابتة حسب خيار التسديد الثاني.

التمرين الرابع:

يوظف شخص بداية كل سنة مبلغا قدره 60000 دينار بمعدل فائدة سنوي 10%، في نهاية السنة الثانية تغير معدل الفائدة ليصبح 20% سنوي، وفي بداية السنة الرابعة قرر تغيير قيمة الدفعة لتصبح 40000 دينار. أحسب الجملة المكتسبة في نهاية السنة السادسة من التوظيف.