الدرس الرابع: العمليات المالية طويلة الأجل / الفائدة المركبة

1- تعريف:

تعرف الفائدة المركبة على أنها مقابل التنازل عن حق الانتفاع والاستخدام لرصيد نقدي معين بمعدل معلوم وفترة زمنية متفق عليها، عادة ما تفوق السنتين، وتحسب دوريا على أساس الرصيد بداية كل دورة من دورات عقد التوظيف.

2- الصيغة العامة لحساب الفائدة المركبة:

إذا اعتبرنا أن شخصا قام بتوظيف مبلغ قدره a بمعدل فائدة مركبة سنوي قدره t لمدة n من السنوات، سيكون تطور رصيد المتعامل خلال مدة التوظيف كما يظهره الجدول أدناه:

الفترة i	الأصل الموظف للفترة i	فائدة الفترة i	الفائدة الناتجة عن التوظيف	الجملة المكتسبة نهاية الفترة i
01	A	$I_1 = a.t$	$I = a.t.1$	$A = a + I$ $A = a + a.t = a.(1+t)$
02	$a.(1+t)$	$I_2 = a.(1+t).t$	$I = a.t + a.(1+t).t =$ $a.t[1+(1+t)]$	$A = a.(1+t) + a.(1+t).t$ $= a.(1+t)^2$
...	....	....	....	....
n	$a.(1+t)^{n-1}$	$I_n = a.(1+t)^{n-1}.t$	$a.t\left[1+(1+t)+(1+t)^2+...+(1+t)^{n-1}\right]$	$A = a(1+t)^n$

من خلال الجدول أعلاه يمكن كتابة:

الصيغة العامة لحساب الفائدة المركبة نهاية عقد التوظيف

$$I = a \times t \times \left[1+(1+t)+(1+t)^2+...+(1+t)^{n-1}\right]$$

الصيغة العامة لحساب الجملة المكتسبة بفائدة مركبة نهاية عقد التوظيف

$$A = a(1+t)^n$$

ومن خلال الصيغة الأخيرة يمكن استنتاج الفائدة المركبة نهاية مدة التوظيف بطريقة أبسط كما يلي:

$$I = a\left[(1+t)^n - 1\right]$$

والملاحظ أن الصيغ الحسابية السابقة سواء تعلقت بالفائدة المركبة أو الجملة المكتسبة، لا يمكن تطبيقها مباشرة إلا إذا تحقق التجانس بين الوحدة الزمنية المرتبطة بمدة التوظيف مع الوحدة الزمنية المرتبطة بمعدل التوظيف.

مثـــال:

قام شخص بتوظيف مبلغ قدره 150000 دينار لمدة 03 سنوات

المطلوب: - أحسب الفائدة الناتجة عن التوظيف بمعدل فائدة مركبة سنوي 10%.

- أحسب فائدة السنة الثالثة.

-أحسب الجملة المكتسبة بمعدل فائدة مركبة سنوي 12%.

الحـــل: $I = 49650 \quad I_3 = 18150 \quad A = 210739.20$

3- حساب مختلف حدود الجملة المكتسبة:

3 – 1 حساب الأصل الموظف

من خلال الصيغة العامة لحساب الجملة المكتسبة، يمكن إيجاد قيمة الأصل الموظف كما يلي:

$$A = a \times (1+t)^n \Rightarrow a = \frac{A}{(1+t)^n}$$

3 -2 حساب مدة التوظيف

من خلال الصيغة العامة لحساب الجملة المكتسبة، يمكن إيجاد مدة التوظيف كما يلي:

$$A = a \times (1+t)^n \Rightarrow \frac{A}{a} = (1+t)^n$$

وبإدخال اللوغاريتم النيبري على طرفي المساواة نجد:

$$Ln\left(\frac{A}{a}\right) = Ln\left((1+t)^n\right) \Leftrightarrow n \times Ln(1+t) = Ln\left(\frac{A}{a}\right)$$

ومنه نجد:

$$n = \frac{Ln\left(\frac{A}{a}\right)}{Ln(1+t)}$$

3 – 3 حساب معدل التوظيف

من خلال الصيغة العامة لحساب الجملة المكتسبة، يمكن إيجاد معدل التوظيف المطبق كما يلي:

$$A = a \times (1+t)^n \Rightarrow \frac{A}{a} = (1+t)^{n} \Rightarrow (1+t) = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

ومنه نجد:

$$t = \sqrt[n]{\left(\frac{A}{a}\right)} - 1$$

مثـــــال:

وظفت مؤسسة في بنك مبلغ 430000 دينار لمدة ثلاث سنوات بمعدل فائدة سداسي 5 %.

1- أحسب جملة المبلغ نهاية المدة.

2- أحسب الفائدة المتحصل عليها من عملية التوظيف.

3- الجملة المكتسبة تم إقراضها لتسترجع بعد ثلاث سنوات بـ 736026.523 دينار. أحسب معدل الفائدة السنوي المطبق على الجملة.

4- الجملة المكتسبة تم إيداعها للحصول على 843675 دينار بمعدل 10 %. كم كانت مدة الإيداع؟

الـــــــــحل: $n=4 \quad t=8.5\% \quad A=146241.1254 \quad I=576241.1254$

4- حساب الفائدة المركبة في حالة مدة التوظيف عدد غير طبيعي:

هناك وجهتان للنظر اختلفتا في حساب الفائدة المركبة في حالة ما إذا كانت مدة التوظيف عدد غير طبيعي، حيث نجد:

4 – 1 وجهة النظر التجارية: حسب وجهة النظر التجارية، تحسب الفائدة المركبة إذا كانت مدة التوظيف عدد طبيعي انطلاقا من الصيغة العامة لحساب الفائدة المركبة إذا كانت مدة التوظيف عدد طبيعي مع مراعاة تجانس الوحدة الزمنية المرتبطة بمعدل التوظيف مع الوحدة الزمنية المرتبطة بمدة التوظيف. أي أن : $I_C = a\left[(1+t)^{n'} - 1\right]$

$$A_C = a(1+t)^{n'}$$

مع العلم أن n' تتضمن مدتين: n_1 تمثل الجزء الصحيح من مدة التوظيف معبر عنه بالوحدة الزمنية المرتبطة بمعدل التوظيف، n_2 تمثل الجزء العشري من مدة التوظيف معبر عنه بالوحدة الزمنية المرتبطة بمعدل التوظيف.

مثـــــال:

وظف مبلغ 125000 دج بمعدل فائدة مركبة 5% سداسي لمدة 01 سنة و09 أشهر.

المطلوب: أحسب الفائدة الناتجة عن التوظيف، والجملة المكتسبة حسب وجهة النظر التجارية.

الحـــل: $I_C = 23276.58$ $A = 148276.58$

4 – 2 وجهة النظر العقلانية (الحقيقية): حسب وجهة النظر العقلانية، ينظر إلى عملية التوظيف في حالة ما إذا كانت مدة التوظيف عدد غير طبيعي، على أنها عملية مركبة من عمليتين جزئيتين متتابعتين.

- العملية الجزئية الأولى: وهي عملية مالية طويلة الأجل تتعلق بالجزء الصحيح من مدة التوظيف، أين يسري فيها تطبيق قانون الفائدة المركبة.
- العملية الجزئية الثانية: وهي عملية مالية قصيرة الأجل، تأتي بعد العملية الجزئية الأولى، و تتعلق بالجزء العشري من مدة التوظيف، يطبق فيها قانون الفائدة البسيطة.

وعلى هذا الأساس، يكون قانون حساب الفائدة المركبة حسب وجهة الحقيقية كما يلي:

$$I_R = a\left[(1+t)^{n_1} - 1\right] + a.(1+t)^{n_1} \times t \times n_2$$

أما حساب الجملة المكتسبة حسب نفس وجهة النظر فتكون كما يلي:

$$A_R = a(1+t)^{n_1}\left[1 + t \times n_2\right]$$

مثـــــــــال:

أحسب الفائدة والجملة المكتسبة حسب وجهة النظر الحقيقية لمبلغ قيمته 360000 دج موظف بمعدل 09 % لمدة سنتين و 09 أشهر.

الحـــل: $A_R = 456586,83$ $I_R = 96586,83$