جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

دروس عبر الخط:

الإطار النظري للنماذج القياسية في التجارة الدولية

مدعمة بأمثلة وتطبيقات

المستوى السنة الأولى ماستر مالية وتجارة دولية

من إعداد: د/ لطفي مخزومي

السنة الجامعية 2022/2021

مدخل نظري للنماذج القياسية

أولا: الاقتصاد القياسي

1. ما هو الاقتصاد القياسي؟

كلمة الاقتصاد القياسي تعني حرفيا القياس في الاقتصاد، هذا معنى واسع يشمل العديد من المفاهيم الاقتصادية والتي تعتمد في الغالب على القياسات حيث اغلب الاقتصاديون يهتمون بعملية القياس حيث يتم قياس الناتج المحلي، البطالة، عرض النقود، الصادرات، الواردات، الخ.

هو تطبيق الطرق الرياضية والإحصائية لتحليل البيانات الاقتصادية بهدف إعطاء محتوى رقمي للنظريات الاقتصادية للتأكد من صحة تلك النظريات.

2. النماذج الاقتصادية والقياسية:

المهمة الأولى للاقتصاد القياسي هي تكوين النموذج القياسي. ما هو النموذج القياسي؟

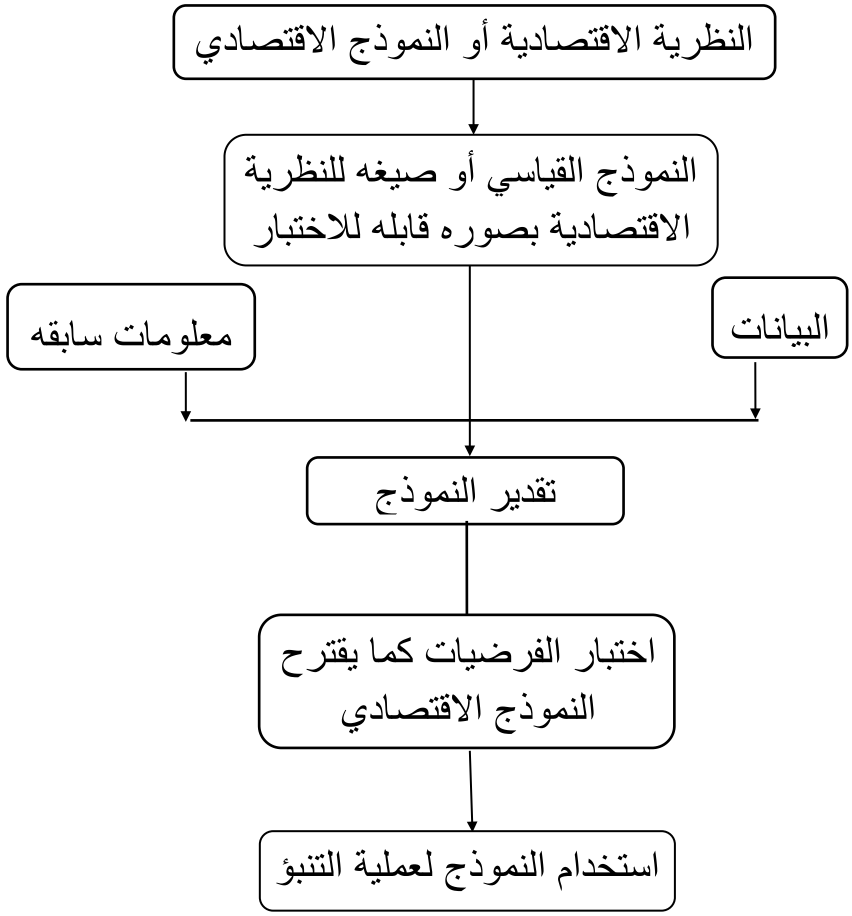
- ✓ النموذج Model هو تمثيل مبسط للواقع الحقيقي. على سبيل المثال نقول إن الكمية المطلوبة من البرتقال تعتمد على سعر البرتقال هذه تعتبر تبسيط للواقع لان هناك العديد من العوامل المؤثرة على قرار شراء البرتقال على سبيل المثال الدخل، نوعية الغذاء، الذوق، ...سعر التفاح... الخ من الأسباب التي قد تؤثر على قرار شراء كميه من البرتقال.
- ✓ العديد من العلماء نادوا بعملية التبسيط لأن النماذج المبسطة تمثل وسيله ابسط لفهم الواقع ولتوصيل المعلومة وكذلك أسهل في عملية اختبار النظرية والتأكد من صحتها. مثل كارل بوبر Karl Popper وميلتون فريمان Milton Friedman .
- ✓ بالعودة إلى مثالنا السابق، الطلب على البرتقال، إذا قلنا انه فقط يعتمد على سعر البرتقال هذا افتراض وصفي غير واقعي. ولكن، إذا أضفنا المتغيرات الأخرى. مثل الدخل وسعر التفاح فان هذا لا يضيف واقعية إلى النموذج. حتى هذا النموذج ممكن القول انه لا يتسم بالواقعية وذلك لأن هناك متغيرات أخرى لم يتضمنها النموذج. ولكن مسألة أي من النماذج يكون أكثر فائدة في التنبؤ بالطلب على البرتقال هذا يعتمد على البيانات المتوفرة والبيانات التي يمكن الحصول عليها.
- ✓ عمليا، يتضمن النموذج جميع المتغيرات التي تعتبر مهمة في تحديد النموذج ونترك المتغيرات في المتغير العشوائي. هذا ما يفرق بين النموذج الاقتصادي والنموذج القياسي.
- ✓ يتكون النموذج القياسي من مجموعه من المعادلات السلوكية المشتقة من نموذج اقتصادي. هذه المعادلات تتضمن بعض المتغيرات ومتغير عشوائي والذي يتضمن جميع المتغيرات والتي تعتبر غير رئيسيه في وصف الغرض المطلوب للنموذج.

مثال: دالة الطلب، النموذج القياسي كما يلي: -

-المعادلة السلوكية $Q = \alpha + \beta P + u$

حيث Q الكمية المطلوبة، وP السعر. حيث تمثل المتغيرات المشاهدة و u متغير عشوائي. و β و α معالم النموذج.

شـــكل 1: الخطوات التي يجب إتباعها في التحليل القياسي لنموذج اقتصادي:

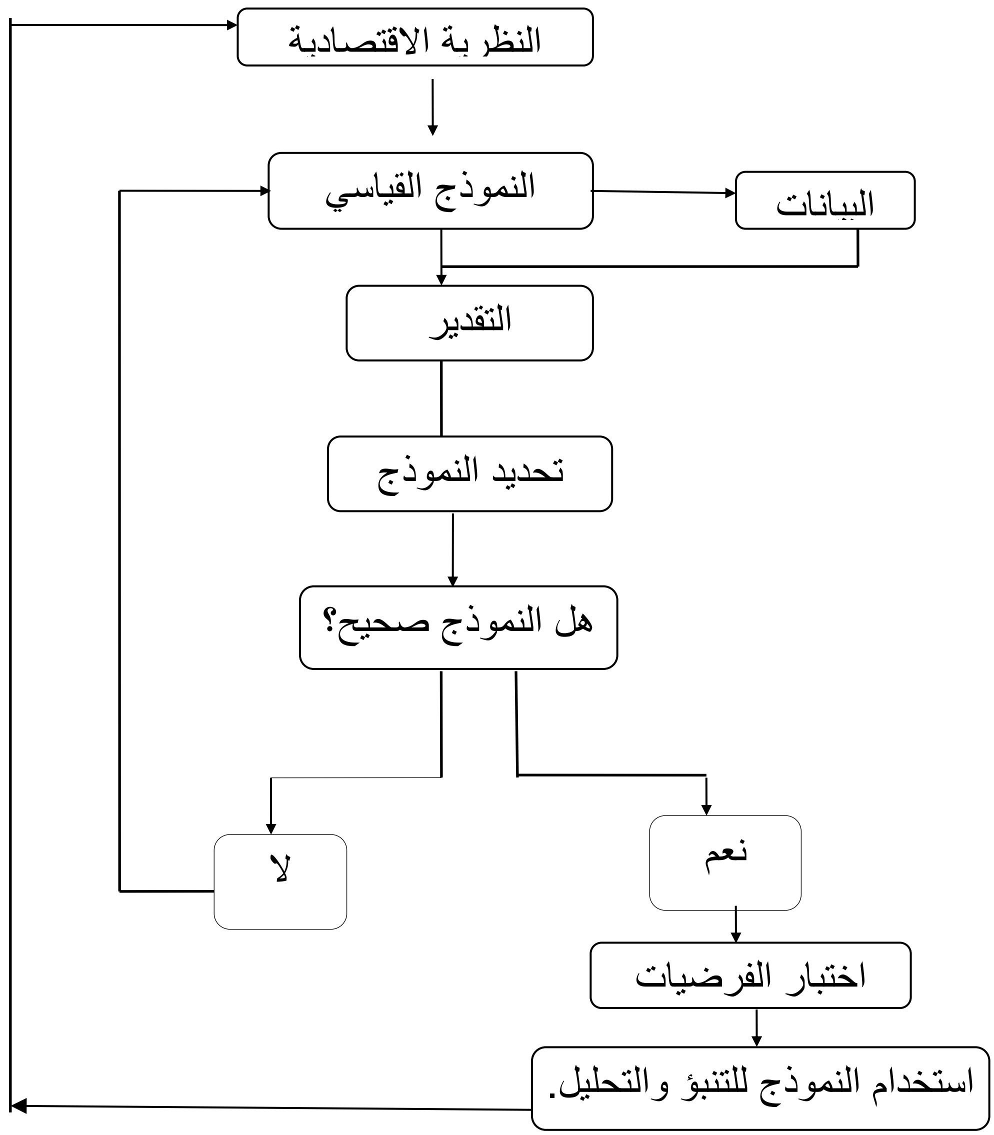


3. الهدف وطريقة الاقتصاد القياسي:

- ✓ اختبار النظرية الاقتصادية.
- ✓ تفسير بعض الظواهر الاقتصادية.
- ✓ رسم او تقييم السياسات الاقتصادية.
- ✓ التنبؤ بسلوك المتغيرات الاقتصادية.

يمكن تلخيص اهم خطوات التحليل القياسي لنموذج اقتصادي في الشكل التالي

شـــكل 2: الخطوات التي يتم إتباعها في التحليل القياسي لنموذج اقتصادي:



4. اختبار النظرية الاقتصادية

✓ الهدف الأساسي للاقتصاد القياسي هو اختبار النظرية الاقتصادية، حيث من المؤشر لنجاح النظرية الاقتصادية توافق إشارة المعلمات المقدرة للنموذج القياسي مع النظرية الاقتصادية. والاختبار الأكثر أهمية ماذاكان يعطى تنبؤ أكثر دقه من النظريات الاقتصادية التي تم اقتراحها مسبقا، أي انه يستلزم من الباحث مقارنة النموذج الحالي مع النماذج السابقة.

✓ الاقتصاد القياسي يقوم بمهمة القياس بغرض اختبار مدى صحة النظرية الاقتصادية، ويوجد في هذا الصدد احتمالين:

❖ أن تتفق النظرية مع الواقع وفي هذه الحالة نقبل النظرية على انها صحيحة في ظل الظروف الراهنة.

❖ أن تتعارض النظرية مع الواقع وفي هذه الحالة إما ان نرفض الفرضية في صورتها القديمة أو نعدلها ثم نعيد اختبارها من جديد.

5. تفسير بعض الظواهر الاقتصادية

- ✓ يرى أصحاب مدخل الاستنباط او مدخل القياس بنظرية، ان القياس لا يمكن ان يتم الا بناءاً على نظرية، حيث ان الأخيرة هي التي يمكن ان تقدم العلاقات التي يمكن قياسها.
- ✓ بينما يرى أصحاب مدخل الاستقراء او مدخل القياس بدون نظرية، ان وجود نظرية ليس شرطا ضروريا حتى تتم عملية القياس.

ثانيا: منهج البحث في الاقتصاد القياسي

يمر أي بحث قياسي بأربعة مراحل يمكن ايجازها فيما يلي:

1. مرحلة تعيين النموذج:

يقصد بتعيين النموذج صياغة العلاقات الاقتصادية محل البحث في صورة رياضية حتى يمكن قياس معاملاتها باستخدام ما يسمى بالطرق القياسية. وتنطوي هذه المرحلة على عدد من الخطوات أهمهما:

1.1. تحديد متغيرات النموذج:

يمكن للباحث ان يحدد المتغيرات التي يتضمنها النموذج عند دراسته لظاهرة اقتصادية معينة من خلال مصادر عديدة. ولعل اول هذه المصادر النظرية الاقتصادية، وثانيها المعلومات المتاحة من دراسات قياسية سابقة في المجال الذي يبحث فيه بوجه عام، وثالثها المعلومات المتاحة عن الظاهرة بوجه خاص. ولكن وبالرغم من ذلك فانه لا يمكن بوجه عام ادراج جميع المتغيرات التفسيرية التي تؤثر في الظاهرة محل البحث في النموذج الذي يتعين تقدير معلماته، وذلك لصعوبات كثيرة أهمها على الأقل صعوبات القياس. ولذلك عادة ما يتم الاقتصار فقط على عدد منها وهي المتغيرات الأكثر أهمية.

2.1. تحديد الشكل الرياضي للنموذج:

يقصد بالشكل الرياضي للنموذج عدد المعادلات التي تحتوي عليها (فقد تكون معادلة واحدة او عدد من المعادلات)، ودرجة خطية النموذج (فقد يكون نموذج خطي او غير خطي). والنظرية الاقتصادية كثيرا ما لا توضح الشكل الرياضي الدقيق للنموذج، وهو ما يدفع الباحثين الى القيام بتجريب الصيغ الرياضية المختلفة عند القياس في حالة وجود علاقات متعددة، ثم يختارون الصيغة التي تعطي نتائج أكثر معقولية من الناحيتين الاقتصادية والاحصائية. ويسترشد الباحثون بعدد من العوامل عند تحديدهم لعدد المعادلات التي يحتوي عليها النموذج من أهمها: درجة تعقيد الظاهرة، الهدف من تقدير النموذج، ومدى توافر البيانات.

3.1. تحديد التوقعات القبلية:

يتعين تحديد توقعات نظرية مسبقة عن إشارة وحجم معلمات العلاقة الاقتصادية محل القياس بناءاً على ما تقدمه المصادر السابقة من معلومات. وتعتبر التوقعات هامة لمرحلة ما بعد التقدير، حيث يتم اختبار المدلول الاقتصادي للمعلمات المقدرة من خلال مقارنتها مع التوقعات القبلية من حيث اشارتها وحجمها.

2. مرحلة تقدير معلمات النموذج:

ينتقل الباحث الى مرحلة قياس او تقدير المعلمات عند الانتهاء من صياغة العلاقات محل البحث في شكل رياضي خلال مرحلة التعيين. ويعتمد الباحث أساسا في تقديره للمعلمات على بيانات واقعية يتم جمعها عن المتغيرات التي يتضمنها النموذج. وتنطوي هذه المرحلة على ثلاث خطوات على الأقل:

1.2. تجميع البيانات:

يتعين على الباحث ان يقوم بجمع بيانات عن المتغيرات التي يحتوي عليها النموذج من مصادر عديدة. ويتم التركيز على أنواع البيانات، حيث يوجد عدة أنواع من البيانات: بيانات سلسلة زمنية، بيانات قطاعية، بيانات سلسلة قطاعية، وبيانات تجريبية.

2.2. حل مشاكل التجميع:

تنشا مشكلة التجميع عندما يحتاج الباحث لاستخدام متغيرات تجميعية في الدالة محل الدراسة. وعملية التجميع قد تتم على أكثر من مستوى، فهناك التجميع على مستوى الافراد، مثال ذلك الدخل القومي الذي هو مجموع دخول الافراد، او الناتج القومي الذي هو مجموع نواتج المنشآت. وهناك أيضا التجميع على مستوى السلع. كما ان التجميع قد يتم على مستوى الفترات الزمنية.

3.2. اختيار طريقة القياس الملائمة:

يوجد هناك طرق قياسية عديدة يمكن استخدامها في قياس العلاقات الاقتصادية أهمها:

- طرق المعادلة الواحدة وهي تطبق على كل معادلة من معادلات النموذج على حدة، ومن أهمها طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية.
- طرق المعادلات الآنية ومن امثلتها طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وغيرها.

3. مرحلة تقييم المعلمات المقدرة بالنموذج:

بعد ان ينتهي الباحث من تقدير القيم الرقمية لمعلمات النموذج من خلال بيانات واقعية، فغنه يشرع في تقييم المعلمات المقدرة. والمقصود بتقييم المعلمات المقدرة هو تحديد ما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول او معنى من الناحية الاقتصادية، وما إذا كان لها دلالة من الناحية الإحصائية.

4. مرحلة تقييم مقدرة النموذج على التنبؤ:

يمكن للنموذج ان يجتاز كل المراحل السابقة لكنه لا يكون صالحا للتنبؤ، ولاختبار مقدرة النموذج على التنبؤ لا بد من اختبار مدى استقرار المعلمات المقدرة عبر الزمن، واختبار مدى حساسية هذه التقديرات للتغير في حجم العينة.

الانحدار الخطي البسيط

1. مقدمة:

إن دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية يتطلب تحديد المتغيرات المؤثرة في تلك العلاقة، ومن ابسط أسهل أنواع العلاقات في التقدير والتحليل الاحصائي والاقتصادي، العلاقة بين متغيرين أحدهما المتغير التابع (Dependent variable) والثاني المتغير المستقل (Independent variable)، وإذا رمزنا للمتغيرين بـY وX على التوالي، فان العلاقة الدالية التي تجمعهما تكون كالتالي:

$$Y = F(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(01)$$

حيث يشير الرمز F الى كون المتغير التابع Yيعتمد على المتغير المستقل X. ولتحديد شكل العلاقة هذه –ما إذا كانت خطية او غير خطية– يمكن الاستعانة بالنظرية الاقتصادية، ومن ابسط الاشكال وأكثرها شيوعا الصيغة الخطية، وتسمى العلاقة الخطية بين متغيرين بالانحدار الخطي البسيط. فمثلا العلاقة الخطية بين دخل الاسرة X والانفاق على سلعة معينة Y يمكن ان تكتب بالصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(02)$$

حيث:

β_0 و β_1 عبارة عن مَعْلَمات مجهولة القيم وثوابت يُشرحان من وجهة النظر الرياضية كالتالي:

β_0 : تمثل تقاطع خط الانحدار مع المحور العمودي، وهي عبارة عن القيمة التي تتخذها Y عندما تكون قيمة X مساوية للصفر؛

β_1 : تمثل الميل.

ومن وجهة النظر الاقتصادية تمثل β_0 حالة الكفاف وβ_1 الميل الحدي للاستهلاك، وقيمة الميل عبارة عن مقدار الزيادة المتحققة في قيمة المتغير التابع نتيجة زيادة المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

غير أن العلاقة أعلاه (02) لا يمكن ان تشرح العلاقة بين المتغيرين بشكل دقيق، فقد يكون هناك انحراف بين العلاقة الحقيقية والمعادلة الإحصائية التي تمثلها نتيجة أخطاء في القياس او في اختيار المتغير المستقل، مما يتطلب إضافة متغير جديد يسمى بالحد العشوائي (Random variable) ويرمز له عادة بالرمز U ودوره امتصاص العوامل غير القابلة للقياس وكذلك أخطاء القياس، وعليه فان العلاقة من الصيغة (02) يجب ان تُعدّل لكي تضم حد الخطأ العشوائي حيث تصبح:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(03)$$

2. الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي:

- المتغير العشوائي هو متغير تعتمد قيمته في اية فترة زمنية على عامل الصدفة، فقد تكون أكبر او أصغر او مساوية الى الصفر، الا انها في المتوسط تساوي صفر، أي أن $E(U_i) = 0$، ويمكن توضيح ذلك على النحو التالي:

من المعادلة رقم (03) نتحصل على: $U_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (04)$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة (04):

$$\sum U_i = \sum Y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (05)$$

وحيث أن:($\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1\bar{X}$) نعوض عنها بما يساويها في المعادلة (05):

$$\sum U_i = \sum Y_i - n(\bar{Y} - \beta_1\bar{X}) - \beta_1 \sum X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (06)$$

وحيث أن: $\sum Y_i = n\bar{Y}$ ، $\sum X_i = n\bar{X}$ وبالتعويض عن ذلك في المعالة (06) تكون:

$$\sum U_i = \sum Y_i - \sum Y_i + \beta_1 \sum X_i - \beta_1 \sum X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (07)$$

$$\sum U_i = 0 \ , \ E(U_i) = 0$$

- المتغير العشوائي U_i يتوزع توزيعاً طبيعياً حول القيمة المتوقعة أو حول الوسط الحسابي المساوي للصفر عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل X أي بشكل جرسي.

- تباين (variance) المتغير العشوائي حول الوسط الحسابي مقدار ثابت عند كل قيمة من قيم X أي:

$$var(U_i) = E[U_i - E(U_i)]^2$$

وبمأن: $E(U_i) = 0$ فعليه يكون:

$$var(U_i) = E(U_i)^2 = \sigma^2$$

وإذا كان تباين الخطأ غير ثابت عندئذ تظهر مشكلة تسمى مشكلة عدم تجانس التباين (Heteroscedasticity)؛

الفرضيات الثلاثة السابقة يمكن جمعها بشكل مختصر وتمثيلها كالآتي: $U_i \sim N(0, \sigma_\mu^2)$

- قيم U_i غير مرتبطة بأي من المتغيرات المستقلة، أي انعدام التباين المشترك (covariance) بين U_i وX_i أي:

$$Cov(U_i, X_i) = E(U_i, X_i) = X_i E(U_i) = 0 \quad / \quad E(U_i) = 0$$

- القيم المختلفة للمتغير U_i تكون مستقلة عن بعضها البعض، بعبارة أخرى التباين المشترك لـ U_i مع U_j مساوية للصفر أي:

$$(i,j = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots n, \quad i \neq j) \ \ Cov(U_i, U_j) = E(U_i, U_j) = 0$$

وإذا حدث وجود ارتباط بينهما تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الذاتي (Autocorrelation).

- انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة، وفي حالة وجود علاقة قوية بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الخطي المتعدد (Multicollinearity).

3. طريقة المربعات الصغرى العادية OLS (The Ordinary Least Squares):

يتم عادة استخدام عينة من مجتمع الدراسة لتقدير معالم دالة انحدار المجتمع المجهولة، ويمكن كتابة دالة انحدار العينة المقابلة لدالة انحدار المجتمع كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

حيث إن $\hat{Y}_i$ مقدر لـ $E(Y_i)$، و$\hat{\beta}_1$و$\hat{\beta}_0$ مقدرتان لـ β_1وβ_0 على التوالي. والآن يمكن التعبير عن دالة انحدار العينة في شكلها العشوائي:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (09)$$

ويرمز لـ e_i بالباقي، أي الفرق بين القيم المشاهدة أو الفعلية للمتغير التابع والقيمة المقدرة له المبنية على تقديرات معالم نموذج انحدار العينة، ورياضياً يعرف الباقي e_i كما يلي:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

وتجدر الإشارة هنا الى ان هناك اختلافا أساسيا بين الباقي وحد الخطأ.

وتعتمد طريقة المربعات الصغرى على تقليل مجموع مربع البواقي الى أقل ما يمكن، أي تدنية القيمة التالية:

$$\sum e_i^2 = \sum\left(\mathrm{Y_i} - \hat{\mathrm{Y}}_\mathrm{i}\right)^2 = \sum\left(\mathrm{Y_i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\mathrm{X_i}\right)^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

ويتضح من المعادلة (11) أن مجموع مربعات البواقي دالة لمعاملي الانحدار $\hat{\beta}_1$و$\hat{\beta}_0$ أي: $\sum e_i^2 = \mathrm{F}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$

ولإيجاد قيم $\hat{\beta}_1$و$\hat{\beta}_0$ التي تجعل قيمة مجموع مربعات البواقي الى اقل حد ممكن، نستخدم التفاضل الجزئي بالنسبة لـ $\hat{\beta}_0$ مرة، وبالنسبة لـ $\hat{\beta}_1$ مرة أخرى ومساواة ناتج التفاضل في كل مرة بالصفر كما يلي:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = -2\sum\left(\mathrm{Y_i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\mathrm{X_i}\right) = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

و $$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum \mathrm{X_i}\left(\mathrm{Y_i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\mathrm{X_i}\right) = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

ومن المعادلة (12) نحصل على: $\sum\left(\mathrm{Y_i} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\mathrm{X_i}\right) = 0$ أي: $\sum \mathrm{Y_i} = \mathrm{n}\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\sum \mathrm{X_i} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$

وبإعادة تنظيم المعادلة (13) نحصل على: $\sum \mathrm{X_iY_i} = \hat{\beta}_0\sum \mathrm{X_i} + \hat{\beta}_1\sum \mathrm{X_i^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(15)$

وبضرب المعادلة (14) في $\sum \mathrm{X_i}$ وضرب المعادلة (15) في n نحصل على التالي:

$$\sum Y_i\sum \mathrm{X_i} = n\hat{\beta}_0\sum \mathrm{X_i} + \hat{\beta}_1\left(\sum X_i\right)^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

$$\mathrm{n}\sum \mathrm{X_iY_i} = \mathrm{n}\hat{\beta}_0\sum \mathrm{X_i} + \mathrm{n}\hat{\beta}_1\sum \mathrm{X_i^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

وبطرح المعادلة (16) من المعادلة (17) نحصل على:

$$\mathrm{n}\sum \mathrm{X_iY_i} - \sum Y_i\sum \mathrm{X_i} = \mathrm{n}\hat{\beta}_1\sum \mathrm{X_i^2} - \hat{\beta}_1\left(\sum X_i\right)^2$$

$$= \hat{\beta}_1\left[\mathrm{n}\sum \mathrm{X_i^2} - \left(\sum X_i\right)^2\right]$$

ومنه:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}_\mathbf{1} = \frac{\mathbf{n}\sum \mathbf{X_iY_i} - \sum \mathbf{Y_i}\sum \mathbf{X_i}}{\mathbf{n}\sum \mathbf{X_i^2} - \left(\sum \mathbf{X_i}\right)^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (14) على n نحصل على: $\overline{\mathrm{Y}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\overline{\mathrm{X}}$

ومنه:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}_\mathbf{0} = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{X}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

- **مثال تطبيقي:**

لنفرض البيانات التي تم تجميعها من عينة من مجتمع عن الكميات المطلوبة Y_i من السلعة عند كل سعر $\mathrm{X_i}$ (جدول الطلب) كما يلي:

Y_i (الكمية)	18	14	9	7	4	3	1
$\mathrm{X_i}$ (السعر)	1	2	3	4	5	6	7

- اوجد معادلة انحدار Y_i على $\mathrm{X_i}$.
- أحسب البواقي.

من إعداد: د. لطفي مخزومي

اختبار الفرضيات للانحدار الخطي البسيط

1. اختبار معنوية معاملات الانحدار (اختبار t):

تعرف الفرضية بانه ادعاء قابل لأن يكون صحيحاً أو غير صحيح، وتثبت صحتها فقط من خلال الاختبار (Test)، ويختبر نموذج الانحدار قبل كل شيء العلاقة بين المتغير المستقل (X) والتابع (Y) وذلك للتثبت من وجودها من خلال اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة$\hat{\beta}_1$و$\hat{\beta}_0$ كلا على انفراد، وفي هذا المجال توجد فرضيتان:

فرضية العدم: وتنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرين X وY أي ان: $H_0: \hat{\beta}_0 = 0 \quad , \quad \hat{\beta}_1 = 0$

الفرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة بين المتغيرين X وY أي ان: $H_1: \hat{\beta}_0 \neq 0 \quad , \quad \hat{\beta}_1 \neq 0$

ويستخدم اختبار (t) عند مستوى معنوية معينة ودرجة حرية (n-k-1)، حيث n عدد المشاهدات في العينة وk عدد المتغيرات المستقلة، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

- بالنسبة لـ $\hat{\beta}_1$:

$$t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}} \quad , \quad S_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{S^2_{\hat{\beta}_1}}$$

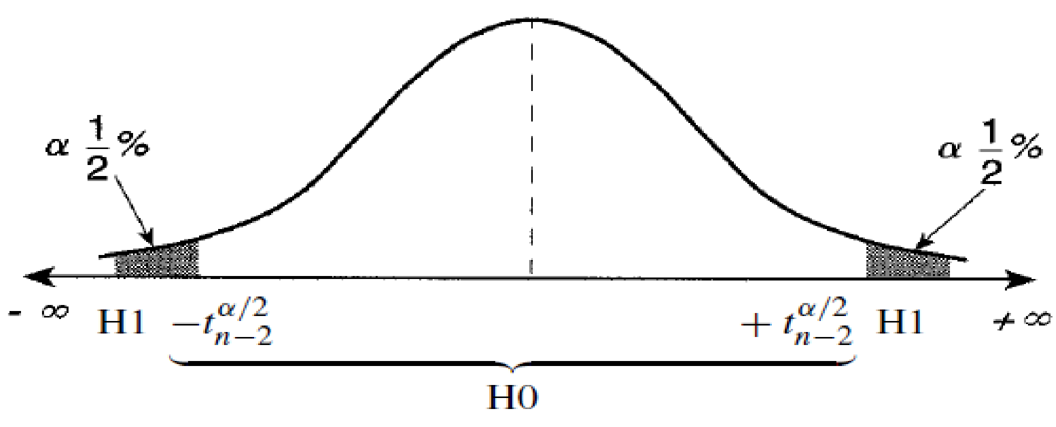
$$S^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{S^2_{e_i}}{\sum x_i^2} \quad , \quad S^2_{e_i} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \quad , \quad x_i = X_i - \bar{X}$$

- بالنسبة لـ $\hat{\beta}_0$:

$$t_{\hat{\beta}_0} = \frac{\hat{\beta}_0}{S_{\hat{\beta}_0}} \quad , \quad S_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{S^2_{\hat{\beta}_0}}$$

$$S^2_{\hat{\beta}_0} = S^2_{e_i}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2}\right] \quad , \quad S^2_{e_i} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \quad , \quad x_i = X_i - \bar{X}$$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية عند درجة حرية (n-2) ومستوى المعنوية المطلوب (5%,1%)، فاذا كانت قيمة (t) المحتسبة أكبر من (t) الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، بمعنى ان المعلمة ذات معنوية إحصائية. وبالعكس في حالة كون (t) المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية البديلة أي عدم معنوية المعلمة المقدرة.



2. معامل التحديد (R^2):

هو مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع (Y) الذي سببها التغيير في المتغير المستقل (X). أي نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية.

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

حيث:
$$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

TSS (Total Sequare Sum) = **RSS** (Regression Sequare Sum) + **ESS** (Error Sequare Sum)

وتتراوح قيمة R^2 بين الصفر والواحد: $0 \le R^2 \le 1$

3. اختبار إحصائية F:

لاختبار معنوية معادلة الانحدار ككل يستخدم اختبار F وهو يعتمد على نوعين من الفرضيات:

فرضية العدم: وتنص على عدم معنوية العلاقة بين المتغيرين X و Y أي ان: $H_0\text{: } \hat{\beta}_1 = 0$

الفرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة جوهرية بين المتغيرين X و Y أي ان: $H_1\text{: } \hat{\beta}_1 \neq 0$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n-k-1} = \frac{R^2 / k}{1-R^2 / n-k-1}$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمة F الجدولية عند مستوى المعنوية المطلوب (5%,1%) ودرجة حرية (n-k-1,k) البسط والمقام لتحديد قبول او رفض فرضية العدم. فاذا كانت قيمة F المحتسبة أكبر من قيمة F الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية العلاقة المقدرة، وبالعكس في حالة كون F المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم أي عدم معنوية العلاقة المقدرة.

4. حدود الثقة لمعاملات الانحدار:

نعني بحدود او فترات الثقة لمعاملات الانحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة، أي معلمة المجتمع. ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيمة β_i بين الحد الأدنى والحد الأعلى. والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

$$\beta_i = \hat{\beta}_i \mp (t_{\alpha/2})(S_{\hat{\beta}_i})$$

من إعداد: د. لطفي مخزومي

سلسلة تمارين رقم (01) نماذج قياسية في التجارة الدولية

التمرين 01:

الجدول التالي يبين استيرادات دولة ما Yi والناتج المحلي الإجمالي Xi بملايير الدولارات:

السنة	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Y_i	1.2	1.3	1.5	1.7	2.2	2.3	2.9	1.9
X_i	5.2	5.9	7.0	11.2	15.6	11.2	12.6	12.5

1. قدر معلمات النموذج واكتب معادلة الانحدار الخطي.
2. أوجد معامل الارتباط ومعامل التحديد، وفسر معانيها.
3. اختبر عند مستوى معنوية 5% المعنوية الإحصائية لكل من β_0 و β_1 .

التمرين 02:

لنموذج الانحدار الخطي البسيط:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$
$$U_i \sim N(0, \sigma_\mu^2), \qquad E(U_i, U_j) = 0 \qquad \forall \ i \neq j$$

علما بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير (Y_i) و (X_i) كانت كالتالي:

$$\sum X_i Y_i = 74 \ , \sum X_i^2 = 34 \ , \ \sum X_i = 12 \ , \sum Y_i^2 = 190 \ , \sum Y_i = 30$$

قدر معلمات النموذج.

التمرين 03:

باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{C}_i = \underset{(3.1)}{15} + \underset{(18.7)}{0.81} Y_i \qquad ، \qquad n=19$$

حيث الأرقام بين القوسين تشير الى قيمة (t) العملية (المحتسبة).

1. أحسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.
2. ضح حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل (Y_i) مستخدما $t_{(n-2, \alpha/2)} = 2.11$.

من إعداد: د. لطفي مخزومي

الانحدار الخطي المتعدد

1. صياغة وتوصيف النموذج الخطي المتعدد:

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة العديدة التي نفترض أن عددها (k) والمتغير العشوائي (μ_i)، تأخذ الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} \dots\dots\dots + \beta_k X_{ki} + \mu_i \quad i=1,2,\dots\dots\dots n \quad / \quad \dots\dots\dots\dots(01)$$

ويمكن كتابة النموذج العام السابق في شكل n من المعادلات كما يلي:

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} \dots\dots\dots + \beta_k X_{k1} + \mu_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_2 X_{22} \dots\dots\dots + \beta_k X_{k2} + \mu_2$$
$$\vdots$$
$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} \dots\dots\dots + \beta_k X_{kn} + \mu_n$$

ويمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots(02)$$

أو باختصار: $Y = XB + U$ ، حيث:

Y: متجه (شعاع) عمودي من الرتبة (n×1) ويحتوي على n مشاهدة للمتغير التابع Y.

X: مصفوفة مشاهدات المتغيرات المستقلة من الرتبة (n×k+1) وعمودها الأول يحتوي على قيم الواحد الصحيح.

B: متجه عمودي من الرتبة 1×(k+1) ويحتوي على المعالم المجهولة β_i.

U: متجه عمودي من الرتبة (n×1) ويحتوي قيم المتغير العشوائي μ_i المجهولة.

2. فرضيات النموذج الخطي المتعدد:

- القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفر، أي إن : $E(\mu_i) = E\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\mu_1) \\ E(\mu_2) \\ \vdots \\ E(\mu_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

- تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفر، أي ان: $Cov(U) = E(U\acute{U}) = \sigma^2 I_n$

$$E(U\acute{U}) = E\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1\mu_2 & \cdots & \mu_1\mu_n \\ \mu_2\mu_1 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2\mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_2\mu_n & \mu_n\mu_2 & \cdots & \mu_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(\mu_1^2) & E(\mu_1\mu_2) & \cdots & E(\mu_1\mu_n) \\ E(\mu_2\mu_1) & E(\mu_2^2) & \cdots & E(\mu_2\mu_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(\mu_2\mu_n) & E(\mu_n\mu_2) & \cdots & E(\mu_n^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

حيث: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots \ldots . = \sigma_n^2$

- ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة، كما ان عدد المشاهدات يجب ان يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها، أي أن: $(k+1) < n$، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان إيجاد معكوس المصفوفة $(\acute{X}X)$ اللازمة بدورها للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية.

3. تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد:

للحصول على تقديرات المربعات الصغرى العادية لمتجه معالم النموذج، وبالاعتماد على البيانات المشاهدة من العينة الممثلة للمجتمع الأصلي، فإننا نعتمد على الصورة التالية للنموذج:

$$Y = \hat{Y} + e = X\hat{B} + e$$

ومنه: $$e = Y - X\hat{B}$$

وللحصول على أفضل خط انحدار يجب ان يكون مجموع مربعات البواقي $\sum e_i^2$ اقل ما يمكن، وبما ان مجموع مربعات البواقي يمكن كتابته على أساس المضروب الداخلي للمتجه e، اذن: $\sum e_i^2 = \acute{e}e$

$$\acute{e}e = (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B}) = (Y' - \hat{B}'X')(Y - X\hat{B}) = Y'Y - \hat{B}'X'Y - Y'X\hat{B} + \hat{B}'X'X\hat{B}$$

وبمان $\hat{B}'X'Y$ رقم حقيقي، وبالتالي يساوي منقوله (مبدوله) أي $Y'X\hat{B}$، فإنه يمكن الحصول على:

$$\acute{e}e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$$

وباستخدام التفاضل ومساواته بالصفر، نحصل على:

$$\frac{\partial \acute{e}e}{\partial \hat{B}} = -2X'Y + 2X'X\hat{B} = 0$$

ومنه: $$X'X\hat{B} = X'Y$$

وللحصول على قيم $\hat{B}$ فإننا نضرب جانبي المعادلة بالمعكوس (المقلوب) $(X'X)^{-1}$، أي:

$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبمان حاصل ضرب أي مصفوفة بمعكوسها هو مصفوفة الوحدة فإن:

$$\boxed{\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$$

حيث ان $(X'X)$ تعرف بمصفوفة فيشر (Fisher matrix).

من إعداد: د. لطفي مخزومي

اختبار الفرضيات للانحدار الخطي المتعدد

1. اختبار القدرة التفسيرية لنموذج الانحدار الخطي المتعدد (إيجاد معامل التحديدR^2):

يعد مؤشر أساسي في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة ($X_1, X_2, \dots \dots \dots X_k$)، بعبارة أخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع.

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{\hat{B}'x'y}{y'y} = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

غير انه يُعاب على معامل التحديدR^2 بانه يتزايد دوماً بتزايد عدد المتغيرات المستقلة، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل او المصحح $\bar{R}^2$:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

2. اختبار إحصائية F:

لاختبار معنوية معادلة الانحدار ككل يستخدم اختبار F وهو يعتمد على نوعين من الفرضيات:

فرضية العدم: وتنص على عدم معنوية العلاقة بين ($X_1, X_2, \dots X_k$) وY أي ان: $H_0\colon\ \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \cdots = \hat{\beta}_k = 0$

الفرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة جوهرية بين ($X_1, X_2, \dots X_k$) وY أي ان: $H_1\colon \hat{\beta}_1 \neq \hat{\beta}_2 \neq \cdots \neq \hat{\beta}_k \neq 0$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار:

$$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1} = \frac{R^2/k}{1-R^2/n-k-1}$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمة F الجدولية عند مستوى المعنوية المطلوب (5%,1%) ودرجة حرية (n-k-1,k) البسط والمقام لتحديد قبول او رفض فرضية العدم. فاذا كانت قيمة F المحتسبة أكبر من قيمة F الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية العلاقة المقدرة، وبالعكس في حالة كون F المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم أي عدم معنوية العلاقة المقدرة.

3. اختبار معنوية معاملات الانحدار (اختبار t):

يستخدم اختبار (t) لتقييم تأثير المتغيرات المستقلة ($X_1, X_2, \dots \dots \dots X_k$) في المتغير التابع، وفي هذا المجال توجد فرضيتان:

فرضية العدم: وتنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرين X_i وY أي ان: $H_0\colon\hat{\beta}_i = 0$

الفرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة بين المتغيرين X_i وY أي ان: $H_1\colon\hat{\beta}_i \neq 0$

ويستخدم اختبار (t) عند مستوى معنوية معينة ودرجة حرية (n-k-1)، حيث n عدد المشاهدات في العينة وk عدد المتغيرات المستقلة، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

بالنسبة لـ $\hat{\beta}_i$:

$$t_{\hat{\beta}_i} = \frac{\hat{\beta}_i}{S_{\hat{\beta}_i}} \quad , \quad S_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{S^2_{\hat{\beta}_i}}$$

$$S^2_{\hat{\beta}_i} = \mathrm{var}(\hat{\beta}_i) = S^2_e a_{ii} \quad , \quad \mathrm{var}(\hat{\beta}) = S^2_e (X'X)^{-1} \quad , \quad S^2_e = \frac{e'e}{n-k-1}$$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية عند درجة حرية (n-k-1) ومستوى المعنوية المطلوب (5%,1%)، فاذا كانت قيمة (t) المحتسبة أكبر من (t) الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، بمعنى ان المعلمة ذات معنوية إحصائية. وبالعكس في حالة كون (t) المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية البديلة أي عدم معنوية المعلمة المقدرة.

سلسلة تمارين رقم (02)
نماذج قياسية في التجارة

التمرين الأول:

لديك البيانات التالية:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{pmatrix} \qquad X'Y = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

قدر معلمات العلاقة بين Y والمتغيرين X_1 , X_2 .

التمرين الثاني:

لدينا: $\hat{Y} = -49.329 + 1.364X_1 + 0.114X_2$

وتوفرت المعلومات الاتية: $\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2 = 1260.89 \quad , \quad R^2 = 0.94 \ , \quad n = 9$

اختبر الأثر الإجمالي للعلاقة المقدرة مستخدما $F = (6,2,0.05) = 5.14$

التمرين الثالث:

لدينا: $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.2 & 1.8 \\ & 1 & -1.7 \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X'Y = \begin{pmatrix} 42 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \quad , \quad s_e^2 = 10$

قدر معا لم النموذج.

اوجد تباين المعلمة $\hat{\beta}_2$.

التمرين الرابع:

لدينا: $\hat{Y} = 2.08 + 0.05X_1 + 1.76X_2$

$$\sum x_1y = 215 \ , \sum x_2y = 9 \ , \ \sum x_1 = 815 \ , \sum x_2 = 26 \ , \sum y = 66$$
$$R^2 = 0.83 \ , \quad s_{\hat{\beta}_1}^2 = 0.00024 \ , \quad s_{\hat{\beta}_2}^2 = 0.093 \ , \quad t_{5\%} = 2.36 \ , F_{5\%} = 6.54$$

اختبر معنوية العلاقة بين Y و X_1 , X_2 .

اختبر معنوية المعلمات المقدرة.

من إعداد: د. لطفي مخزومي

معكوس (مقلوب) مصفوفة

1. شروط وجود مقلوب المصفوفة:

- يمكن الحصول على مقلوب المصفوفة A^{-1} فقط إذا كانت المصفوفة A مربعة.
- المصفوفة A^{-1} لها وجود فقط في حالة ما اذا كانت المصفوفة الاصلية A نظامية (أي محددها لا يساوي الصفر $|A| \neq 0$).

2. خصائص مقلوب المصفوفة:

- المصفوفة A^{-1} تحقق العلاقة: $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$.
- محدد مقلوب المصفوفة A يساوي مقلوب محدد المصفوفة الاصلية أي: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
- مقلوب المقلوب هو المصفوفة الاصلية: $A = (A^{-1})^{-1}$.
- مقلوب منقول المصفوفة يساوي الى منقول مقلوبها: $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
- إذا كانت المصفوفة A متناظرة فان مقلوبها A^{-1} أيضا مصفوفة متناظرة.
- $(A\,B\,C)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

3. حساب معكوس المصفوفة عن طريق خوارزمية الحذف الجاوسية:

خطوة1: كون المصفوفة المركبة $M = (A{:}\,I)\ n \times 2n$، أي تكون A النصف الأيسر لـ M و I نصفها الأيمن.

خطوة2: اختزال M صفيا الى شكل درجي. اذا نتج عن هذه العملية صف صفري في النصف A من M، توقف (A ليست عكوسة). في الحالة الأخرى يأخذ النصف A شكلاً مثلثاتياً.

خطوة3: اختزل M صفيا الى الشكل الصفي القانوني ($(I{:}\,B)$) حيث حلت I محل A في النصف الايسر للمصفوفة.

خطوة4: ضع $A^{-1} = B$.

من إعداد: د. لطفي مخزومي