نظرية التقدير

1-1-1 المقدر غير المتحيز

نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز (sans biais) لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع. $E(\hat{\theta}) = \theta$

مثال:

- نقول عن متوسط العينة M أنه مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن $E(M) = \mu$.
- نقول عن الإحصائية S^2 (تباين العينة) في معاينة بالإرجاع أنها مقدر متحيز ل σ^2 لأن:
$$E(S^2) = \sigma^2 (n-1)/n \neq \sigma^2$$
- نقول عن الإحصائية $\hat{S}^2 = S^2 n/(n-1)$ في معاينة بالإرجاع أنها مقدر غير متحيز لأن: $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$

2-1-1 الفعالية

المقدر الأكثر فعالية (efficacité) هو المقدر الأقل تباينا.

مثال: كل من متوسط العينة والوسيط في العينة هو مقدر غير متحيز ل μ، لكن تعتبر M مقدرا أكثر فعالية من الوسيط لأن لها خطأ معاينة أقل:

$$\sigma^2_{méd} = (\sigma^2/n)(\pi/2) > \sigma^2_m = \sigma^2/n.$$

1-2-1 التقدير النقطي

هو تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة لإحصائية ما، فنكتب $\hat{\theta} = \theta$ و هذا إذا علمنا أنها مقدر غير متحيز للمعلمة: $E(\hat{\theta}) = \theta$. مثال ذلك $E(M) = \mu$.

2-2-1 التقدير بمجال

تحديد مجال معين تنتمي إليه المعلمة المقدرة باحتمال ما، فنكتب: $\theta \in [l_1 \ ; \ l_2]$ ويسمى هذا المجال **مجال الثقة**، كأن نقدر الدخل الشهري للأسرة بأنه ينتمي إلى المجال : [16000 ; 24000] بمستوى ثقة 95%.

3-2-1 درجة التأكد أو مستوى الثقة

تحديد مجال الثقة للمعلمة يرفق بتحديد احتمال تحققه، أي باحتمال أن تنتمي المعلمة إلى المجال المذكور. يرمز لهذا الاحتمال ب (1 − α) ويسمى درجة التأكد أو مستوى الثقة. الاحتمال المعاكس α[1] يسمى مستوى أو درجة المعنوية. في الحقيقة يحسب مجال الثقة بناءا على مستوى ثقة محدد مسبقا.

ملاحظة:

- عادة يستخدم الإحصائيون مستوى ثقة 95% (أي مستوى معنوية 5%)، وأحيانا 90%، أو 99%.
- زيادة درجة التأكد تتطلب توسيع مجال الثقة (ما يعني دقة أقل) أو زيادة حجم العينة.

4-2-1 معاملات الثقة

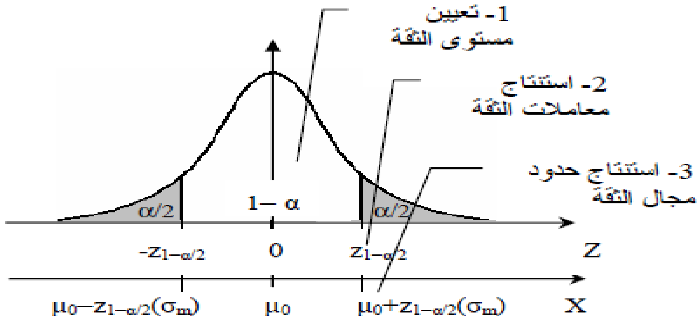
معاملات الثقة هي القيم الجدولية للمتغيرة z أو t أو كا2 حسب الحالة.

مثلا بالنسبة للمتغيرة z نعلم أن:

$$P(-1.64 < Z < 1.64) = 0.90,\ P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95,\ P(-2.58 < Z < 2.58) = 0.99$$

لذلك في حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون معاملات الثقة هي :

القيمتين $\pm$ 1.64 من أجل مستوى ثقة 90%، $\pm$ 1.96 من أجل مستوى ثقة 95% و القيمتين $\pm$2.58 من أجل مستوى ثقة 99% .



رسم 9- 2 خطوات استنتاج مجال الثقة

في حالة التوزيع الطبيعي يرمز لمعاملات الثقة ب Z_c أو $Z_{1-\alpha/2}$ (أنظر الرسم)، وفي حالة استخدام توزيع ستيودنت يرمز لمعاملات الثقة ب: t_c أو $t_{1-\alpha/2}$ ونكتب: $\mu_s \pm t_{1-(\alpha/2)} \cdot \sigma_s$

2-1-1 تقدير متوسط مجتمع μ باستخدام التوزيع الطبيعي

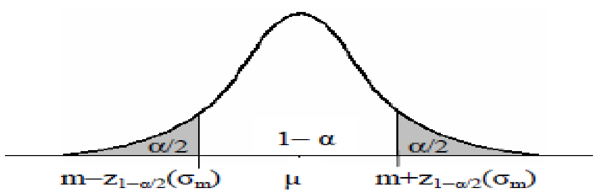
مبدئيا نستخدم التوزيع الطبيعي لتقدير متوسط المجتمع بمجال إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العيـ يتبع التوزيع الطبيعي

$$X \to N(\mu, \sigma) \Rightarrow M \sim N(\mu, \sigma_m) \Rightarrow z_m = \frac{m-\mu}{\sigma_m} \sim N(0, 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(-z_c \le \frac{m-\mu}{\sigma_m} \le +z_c\right) \\
&= P(-z_c\sigma_m \le m-\mu \le +z_c\sigma_m) \\
&= P(-m - z_c\sigma_m \le -\mu \le -m + z_c\sigma_m) \\
&= P(m - z_c\sigma_m \le \mu \le m + z_c\sigma_m)
\end{aligned}$$

و لدينا $\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ إذن: $1-\alpha = P\left(m - z_c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le m + z_c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

و نكتب: $\mu \in \left(m - z_c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ m + z_c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ بمستوى ثقة $1-\alpha$.



رسم 9- 2 مجال الثقة

يمكن أيضا، استنادا إلى قانون النهاية المركزية ، استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير M حتى إذا كان المجتمع مجهول التوزيع بشرط أن تكون العينة ممتدة $(n \ge 30)$

إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ معلوما لكن المجتمع محدود (ذا حجم N) والمعاينة نفادية نكتب حدود مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$m \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال : نقدر أن μ يوجد داخل المجال $m \pm 1.96\sigma_m$ بمستوى ثقة 95 % (0.95) أي بمستوى معنوية 5 % (0.05)، وداخل المجال $m \pm 2.58\sigma_m$ بمستوى ثقة 99 % أي بمستوى معنوية 0.01...

2-1-2. تقدير متوسط المجتمع μ باستخدام التوزيع t

يستخدم توزيع ستيودنت لتحديد مجال الثقة للمتوسط إذا كان المجتمع طبيعيا (أو على الأقل جرسي الشكل) والعينة صغيرة ($n < 30$) و σ مجهول (وفي الغالب يكون كذلك).

و منه يمكن استخدام توزيع ستيودنت لتقدير μ بمجال فنكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$\mu \in \left[m - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \ ; \ m + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$$

ملاحظة: في حالة استخدام الانحراف المعياري المعدل نكتب $\frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$ ونكتب مجال الثقة كما يلي:

$$\mu \in \left[m - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \ ; \ m + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right]$$

مثال2. نريد تقدير متوسط مجتمع طبيعي، بمستوى ثقة 0.95، انطلاقا من عينة حجمها 10 متوسطها 15 و انحرافها المعياري 27.

لدينا $\frac{(m-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$ إذن:

$$\mu \in \left[m - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \ ; m - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \right] \Rightarrow$$
$$\mu \in \left[15 - t_{0.975,10-1}\frac{27}{\sqrt{10-1}} \ ; 15 + t_{0.975,10-1}\frac{27}{\sqrt{10-1}} \right] \Rightarrow$$
$$\mu \in [15 - 2{,}262(3) \ ; 15 + 2{,}262(3)\ ] \Rightarrow \mu \in [8.214 \ ; 21.687]$$

ملاحظة:

في حالة العينة الممتدة (أكبر من 30) يؤول توزيع ستيودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري لذلك نستخدم هذا الأخير