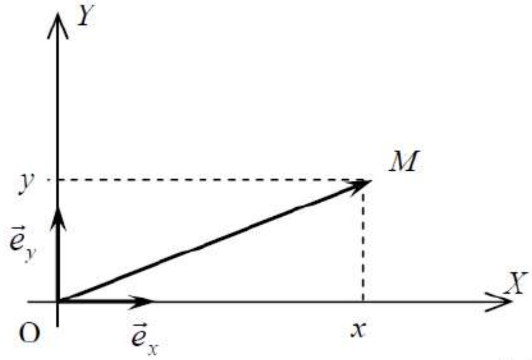
1 مدخل رياضي

1.1 جمل الاحداثيات

1.1.1 الاحداثيات الديكارتية



1. في المستوي

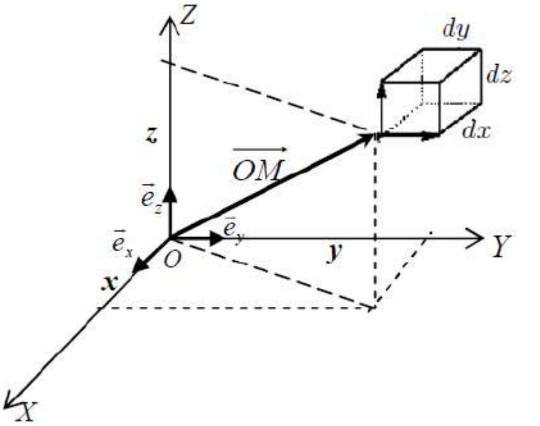
شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y$

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$$

الانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y}$

طول الانتقال العنصري $dl = \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

السطح العنصري $dS = dx.dy$

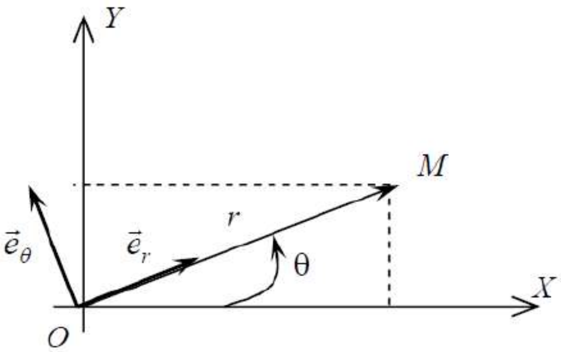


2. في الفضاء

شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$

الانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$

الحجم العنصري $dV = dx.dy.dz$

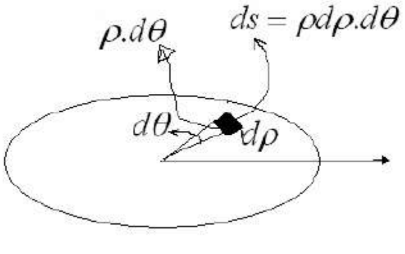


2.1.1 الاحداثيات القطبية

شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y \\ \vec{e}_y = -\sin\theta.\vec{e}_x + \cos\theta.\vec{e}_y \end{cases}$$

الانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta}$

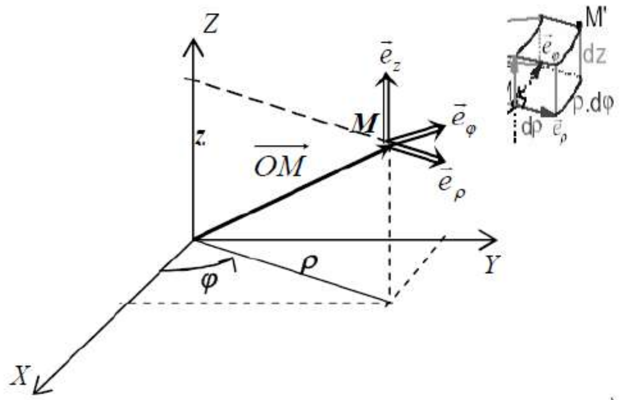


المساحة العنصرية $ds = \rho\, d\rho\, d\theta$

مساحة دائرة نصف قطرها $\boldsymbol{R}$

$$S = \iint dS = \iint \rho d\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = [\frac{\rho^2}{2}]_0^R . [\theta]_0^{2\pi} = \pi R^2$$

3.1.1 الاحداثيات الاسطوانية



شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z$

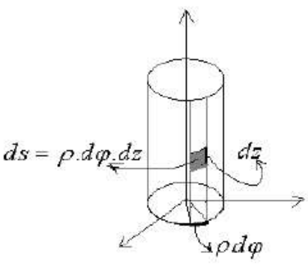
$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

الانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e_\rho} + \rho d\boldsymbol{\varphi}\,\vec{e_{\boldsymbol{\varphi}}} + \ dz\vec{e_z}$

طول الانتقال العنصري $dl = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\boldsymbol{\varphi})^2 + (dz)^2}$

السطح الجانبي للاسطوانة $ds = \rho.d\varphi.dz$

مساحة السطح الجانبي لاسطوانة نصف قطر قاعدتها $\boldsymbol{R}$ وارتفاعها $\boldsymbol{L}$:

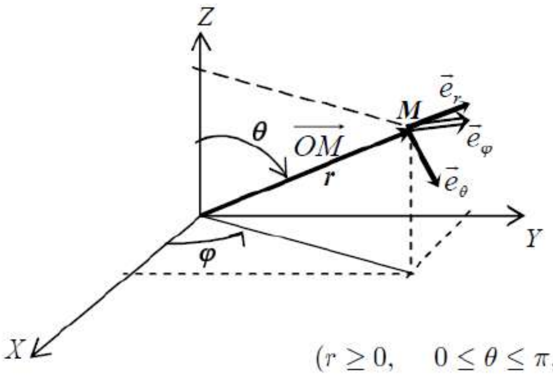


$$S = \iint dS = \iint \rho d\rho dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{L} dz = R.[\theta]_0^{2\pi}.[z]_0^L = 2\pi RL \quad (\rho = R)$$

حجم اسطوانة نصف قطر قاعدتها $\boldsymbol{R}$ وارتفاعها $\boldsymbol{L}$

$$V = \int\int\int dV = \int\int\int \rho d\rho d\theta dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \ \pi R^2 L$$

4.1.1 الاحداثيات الكروية



شعاع الموضع: $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$

مجال تغيرات الإحداثيات الكروية هو: $(r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

الانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta.d\varphi\vec{e_\varphi}$

الطول العنصري: $dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r.\sin\theta.d\varphi)^2}$

سطح الكرة $dS = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$

مساحة سطح كرة نصف قطرها $\boldsymbol{r = R}$

$$S = \iint dS = \iint r^2\sin\theta d\theta d\varphi = R^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

الحجم العنصري : $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$

حجم كرة نصف قطرها R

$$V = \iiint dV = \iiint r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^2$$

2.1 المؤثرات

مؤثر التدرج في جملة الإحداثيات الديكارتية

يعطى المؤثر نابلا Nabla بالعبارة:

$$\vec{\nabla}. = \overrightarrow{grad}. = \frac{\partial .}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial .}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial .}{\partial z}\vec{k}$$

إذا طبق المؤثر Nabla على **دالة سلمية** $f(x,y,z)$ سمي تدرجا gradient

$$\vec{\nabla}f = \overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ملاحظة: ليكن الانتقال العنصري $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

ولتكن الدالة السلمية $f(x,y,z)$

* يمكن استنتاج عبارة التدرج بالاستعانة بالعلاقة $df(x,y,z) = \vec{\nabla}f(x,y,z).\vec{dl}$

* شعاع التدرج يدلنا على اتجاه التغير الاعظمي للدالة $f(x,y,z)$

مؤثر التدرج في جملة الإحداثيات الاسطوانية

يعطى الشعاع نابلا Nabla في الإحداثيات الأسطوانية

$$\vec{\nabla}. = \overrightarrow{grad}. = \frac{\partial .}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{r}\frac{\partial .}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial .}{\partial z}\vec{u}_z$$

إذا طبق المؤثر Nabla على دالة سلمية $f(\rho,\theta,\varphi)$ سمي تدرجا gradient

$$\vec{\nabla}f = \overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

مؤثر التدرج في جملة الإحداثيات الكروية

عبارة الشعاع نابلا Nabla هي

$$\vec{\nabla}. = \overrightarrow{grad}. = \frac{\partial .}{\partial \rho}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial .}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial .}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

إذا طبق المؤثر Nabla على دالة سلمية $f(r,\theta,\varphi)$ سمي تدرجا

$$\vec{\nabla}f = \overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$