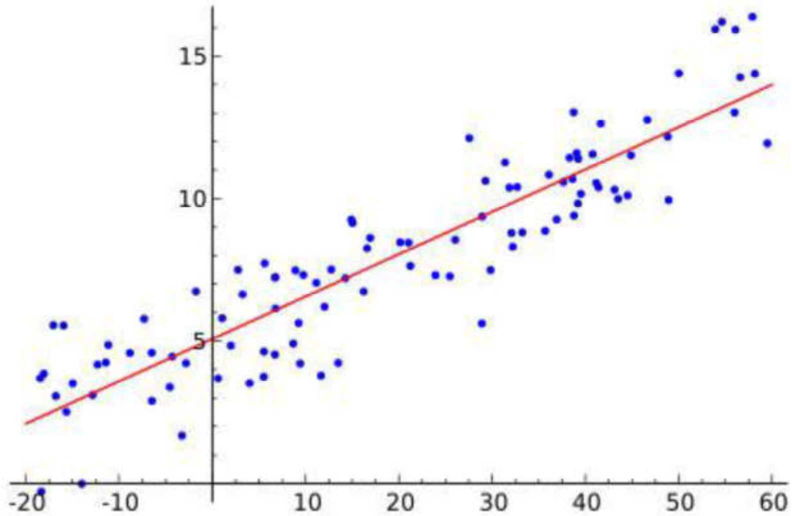
تحليل الانحدار الخطي البسيط

Analyse de la régression Simple

كلمة انحدار: مصدرها دراسة أطوال الأبناء بالنظر إلى أطوال آبائهم

يستخدم الانحدار الخطي البسيط لاختبار فرضية وجود علاقة بين متغير تابع Y ومتغير مفسر أو شارح او مستقل X واحد وهذا قصد التحليل والتنبؤ.

- تحليل الانحدار الخطي البسيط: باقتراض وجود علاقة خطية بين X و Y ثم نرسم المستقيم الذي يمثل او يقارب هذه العلاقة.
- عند دراستنا لشكل الانتشار أو سحابة النقط هل يمكن رصد حقيقة العلاقة أم لا.



- هذا التشويش او الاضطراب نسميه بالحد العشوائي وننظر في توزيعها
- العلاقة الحقيقية والخطية تكتب:

$Y_t= a+bX_t+U_t$ ....(1) (سلسلة زمنية لنفس الشخص).

$Y_i= a+bX_i+U_i$ (سلسلة مقطعية لأشخاص متعددة)

والخط المستقيم الجديد يكتب: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$ ....(2)

المتغيرات X و Y والمعالم $a.b$ الحقيقة والمعالم المقدرة هي $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ووجود الحد العشوائي u في المعادلة (1) مرجعة إلى الخطأ.

- وجود متغيرات أخرى مفسرة مدرجة في المعادلة أو غير قابلة للقياس.
- الخطأ في قياس المتغيرات وعدم الدقة.

- المعلومات مصدرها العينة وسوف تعمم على المجتمع مما يعني هامش الخطأ.

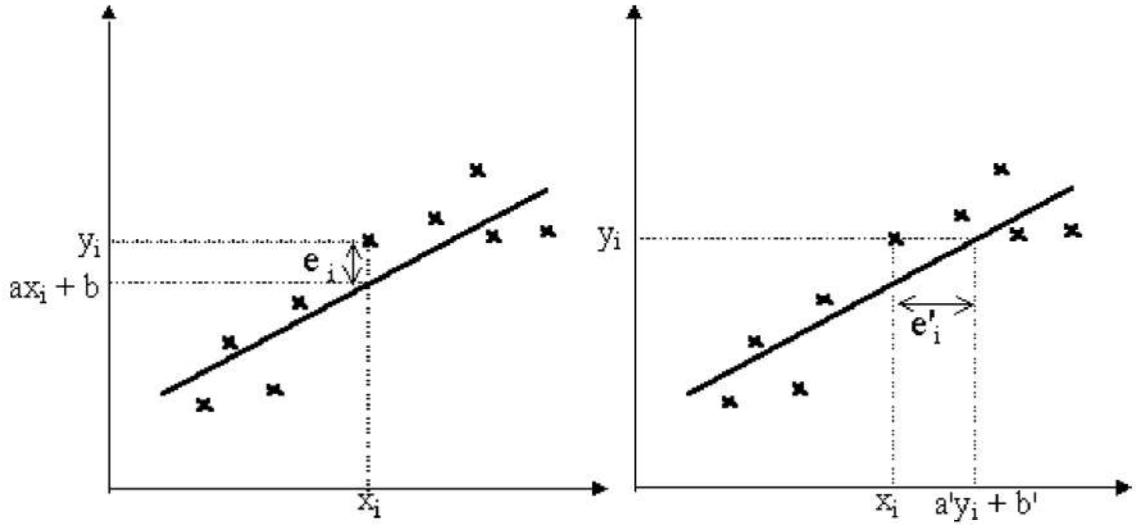
ويفترص فيها:

1. موزعة طبيعيا $U_t \backsim N$
2. وسطه معدوم $E(U_t) = 0$
3. تباين ثابت $V(U) = E(U^2) = \sigma^2$
4. عدم ارتباط الأخطاء مع بعضها $E(U_i U_j) = 0 \ \forall i \neq j$
5. عدم ارتباط الأخطاء بالمتغير المفسر x $E(U_i X_i) = 0. COV(U_i X_i) = 0$

في ظل هذه الفرضيات نحاول بناء خط مستقيم يمثل .التقريب للنموذج (1)

1. تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية MCØ .OLS

وهي طريقة تقدير وأسلوب مفضل لرسم خط مستقيم لعين المشاهدات X و Y وهي تعمل على تصغير مجموع المربعات لإنحرافات النقاط الرأسية على الخط إلى أدنى حد ممكن باعتبار المعمله $\hat{\alpha}$ هو مقدر لـ a و$\hat{\beta}$هو مقدر لـ b. فإننا نبحث في تصغير الفرق وبما أن الفرق يمكن ان يكون موجبا او سالبا نعمل على جعله و مربعا.



من (1) و (2) نجد أن: $Y_t - \widehat{Y_t} = U_t$

$$\sum U_t = \sum(Y_t - \hat{Y}_t) \longrightarrow Min \ \sum {U_t}^2 = Min \ \sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

$$\sum U_t = 0 = \sum(Y_t - \hat{Y}_t) = 0$$ (حسب الفرضية 2 للاخطاء)

$$\sum(Y_t - \hat{a} - \hat{B}X_t) = 0 \Rightarrow \ \sum Y_t(n\hat{a} - \hat{B}\sum X_t) \Rightarrow \quad \bar{Y} = \hat{a} + \hat{B}\bar{X} \dots (3)$$

وتفيدنا هذه الأخيرة أن الخط المقدر للنموذج يمر عبر النقطة $(\bar{X},\bar{Y})$ وتبقى إشكالية الخط، وباستعمال طريقة المربعات الصغرى أن تصغير مجموع مربعات الأخطاء فإننا نلجأ إلى الرياضيات وعندما نستعمل الاشتقاق الجزئي عند المعلمتين ونساوي المشتق إلى الصفر:

أي أنه $$Q=\sum_{i=1}^{n}Ut^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)^2$$

ولتصغير Q نعمل على اشتقاقها جزئيا بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$ و$\hat{B}$ ونجعل المشتق يساوي الصفر:

الهدف هو:

$$Min\ Q=\frac{\partial Q}{\partial\hat{\alpha}}=\frac{\partial Q}{\partial\hat{B}}=0$$

عندما تشتق بالنسبة إلى $\hat{\alpha}$ و $\hat{B}$:

$$Q=\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)^2=\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\hat{\alpha}}=2\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)(-1)=0$$

$$\Rightarrow\ \sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{a}=\bar{Y}-\hat{B}\bar{X}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\hat{B}}=2\sum\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)(X_t)(-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad \sum X_t\left(Y_t-\hat{a}-\hat{B}X_t\right)=0\quad=\Delta\quad \sum X_tY_t=\hat{\alpha}\sum X_t+\hat{B}\sum {X_t}^2$$

بالتعويض عن قيمة $\hat{\alpha}$ في المعادلة (4) نجد:

$$\sum X_tY_t=\left(\bar{Y}-\hat{B}\bar{X}\right)\sum X_t+\hat{B}\sum {X_t}^2$$

$$\sum X_tY_t=\bar{Y}\sum X_t-\hat{B}\bar{X}\sum X_t+\hat{B}\sum {X_t}^2$$

بما أن: $\bar{X}=\frac{\sum X_t}{n}\Rightarrow.\sum X_t=n\bar{X}$

$$\sum X_tY_t=n\bar{X}\bar{Y}+\hat{B}\left(\sum {X_t}^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{B}=\frac{\sum X_tY_t-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum {X_t}^2-n\bar{X}^2}\qquad\Rightarrow\quad \hat{B}=\frac{\sum_{t=i}^{n}(X_t-\bar{X})(Y_t-\bar{Y})}{\sum_{t=i}^{n}(X_t-\bar{X})^2}\ldots\ldots(5)$$

يمكن التعبير عن (5) $\hat{B}=\frac{\sum x_ty_i}{\sum {x_t}^2}$: $x_t=(X_t-\bar{X}),\quad y_t=(Y_t-\bar{Y})$

ومنه وضعنا خط مستقيم يرمز ويلخص العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغير المفسر أو الشارح X

$$\hat{Y}_t=\hat{\alpha}+\hat{B}X_t$$

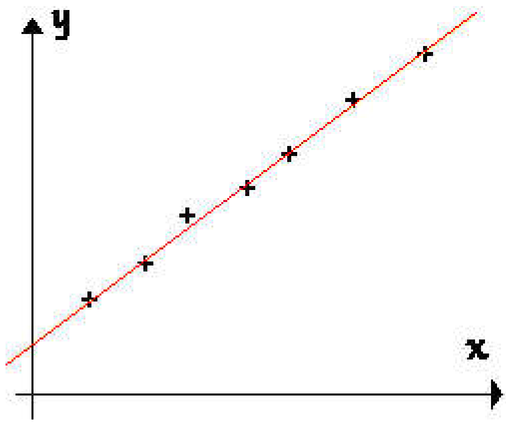
مثال/ لدينا جدول يلخص النتائج المتحصل عليها من محصول الحنطة القمح Y باستخدام كميات السماد X

n	Y_t	X_t	y_t	x_t	$x_t y_t$	${x_t}^2$
1	40	6	-17	-12	204	144
2	44	10	-13	-8	104	84
3	46	12	-11	-6	66	36
4	48	14	-9	-4	36	16
5	52	16	-5	-2	10	4
6	58	18	1	0	0	0
7	60	22	3	4	12	16
8	68	24	11	6	66	36
9	74	26	17	8	136	64
10	80	32	23	14	322	196
$\sum$	570	180	0	0	956	576

$$\hat{B} = \frac{\sum n_t y_i}{\sum {n_t}^2} = \frac{956}{576} = 1.66, \qquad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X} = 57 - 166(18) = 27.12$$

$$\hat{Y}_t = 27.12 + 1.66X_t$$

الرسم والشكل البياني :



$$\hat{Y}_t = 27.12 + 1.66X_t$$

2 خواص المقدرات :

ا المتوسطات

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= a + bX_t + \varepsilon_t \\ \bar{Y}_t &= a + b\bar{X}_t + \bar{\varepsilon}_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y_t - \bar{Y} = b(X_t - \bar{X}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$$

$$yt = Y_t - \bar{Y} = bxt + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$$

بالتعويض في (5) عن قيم B و $Y_t - Y$ نجد أن:

$$\hat{B} = \frac{\sum xtyt}{\sum xt^2} = \frac{\sum xt\,[bxt + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})]}{\sum xt^2} = \frac{b\sum xt^2}{\sum xt^2} + \frac{\sum xt\,(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum xt^2} \quad on\ a \backslash \sum x_t \bar{\varepsilon} = 0$$

$$\hat{B} = b + \frac{\sum xi\,(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum xi^2} = b\frac{\sum xt\,\varepsilon_t}{\sum xt^2} \ldots\ldots (6)$$

$$E(\hat{B}) = E(b) + \frac{\sum xtE\,(\varepsilon_t)}{\sum xt^2} = b \qquad \left| \begin{aligned} E(\hat{B}) &= b \\ E(\varepsilon_t) &= 0 \end{aligned}\right.$$

$\hat{B}$ هو مقدر غير متحيز لـ b

بنفس الطريقة نجد أن: $E(\hat{\alpha}) = a$

$$\left.\begin{aligned} \bar{Y} &= \hat{a} + \hat{B}\bar{X} \\ \bar{Y} &= a + b\bar{X} + \bar{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{a} = a + \bar{\varepsilon} - (\hat{B} - b)\bar{X} \quad ;$$

$$E(\hat{a}) = E(a) + E(\bar{\varepsilon}) - E\left((\hat{B} - b)\bar{X}\right) = a \left| \begin{aligned} E(\bar{\varepsilon}) &= 0 \\ E(\hat{B} - b) &= 0 \end{aligned}\right.$$

$\hat{a}$ هو مقدر غير متحيز لـ a

تذكير: نقول عن مقدر أنه متحيز إذا كان q مقدار حجم التحيز ; $E(\hat{\theta}) = \theta + q$

التباينات:

تعطى التبايانات للمقدرات بالشكل التالي:

$$V(\hat{B}) = \frac{\sigma_v^2}{\sum xt^2}, et. V(\hat{\alpha}) = \sigma_v^2 . \frac{\sum Xt^2}{n\sum xt^2}:$$

والملاحظ أنه كلما $n \to \infty \to \sum xt^2 \to \infty$ فيكون :

$V(\hat{B}) \to 0$ و $V(\hat{\alpha}) \to 0$ مما يعني مقدرات مقاربة للقيم الحقيقية عند رفع n

وحيث أن σ_v^2 غير معروفة فإن تباين البواقي تقدره بـ S^2

$$S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k} \left| \begin{array}{l} n\text{عدد المشاهدات} \\ k\text{المعالم المقدرة} \end{array}\right.$$

ومن تصبح: $V(\hat{\alpha}) = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k} . \frac{\sum Xi^2}{n \sum xi^2} = S^2_{\hat{\alpha}}$

$$V(\hat{B}) = \frac{\sum {U_t}^2}{n-k} . \frac{1}{\sum xi^2} = S^2_{\hat{B}}$$

لدينا مقدرين إذا k=2 فإن $S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-2} = \hat{\sigma}^2$ كيف ذلك؟

لدينا $U_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{B}X_t - \hat{\alpha}$

$$= Y_t - \hat{B}X_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t + \hat{B}\bar{X}$$

$$= Y_t - \hat{B}\bar{X}_t - \hat{\alpha} - \hat{B}X_t + \hat{B}\bar{X}$$

$$= Y_t - \bar{Y} - \hat{B}(X_t - \bar{X})$$

وبالتعويض عن قيم Y_t و $\bar{Y}$: $U_t = b(X_t + \bar{X}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} - \hat{B}(X_t - \bar{X})$

$$U_t = \left(b - \hat{B}\right)(X_t - \bar{X}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

$$\sum {U_t}^2 = \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2 + \sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 + 2\left(b - \hat{B}\right) \sum xi(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$$

من (6) نجد أن $\sum xi^2 \left(\hat{B} - b\right) = \sum xi(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) = -\left(b - \hat{B}\right) \sum xi^2$

ونعوض في المعادلة نجد:

$$\sum {U_t}^2 = \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2 + \sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 + 2\left(b - \hat{B}\right)\left(-b - \hat{B}\right) \sum xi^2$$

$$= \sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 - \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2$$

$$V(U_t) = E\left(\sum {U_t}^2\right) = E\left[\sum(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_t)^2\right] - \left(b - \hat{B}\right)^2 \sum xi^2$$

$$E\left[\sum {\varepsilon_t}^2 - n(\bar{\varepsilon}_t)^2\right] - E\left(\hat{B} - b\right)^2 \sum xi^2 \quad \Bigg| \quad E(\bar{\varepsilon}) = 0$$

$$E\left(\sum {U_t}^2\right) = \sum E(\varepsilon_t)^2 - \frac{1}{n} E\left(\sum \varepsilon_t\right)^2 \sigma^2 \quad \Bigg| \quad E\left(\hat{B} - b\right) = \frac{\sigma^2}{\sum xi^2}$$

$$= n\sigma_v^2 - \frac{1}{n} n\sigma_v^2 - \sigma_v^2 = \quad \Bigg| \quad E(\bar{\varepsilon}) = 0$$

$$E\left(\sum {U_t}^2\right) = (n-2)\sigma^2, \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum {U_t}^2}{n-2} \quad \Bigg| \quad E\left(\hat{B} - b\right) = \frac{\sigma^2}{\sum xi^2}$$

عندما يكون مقدر التباين

3 اختبار معنوية المعالم

لأجل اختبار معنوية المعالم ينبغي علينا معرفة اختبار ستودنت T لان:

$$\frac{\hat{B} - b}{\sigma_{\hat{B}}} \backsim N(0.1) et\ (n-2) \frac{S^2_{\hat{B}}}{\sigma^2_{\hat{B}}} \backsim X^2_{n-2} \Longrightarrow \frac{\hat{B} - b}{S_{\hat{B}}} \backsim T_{n-2}$$

$$\text{لان}=\boldsymbol{T}=\frac{N(0.1)}{\sqrt{\frac{X_n^2}{n}}}=\frac{\frac{\hat{B}-b}{\sigma_{\hat{B}}}}{\sqrt{\frac{(n-2)S_{\hat{B}}^2}{\sigma_{\hat{B}}^2}}}=\frac{\hat{B}-b}{S_{\hat{B}}}\backsim \boldsymbol{T}_{n-2}^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

حيث صيغة الاختبار تكون بالشكل التالي

$$\begin{cases} H_0: b = 0 & T_C \backsim T_T \\ H_1: b \neq 0 & |T_C| < T_T \text{ عندما } H_0 \text{ نقبل} \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نختبر $\hat{\alpha}$

$$\begin{cases} H_0: a = 0 & T_{C_a} = \frac{\hat{a}-a}{S_{\hat{a}}} \\ H_1: a \neq 0 & |T_C| < T_T \text{ عندما } H_0 \text{ نقبل} \end{cases}$$

وحسب المثال السابق نجد:

Y				
40	37.08	2.92	8.5264	36
44	43.72	0.28	0.0784	100
46	47.04	−1.04	1.0816	144
48	50.36	−2.36	5.5696	196
52	53.68	−1.68	2.8224	256
58	57	1.00	1.0000	324
60	63.64	−3.64	13.2496	484
68	66.96	1.04	1.0816	576
74	70.28	3.72	13.8384	676
80	80.24	−0.24	0.0576	1024
$\sum$	$\sum_{Ut}=0$	$\sum {U_t}^2 = 47.3056$		$\sum {X_t}^2 = 3816$

$$S_{\hat{\alpha}}^2 = V(\hat{\alpha}) = \frac{\sum {U_t}^2}{n-R}.\frac{\sum Xt^2}{n\sum xi^2} = 5.9132.\frac{3816}{10.(576)} \cong 3.92 = 0\ S_{\hat{a}} = 1.98$$

$$S_{\hat{B}}^2 = V(\hat{B}) = \frac{\sum {U_i}^2}{n-R}.\frac{1}{\sum xi^2} = \frac{5.9132}{576} \cong 0.01 \Longrightarrow S_{\hat{B}} = 0.1$$

في ظل فرضية العدم H_0

$$pour\ \hat{a}: Tc_{\hat{a}} = \frac{\hat{a}-a}{S_{\hat{a}}} = \frac{27.12-0}{1.98} \cong 13.7, Tc_{\hat{B}} = \frac{\hat{B}-b}{S_{\hat{B}}} = \frac{1.66-0}{0.1} \cong 16.6$$

نقارن النتيجتين السالفتين بـ T_t عند $\alpha=5\%$

$$T_{n-R}^{1-\frac{\alpha}{2}} = T_8^{0.975} = 2.306$$

نجد أن كل من $\hat{\alpha}$ و $\hat{B}$ مختلفتين عن الصفر أي معنوية احصائية عن 5%

4 اختبار جودة التوفيق والارتباط:

نلاحظ أنه كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار كلما صغرت البواقي وكلما زاد التغيرفي Y_t الذي يفسره معادلته يرجع تلك الزيادة إلى الزيادة في الأخطاء.

$$\sum(Y_t - \bar{Y})^2 = \sum\left(\hat{Y}_t - \bar{Y}\right)^2 + \sum\left(Y_t - \hat{Y}\right)^2$$

التغير في البواقي + التغير المفسر في Y = التغير الاجمالي في Y

مجموع مربعات الخطأ + مجموع مربعات الانحدار = إجمالي مجموع المربعات

TSS=ESS+RSS

SCT=ECE+SCR

معامل التحديد R^2: coefficient de détermination

$$\text{TSS} = \text{ESS} + \text{RSS} \Rightarrow \frac{\text{TSS}}{\text{TSS}} = \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} + \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$$

$$1 = \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} + \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}$$

$$R^2 = \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{\sum {U_i}^2}{\sum {y_i}^2} = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum {y_i}^2}$$

نجد قيمة R^2: 0 : عندما لا يفسر معادلة الانحدار أي من التغير في Y_t

1 : عندما تقع كل النقاط على خط الانحدار

ويمكن القول أن النموذج يفسر التغير في Y_t بنسبة % وكلما زادت قيمة R^2 (أقترب من 1) كان أحسن و زاد تفسير النموذج.

العلاقة بين معامل الارتباط r ومعامل التحديد R^2

$$r = \sqrt{R^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum {x_i}^2}\sqrt{\sum {y_i}^2}} = \sqrt{\hat{B}\frac{\sum x_i y_i}{\sum {y_i}^2}}$$

حسب المثال السابق: $R^2 = 1 - \frac{\sum {U_i}^2}{\sum {y_i}^2} = 1 - \frac{47.31}{1634} = 1 - 0.029 \cong 0.971$

أي معادلة الانحدار تفسر 97% من التغير الاجمالي في Y_t (انتاج القمح) أما النسبة الباقية 3% فهي لعوامل أخرى.

خلاصة:

مقدرات طريقة OLS هي الأفضل لأنها

- غير متحيزة *sans biais*
- مقدر كفؤ *efficace* له أصغر تباين (نظرية قوس ماركون).
- مقدر متسق (يقترب من القيمة الحقيقية) $\lim_{n\to\infty}(\hat{\alpha}\hat{\beta})$

5 معادلة وجدول تحليل التباين *ANOVA*

$$\sum(Y_t-\bar{Y})^2=\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2+\sum Ut^2$$

$$\text{TSS}=\text{ESS}+\text{RSS}$$

لدينا

$$R^2=\frac{\sum(\hat{Y}_t-\bar{Y})^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}=1-\frac{\sum {U_t}^2}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2}$$

جدول تحليل التباين

Source de vernation	*Somme des carrés*	*Degré de liberté*	*Carrés mayens*
X	$\text{ESS}=\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2$	*1*	$\text{ESS}/1$
Résidu	$\text{RSS}=\sum {U_t}^2$	*n-2*	$\text{RSS}/(\text{n}-2)$
Total	$\text{TSS}=\sum(Y_t-\bar{Y})^2$	*n-1*	

درجة الحرية توافق عدد المتغيرات المستقلة

X لا يفسر النموذج (ليس جزء من التفسير)

$$\begin{cases}H_0: b=0 & : \quad H_0: \text{ESS}=0\\ H_1: b\neq 0 & : \quad H_1: \text{ESS}\neq 0\end{cases}$$

الاختبار هو اختبار فيشر

$$F_c=\frac{\frac{\text{ESS}}{k-1}}{\frac{\text{RSS}}{n-k}}=\frac{\frac{\sum\left(\hat{Y}_t-\bar{Y}\right)^2}{1}}{\frac{\sum {U_t}^2}{n-2}}=\frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}}\backsim F_r=F_{R-1,n-k}$$

نرفض H_0 عندما $F_c>F_t$ برهان التوزيع (*P35.RB*)

نلاحظ أن $F_c = \left(tc_{\hat{\beta}}\right)^2 = \left(\frac{\hat{B}}{S_{\hat{\beta}}}\right)^2 = \frac{\hat{B}^2}{\sigma_u^2/\sum(X_t-\bar{X})^2} = \frac{\hat{B}^2\sum(X_t-\bar{X})^2}{\sum Ut^2/(n-2)}$

6 التنبؤ في نموذج الانحدار الخطي البسيط:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t$$

لأجل الفترة $t+1$

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{t+1}$$

فيكون:

$$U_{t+1} = Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1} \backsim \left(0, \sigma_u^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2} + 1\right]\right)$$

ولدينا:

$$\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_{t+1}-Y_{t+1}}{S_{\text{ع}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(X_{t+1}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2}+1}} \backsim T_{n-2}$$

(S^2مقدر تباين البواقي)

ومنه مجال الثقة للقيم المتنبأ بها.:

$$Y_{t+1} = \hat{Y}_{t+1} \pm t_{n-2}^{1-\alpha/2} \qquad S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1}-\bar{X})^2}{\sum(X_t-\bar{X})^2} + 1}$$