Université de Chahid Hamma Lakhdar d'El-oued

Faculté des sciences exactes — Département de Mathématiques

3ème année Licence Math — Année universitaire: 2021/2022

Méthode numériques pour EDO et EDP — Séries d'exercices N°: 01

Exercice 01: On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -u'' + u'(x) = x \ , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = a \ , u(1) = b \end{cases}$$

On cherche à approcher cette solution par la méthode de différences finies. Soit $N \in IN^*$, et $h = \frac{1}{N+1}$ On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$.

On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' au point ih , $i = 1, \dots, N$. On pose $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

1- Donner une discrétisation par différences finies de ce problème.
2- Ecrire le système obtenu sous la forme matricielle $A_h u_h = b_h$. Donner A_h et b_h.
3- Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance si u est suffisamment régulière .

Exercice 02: On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant:

$$\begin{cases} -u'' + 2u(x) = x \ , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 1 \ , u'(1) + u(1) = 0 \end{cases}$$

1- Donner une discrétisation de ce problème par différences finies pour un maillage uniforme en utilisant les approximations centrées aux points $x_i = ih \, , i = 1, \dots N$.
2- Prouver que ce système s'écrit sous la forme: $A_h U = F$.
3- Etudier la consistance de ce schéma et donner une majoration de l'erreur de consistance.

Exercice 03: On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{1}{1+x} u'(x) = f(x) \ , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = a \ , u(1) = b \end{cases}$$

On admettra qu'il existe une unique solution $u \in C^4([0,1])$ à ce problème. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soit $N \in IN^*$, et $h = \frac{1}{N+1}$ On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$.

On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' au point ih , $i = 1, \dots, N$. On pose $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

1- Montrer que u_h est solution d'un système linéaire de la forme $A_h u_h = b_h$, donner A_h et b_h.
2- Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance (on rappelle que l'on a supposé $u \in C^4([0,1])$)
3- Soit $v \in \mathbb{R}^n$, montrer que $A_h v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$.
4- On défini θ par:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) ln2 \, , \qquad x \in]0,1[$$

a- Montrer qu'il existe $C \geq 0$, indépendante de t.q

$$max \left| \tfrac{1}{h^2}(-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) + \tfrac{1}{2h(1+ih)}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq Ch^2$$

Avec $\theta_i = \theta(x_i)$.

b- On pose $\theta_h = (\theta_1, \theta_2, \dots \theta_N)$, montrer que $(A_h \theta_h)_i \geq 1 - Ch^2$,

c- Montrer qu'il existe $M \geq 0$ ne dépend pas de h t.q $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M$.

5- Montrer la convergence, en un sens à définir, de u_h vers u.

Exercice 04: On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant:

$$\begin{cases} -u'' + (1+x^2)u(x) = f(x) \ , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 1 \, , u'(1) + u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

On cherche une solution de (1) par la méthode de différences finies. Soit $n \in IN, h = \frac{1}{N+1}$.

1- Donner une discrétisation par différences finies en utilisant les approximations centrées aux points x_i , $i = 1, \dots, N$.

2- Etudier la consistance de ce schéma et déterminer son ordre si $f \in C^2([0,1])$.

3- Prouver que ce système s'écrit sous la forme: $A_h U = F$.

4- Montrer que la matrice A_h est inversible.