Chapitre 1

Rappels sur les différents théorèmes d'existence

1.1 Notations, définitions et notions préliminaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction continue de $I \times U$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1. *(Equation différentielle ordinaire) Une équation différentielle ordinaire est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \longrightarrow y(t)$ et ses dérivées $y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}$ au point t définie par*

$$F\left(t, y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}\right)(t) = 0. \tag{1.1}$$

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2. *(Equation différentielle normale) On appelle une équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme*

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}\right)(t).$$

Exemple 1. *Equation différentielle du premier ordre sous la forme normale*

$$y' = f(t, y) \ \text{ ou } \frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Définition 3. *(Solution) On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur un cette intervalle I, n fois dérivable en* *tout point de I et vérifie cette équation différentielle sur I. On notera en générale cette solution (y, I).*

Définition 4. *Soient (y, I) et $\left(\tilde{y}, \tilde{I}\right)$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que $\left(\tilde{y}, \tilde{I}\right)$ est un prolongement de (y, I) si et seulement si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.*

Définition 5. *(Solution maximale et solution globale)*

Soient (I_1) et (I_2) deux intervalles.

1. *On dit qu'une solution (y, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si y n'admet pas de prolongement $(\tilde{y}, \tilde{I})$ solution de l' équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2$.*
2. *On dit qu'une solution (y, I_1) est globale dans I_2 si et seulement si y admet un prolongement $\tilde{y}$ défini sur l'intervalle I_2 tout entier.*

Remarque 1. *Toute solution globale sur un intervalle I est maximale sur I, mais la réciproque est fausse.*

1.2 Réduction a une équation du premier ordre

Considérons l'EDO d'ordre n, $(n \geq 3)$

$$F\left(t, y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0,$$

où y est à valeur dans $\mathbb{R}^m$ (on prend $m = 1$ en générale) et

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

On fait le changement d'inconnues $Z = \left(y, y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}\right)$. On a alors $Z \in (\mathbb{R}^m)^n$. On note alors $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ où chacun de $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m,\ i = 1, ..., n$. On se trouve alors avec des relations entre les z_i

$$\begin{cases} z_i' = z_{i+1},\ i = 1, ..., n-1, \\ F\left(t, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)(t) = 0. \end{cases}$$

On se ramène alors à une équation du premier ordre, a une variable et n inconnues du type

$$G\left(t, z_1, z_2, ..., z_n, z_1', z_2', ..., z_n'\right) = 0.$$

Cas particulier : $(n = 2)$ (F scalaire)

$$F(t, y, y', y'') = 0,$$

cette équation peut se ramène à une équation du premier ordre à deux inconnues, z_1 et z_2 : On pose $z_1 = y$ et $z_2 = y'$, on obtient

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ F(t, z_1, z_2, z_1', z_2') = 0. \end{cases}$$

Exemple 2. *$ay'' + by' + cy = d$. On considérant $z_1 = y$, $z_2 = y'$.*

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ bz_1' + az_2' = -cz_1 + d. \end{cases}$$

Ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}.$$

1.3 Théorèmes d'existence et d'unicité

On s'intéresse a des systèmes différentiels de type suivant

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ (t, u) \in U. \tag{1.2}$$

Où : U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Définition 6. *Le problème de Cauchy correspondent à l'équation (1.2) est la recherche des solutions u de (1.2) telque $u(t_0) = u_0$*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)),\ (t, u) \in U, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Définition 7. *Une solution du problème (1.3) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, avec la condition initiale $(t_0, u_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, telle que*

1. *Pour tout $t \in I$, $(t, u(t)) \in U$.*
2. *Pour tout $t \in I$, $u'(t) = f(t, u(t))$.*
3. *$u(t_0) = u_0$.*

Notation :

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désingne la norme euclidienne de x.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application différentiable en $x \in U$, on notera indifféremment sa différentielle par $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Définition 8. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application Lipschitzienne de rapport k sur U si*

$$|f(u_1) - f(u_2)| < k\,|u_1 - u_2|\,,\ \textit{pour tous } (u_1, u_2) \in U^2.$$

Définition 9. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$, si pour tout $u_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{u_0} \subset U$ de u_0 telque $f|_{V_{u_0}}$ soit Lipschitzienne sur V_{u_0}.*

Exemple 3. *La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas Lipschitzienne.*

Définition 10. *Une fonction $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue et Lipschitzienne sur U uniformément par rapport à $t \in I$, si*

1. *f est continue sur $I \times U$.*
2. *Il existe $k > 0$ telque*

   $$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| < k\,|u_1 - u_2|\,,$$

   pour tout $t \in I$ et tout $(u_1, u_2) \in U^2$.

Définition 11. *Une fonction $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue et localement Lipschitzienne par rapport à $u \in U$ uniformément en $t \in I$, si*

1. *f est continue sur $I \times U$.*
2. *Pour tout (t_0, u_0), Il existe un voisinage $V_{t_0} \times V_{u_0} \subset I \times U$ de (t_0, u_0), telque $f|_{V_{t_0} \times V_{u_0}}$ soit Lipschitzinne sur V_{u_0}, uniformément par rapport à $t \in V_{t_0}$.*

1.3.1 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1. *(Existence locale et unicité)*

Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur $I \times U$, localement Lipschitzienne en $u \in U$ uniformément en

$t \in I$. Pour tout $(t_0, u_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \ (t, u) \in I \times U, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

admet une solution (u, I_u) $(t_0 \in I_u)$. De plus la solution unique sur I_u.

Théorème 2. *(Existence locale d'une solution maximale)*

Toute solution (u, I_u) se prolonge en une solution maximale (pas nécessairement unique).

Théorème 3. *(Existence d'une solution maximale et unicité) Les hyothèses sont celles du théorème d'existence locale.*

Pout tout $(t_0, u_0) \in I \times U$, il existe une solution maximale unique $(u, I(t_0, u_0))$ de (1.4) vérifiant $u(t_0) = u_0$.

L'intervalle maximale $I(t_0, u_0) = (t^-(t_0, u_0), t^+(t_0, u_0))$ est ouvert dans I. De plus t^- vérifié

$$t^- = \inf I \quad ou \quad \lim_{t \to t^-} \min \left(d(u(t), \partial u), \frac{1}{|u(t)|} \right) = 0.$$

De même t^+ vérifié

$$t^+ = \sup I \quad ou \quad \lim_{t \to t^+} \min \left(d(u(t), \partial u), \frac{1}{|u(t)|} \right) = 0.$$

Théorème 4. *(Condition suffisante d'existence de solution globale)*

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert $U = J \times \mathbb{R}^m$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \longmapsto f(t, y)$ soit Lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Alors, l'unique solution maximale de l'équation $u' = f(t, u)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).

Exemple 4. *On considère l'équation différentielle $u' = |u| + |t|$.*

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(u, t) = |u| + |t|$. f est une application Lipschitzienne par rapport à la second variable. En effet :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| = ||u_1| + |t| - |u_2| - |t|| = ||u_1| - |u_2|| \leq |u_1 - u_2|.$$

Remarquant que $u' \geq 0$ pour tout t et que pour tout $(0, u_0)$ passe une solution maximale unique (φ, J).

1.4 Exercices

Exercice 1.1. *Justifier l'existence de l'unique solution locale pour le problème suivant*

$$\begin{cases} \quad y'(t) = 4 + y(t), \\ u(0) = 1, \end{cases} \tag{1.5}$$

Calculer explicitement cette solution et donner le domaine de définition

Exercice 1.2. *Même questions de l'exercice 1.1 pour le problème*

$$\begin{cases} \quad y'(t) = (y(t))^{\frac{8}{3}}, \\ u(0) = 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

Exercice 1.3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par* $f(t,x) = 4\frac{t^3 x}{t^4+x^2}$ *si* $(t,x) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$*. On s'intéresse à l'équation différentielle*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.7}$$

1. *L'application* f*, est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ?.*
2. *Soit* φ *une solution de (1.7) qui est définie sur un intervalle* I *ne contenant pas* 0*. On définit une application* ψ *par* $\varphi(t) = t^2\psi, t \in I$*. Déterminer une équation différentielle* (E) *telle que* $\varphi(t)$ *soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation* (E)*.*

1.5 Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 1.1

Il suffit de vérifier les hypothèses de Cauchy-Lipschitz :

La fonction $y \longmapsto f(y)$ est de classe C^1 pour tout $y \in \mathbb{R}0$ et ainsi elle est localement lipcshitzienne.

On a : $y'(t) = 4 + y(t)$. Par séparation de variables on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{4+y} dt &= \int dt \\ \Rightarrow \ln|4 + y(t)| &= t + k, \end{aligned}$$

k une constante a déterminer à l'aide de la condition initiale

$$\begin{aligned} \ln|4+y_0| = t_0 + k \quad &\Rightarrow \quad k = \ln(5) \\ &\Rightarrow \quad |4+y_0| = 5e^t. \end{aligned}$$

Cet égalité donne 2 solution possibles pour le problème :

$y(t) = -5e^t - 4$ ne vérifier pas la condition initiale.

Donc, la seule solution est la fonction

$$y(t) = 5e^t - 4, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.2

Il suffit de vérifier les hypothèses de Cauchy-Lipschitz :

$f(y) = y^{\frac{8}{3}}$ est de classe C^1 pour tout $y \neq 0$ et ainsi elle est localement lipcshitzienne au voisinage de $y_0 = 1$.

Calculons l'unique solution du problème de Cauchy. Car $y \neq 0$ au voisinage de $y_0 = 1$, par séparation de variables on trouve

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{y(t)^{\frac{8}{3}}} dt &= \int_{t_0}^{t} dt \\ &\Rightarrow -\frac{3}{5}(y(t))^{\frac{5}{3}} = t + k \end{aligned}$$

k une constante a déterminer à l'aide de la condition initiale

$$y(0) = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{5},$$

alors

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}(y(t))^{-\frac{5}{3}} &= t - \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow (y(t))^{-\frac{5}{3}} = -\frac{5}{3}t + 1 \\ &\Rightarrow y(t) = \left[-\frac{5}{3}t + 1\right]^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(-\frac{5}{3}t+1\right)^3}}. \end{aligned}$$

avec $t > \frac{3}{5}$, la fonction $y(t)$ elle-même existe pour tout $t \neq \frac{3}{5}$, mais elle la solution du problème uniquement dans l'intervalle $\left\{t \in \mathbb{R}, \text{ tq } t > \frac{3}{5}\right\}$ (contenant la condition initiale).

Corrigé de l'exercice 1.3

$f(t,x) = \frac{4t^3x}{t^4+x^2}$ si $(x,t) \neq (0,0)$ est de classe C^∞ en tant que quotient, somme et produit de fonctions C^∞.

1. $|f(t,x)| = |2t| \cdot \left|\frac{2t^2x}{t^4+x^2}\right| \leq |2t| \underset{(t,x)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$. f est donc continue en $(0,0)$.

   f n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $(0,0)$ car sinon il existerait $k, \alpha\beta \in R$ tels que $t \in \left]-\alpha, \alpha\right[, x \in \left]-\beta, \beta\right[$ et
$$|f(t,x) - f(t,0)| < k\,|x-0|\,.$$
   D'où
$$\begin{aligned} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} &< kx \Rightarrow \frac{4t^3x}{t^4+x^2} < k \\ &\Rightarrow \frac{4}{t} < k, \forall t \in \left]0, \alpha\right[, \end{aligned}$$
   ce qui est absurde.

   Nous ne pouvons pas appliquer Cauchy-Lipschitz.

2. (φ, I) solution de (1.7) avec $0 \neq I$.
$$\psi(t) = t^{-2}\varphi(t) \Rightarrow \psi'(t) = t^{-2}\varphi'(t) - 2t^{-3}\varphi$$
$$\Rightarrow \psi'(t) = 4t^{-2}\frac{t^3\varphi(t)}{t^4+\varphi^2(t)} - 2t^{-1}\psi(t)\,,$$
   d'où en exprimant tout en fonction de $\psi(t)$:
$$\frac{\psi'(t)\,(1+\psi^2(t))}{\psi(t)\,(1-\psi(t))\,(1+\psi(t))} = \frac{2}{t}.$$
   Or
$$\frac{(1+\psi^2(t))}{\psi(t)\,(1-\psi(t))\,(1+\psi(t))} = \frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)},$$
   d'où
$$\psi'(t)\left(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}\right) = \frac{2}{t}.$$

En intégrant par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} \ln\left|\frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)}\right| &= \ln\left|t^2\right| + c \\ &\Rightarrow \frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)} = ct^2. \end{aligned}$$

$\psi(t)$ est donc une racine de l'équation

$$ct^2\psi^2(t) + \psi(t) - ct^2 = 0,$$

donc

$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2}$$

d'où

$$\varphi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}.$$

Chapitre 2

Méthode de différences finies monodimensionnel

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre finis de points discrets.

2.1 Discrétisation du domaine

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. on dit que $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ si,

$x_k \in [a, b]\,, \ \forall\ 0 \leq k \leq N+1$ et vérifiés :

$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_N < x_{N+1} = b.$

Pour $i = 0, ..., N$, on note $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ et on définit le pas du maillage par $h = \max h_{i+\frac{1}{2}}$.

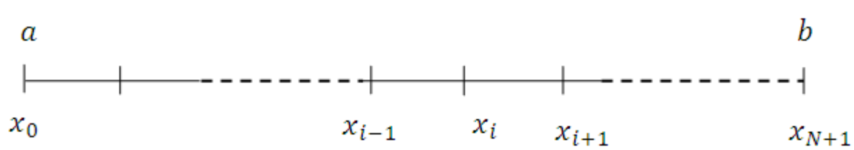

FIGURE 2.1 – Discrétisation du domaine en dimension 1.

2.2 Principe de la méthode de différences finies

Le principe de la méthode de différences finies (DF) consiste à se donner un certain nombre de points du domaine, qu'on notera, $(x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. On approche l'opérateur différentiel par un quotiont de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnus discrétes représenter des approximation d'inconnu u aux points de discrétisation.

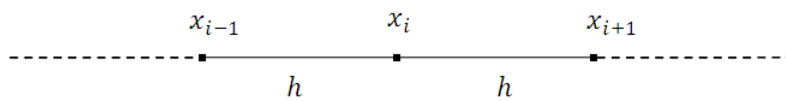

FIGURE 2.2 – Points médians de la grille.

Effectuont d'abord un développement de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = u(x_i) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o\left(h^3\right), \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i - h) = u(x_i) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o\left(h^3\right). \end{aligned}$$

La soustraction de ces deux relation donne

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o\left(h^3\right). \tag{2.1}$$

On note $u_i = u(x_i), \forall i = 0, ..., N+1$. La relation (2.1) devient

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o\left(h^3\right).$$

Ce qui permet d'obtenire le schéma d'ordre 2 (centré) pour approximer la dérivée première de u en x_i

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o\left(h^2\right). \tag{2.2}$$

Effectuons un développement de Taylor au voisinage de x_i d'ordre 4,

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = u(x_i) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o\left(h^4\right), \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i - h) = u(x_i) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o\left(h^4\right). \end{aligned}$$

En faisant la somme de deux égalités, on aboutit à

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o\left(h^4\right).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux pour approximer la dérivée second de u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + o\left(h^2\right). \tag{2.3}$$

Autres schémas d'approximation : D'aprés le développement de Taylor au voisinage de x_i, on a

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o\left(h^2\right) \\ &\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + o(h), \end{aligned}$$

un schéma decentré avons $(S.D.A_v)$.

Si on utilise le point $u(x_{i-1})$:

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &= u(x_i) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o\left(h^2\right) \\ &\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + o(h), \end{aligned}$$

schéma decentré arrière $(S.D.A_r)$.

2.3 Exemple simple en dimension 1 avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in [0,1], \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

(conditions de Dirichlet non homogènes)

f : une fonction continue.

Le maillage est construit en introduisant $N+2$ points (noeds) x_i avec $i = 0, ..., N+1$, régulièrement espacés avec un pas h, la quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au noed x_i.

En utilisant l'approximation de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au moyen d'un schéma centré d'ordre 2, est ainsi

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=f_i,\ pour\ i=1,...,N,$$

où $f_i=f\left(x_i\right).$

La dernière expression représente un système de N équations et inconnus peut s'écrire sous forme d'un système comme suit :

$$\begin{cases} i=1: & \frac{1}{h^2}\left(-u_0+2u_1-u_2\right)=f_1, & \left(u_0=u\left(0\right)=\alpha\right) \\ i=2: & \frac{1}{h^2}\left(-u_1+2u_2-u_3\right)=f_2, & \\ i=3: & \frac{1}{h^2}\left(-u_2+2u_3-u_4\right)=f_3, & \\ \vdots & & \\ i=N-1: & \frac{1}{h^2}\left(-u_{N-2}+2u_{N-1}-u_N\right)=f_{N-1}, & \\ i=N: & \frac{1}{h^2}\left(-u_{N-1}+2u_N-u_{N+1}\right)=f_N, & \left(u_{N+1}=u\left(1\right)=\beta\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

La forme matricielle

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1+\frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N+\frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}.$$

2.4 Discrétisation de conditions aux limites

Considérons le même problème avec conditions mixtes de Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -u''\left(x\right)=f\left(x\right),x\in\left[0,1\right], \\ u\left(0\right)=\alpha,u'\left(1\right)=\beta. \end{cases}$$

Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes :

- Tout d'abord, le nombre d'inconnus a changé, $N+1$ inconnus u_i pour i variant de 1 à $N+1$.

- D'autre part, il faut discrétiser la condition de Neumann $u'(1) = \beta$:

Utilisons l'approximation décentré arrière d'ordre 1

$$u'(1) = u'(x_{N+1}) = \frac{u_{N+1} - u_N}{h}.$$

Sous forme matricielle :

En ajoutant l'équation $\frac{1}{h}(u_{N+1} - u_N) = \beta$ au système (2.4), on obtient

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_N \\ \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}.$$

2.5 Exemple 2

Soit le problème aux limites elliptique suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + x^2 u(x) = f(x), x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où $f \in C([0,1], \mathbb{R})$.

On se donne un pas du maillage $h = \dfrac{1}{N+1}$ est une subdivision de $]0,1[$, notée $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ avec :

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_N < x_{N+1} = 1.$$

En approchant $u''(x_i)$ par quotient différentiel par développement de Taylor, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + x_i^2 u_i = f_i, \ i = 1, ..., N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases},$$

où u_i est l'inconnue discrète associée au noeud i $(i = 0, ..., N+1)$, on pose $u_0 = u_{N+1} = 0$, $x_i = ih \Rightarrow x_i^2 = (ih)^2$, $f_i = f(x_i)$.

On peut écrire ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}\left(-u_{i-1}+(2+h^2x_i^2)u_i-u_{i+1}\right)=f_i,\ 1\leq i\leq N, \\ u_0=u_{N+1}=0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Pour } i=1: &\quad \frac{1}{h^2}\left(-u_0+(2+h^4)u_1-u_2\right)=f_1, \qquad (u_0=0)\,,\\
i=2: &\quad \frac{1}{h^2}\left(-u_1+(2+4h^4)u_2-u_3\right)=f_2,\\
i=3: &\quad \frac{1}{h^2}\left(-u_2+(2+9h^4)u_3-u_4\right)=f_3,\\
\vdots &\\
i=N: &\quad \frac{1}{h^2}\left(-u_{N-1}+(2+N^2h^4)u_N-u_{N+1}\right)=f_N,\ \ (u_{N+1}=0)\,.
\end{aligned}$$

On peut écrire sous forme matricielle $A_hu_h=b_h$, avec

$$A_h=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+h^4 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2+4h^4 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2+9h^4 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2+N^2h^4 \end{bmatrix},\ u_h=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix},\ b_h=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}.$$

2.6 Problème d'évolution

Considérons le problème monodimensionnel de la chaleur dans une barre de 1 mettre de longueur le champ de température $T\,(x,t)$ vérifie l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t}-\alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0,\ \ x\in\,]0,1[\,,\ \ t\in\,]0,T[\,, \\ T\,(0,t)=T_g, \\ T\,(1,t)=T_d, \\ T\,(x,0)=T_0. \end{cases}$$

L'intervalle $[0,1]$ est discrétisé en $N+1$ noeuds de coordonnées x_i, $i=0,...,N+1$.

h : le pas de discrétisation (uniforme) de l'espace.

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt, telque $\Delta t = \frac{T}{M}$.

Notons T_i^n la température au noeud $x_i = ih$ et à l'instant $t_n = n\Delta t$.

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation :

2.6.1 Schéma explicite

Utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'instant courante t_n :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_n) = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}, \quad \text{(schéma décentré avons)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}.$$

Alors, l'équation discrétisée est donnée par

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} = 0, \;\; i = 1, ..., N; \;\; n = 0, ..., M-1,$$

ou

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{h^2} T_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{h^2}\right) T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{h^2} T_{i-1}^n, \;\; i = 1, ..., N; \;\; n = 0, ..., M-1.$$

On pose $\lambda = \dfrac{\alpha \Delta t}{h^2}$, avec $T_0^n = T_g$, $T_{N+1}^n = T_d$.

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \\ T_3^{(n+1)} \\ T_4^{(n+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \\ T_4^{(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^{(n)} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_d \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{bmatrix} T_1^0 \\ T_2^0 \\ T_3^0 \\ T_4^0 \\ \vdots \\ T_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ T_0 \\ T_0 \\ \vdots \\ T_0 \end{bmatrix}.$$

(Car $T(x,0) = T_0$ ou $T_i^0 = T_0,\ i = 1, N$).

On peut calculer le vecteur $T^{(n+1)}$ à partire de $T^{(n)}$ explicitement.

2.7 Schéma implicite

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

L'équation discrètisée est donnée par

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{h^2}$, on obtient

$$(1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1} - \lambda T_{i-1}^{n+1} = T_i^n,\ \ i = 1, ..., N;\ \ n = 0, ..., M - 1.$$

On constate que les inconnus a l'itération $n + 1$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{(n+1)} \\ T_2^{(n+1)} \\ T_3^{(n+1)} \\ T_4^{(n+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \\ T_4^{(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^{(n)} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_d \end{bmatrix}.$$

2.8 Convergence, consistance et stabilité

2.8.1 Définitions

Supposons le problème suivant avec L un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 en t

$$\begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = \phi(x), \text{ pour } x \in \Omega \text{ (ouvert de } \mathbb{R}). \end{cases} \tag{2.5}$$

En remplaçant les dérivées partielles par des différences finies on obtient un opérateur discret $L_{h,k}$. Ainsi l'équation aux dérivées partielles homogène discrétisée s'écrit sous la forme $L_{h,k}v = 0$ (h le pas de l'espace, k le pas du temps). Un schéma aux différences finies général associée à l'équation (2.5) s'écrit donc comme suit

$$L_{h,k}v = f_i^n.$$

La condition initiale est simplement $v_m^0 = \phi(x_m)$ pour $x_m \in \Omega$.

Définition 12. *(Consistance)*
On dit que le schéma $L_{h,k}v = f_i^n$ est consistant avec l'équation aux dérivée partielles (2.5) si pour toute fonction φ de classe C^∞, on a :
En tout point (x_i, t_n)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (L\varphi - L_{h,k}\varphi) = 0.$$

La consistance entraine en particulier qu'une solution régulière de l'équation aux dérivées partielles est une solution du schéma aux différences finies quand le pas de discrétisation tendent vers 0.

Cette propriétés est facile à vérifier.

Considérons par exemple :

$$L\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Donc

$$L_{h,k}\varphi = \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h}.$$

Grâce à la formule de Taylor

$$\varphi_{i+1}^n = \varphi\left(x_i + h, t_n\right) = \varphi_i^n + h\varphi_x\left(x_i, t_n\right) + o\left(h^2\right),$$

$$\Longrightarrow \varphi_x\left(x_i, t_n\right) = \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} + o\left(h\right),$$

et

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi\left(x_i, t_n + k\right) = \varphi_i^n + k\varphi_t\left(x_i, t_n\right) + o\left(k^2\right)$$

$$\Longrightarrow \varphi_t\left(x_i, t_n\right) = \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + o\left(k\right).$$

On en déduit que

$$L_{h,k}\varphi = \varphi_t\left(x_i, t_n\right) + c\varphi_x\left(x_i, t_n\right) + o\left(h\right) + o\left(k\right).$$

Donc

$$L\varphi - L_{h,k}\varphi = o\left(h\right) + o\left(k\right) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Où d'autre manière :

L'équation continue

$$\varphi_t\left(x_i, t_n\right) + c\varphi_x\left(x_i, t_n\right) = f\left(x_i\right) \Leftrightarrow \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} + o\left(h\right) + o\left(k\right) = f_i.$$

L'équation discrète

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = f_i.$$

Alors, l'erreur de consistance est donnée par

$$\begin{aligned}
E_{consistance} &= \text{L'équation continue –L'équation discrète} \\
&= \frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{k} + c\frac{\varphi_{i+1}^n-\varphi_i^n}{h} + o(h) + o(k) - f_i - \frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{k} - c\frac{\varphi_{i+1}^n-\varphi_i^n}{h} + f_i \\
&= o(h) + o(k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Définition 13. *(Ordre du schéma)*
On dit qu'un schéma de discrétisation a N points est d'ordre p s'il existe $c \in \mathbb{R}$ ne dépend que de la solution exacte, telque l'erreur de consistance satisfait

$$\max_{i=1,\dots,N} |R_i| \leq ch^p.$$

Définition 14. *(Stabilité)(au sens L^2) Le schéma aux différences finies $L_{h,k}v = 0$ associé à l'équation aux dérivées partielles $Lu = 0$ est **stable** s'il existe $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$, avec $(0,0) \in \Lambda$ telque*

$$h\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |v_i^n|^2 \leq C_T \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left|v_i^0\right|^2$$

pour tout $0 \leq t_n \leq T$ et $(h,k) \in \Lambda$.

Remarque 2.

1. *La définition utilise une norme sur l'espace $L^2(h\mathbb{Z})$,*
   $(v_i^n)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $L^2(h\mathbb{Z})$,
   $\|v^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} = \left(h\sum |v_i^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est finie,
   Le critère de stabilité s'écrit alors, pour tout h et k suffisament petits dans Λ
   $\forall T > 0, \exists C_T > 0, \forall t_n \in [0,T]$

$$\|v^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} \leq C_T\|v^0\|_{L^2(h\mathbb{Z})}.$$

2. *La stabilité garantit qu'à chaque instant $t_n \in [0,T]$, la norme de la solution discrète est **bornée**, à un facteur constant prés, par la norme des donnés initiales.*

Définition 15. *Soit $u(x,t)$ la solution de (2.5) et v une solution du schéma discrèt $L_{h,k}v = f_i^n$ telle que v_i^0 converge vers $\phi(x)$ quand x_i tendand vers x.*
On dit que le schéma aux différences finies $L_{h,k}$ est un schéma convergent si v_i^n converge vers $u(x,t)$ quand (x_i,t_n) converge vers (x,t) pour (h,k) tendant vers $(0,0)$ c'est-à-dire la solution d'un schéma aux différences finies converge vers la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles.

Remarque 3. *La consistance est une condition nécessaire de convergence mais n'est pas une condition suffisante.*

2.9 Etude de l'équation de la chaleur en dimension 1

On considère le problème de la chaleur en dimension 1 suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \; x \in \left]0,1\right[, t \in \left]0,T\right[, \\ u(x,0) = u_0(x), \; \forall x \in \left]0,1\right[, \\ u(0,) = u(1,t) = 0, \; \forall t \in \left]0,T\right[. \end{cases} \tag{2.6}$$

$u(x,t)$: La température.
x : Point d'espace.
t : Le temps.

Théorème 5. *(Existence et unicité)*
Si $u_0 \in C^2(\left]0,1\right[;\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution $u \in C^2(\left]0,1\right[\times \left]0,T\right[;\mathbb{R})$ qui vérifie (2.6).
Si $u_0 \in C^\infty(\left]0,1\right[;\mathbb{R})$, ceci appelé effet "régularisant" de l'équation de la chaleur.

2.9.1 Principe du maximum

Sous les hypothèses du théorème précédent, soit u la solution du problème (2.6). Si $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$, alors $u(x,t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et $x \in]0,1[$.

2.9.2 Discrétisation du problème

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points t_n, $n = 0, \ldots, M$ de l'intervalle $[0, T]$ et un ensemble de points x_i, $i = 0, \ldots, N+1$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace.

Soit $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discrétisation en espace et $k = \frac{T}{M}$ le pas de discrétisation en temps.

On pose : $t_n = nk$ pour $n = 0, \ldots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \ldots, N+1$. Les inconnus discrètes sont notées : u_i^n, $i = 1, ..., N$, $n = 1, ..., M$.

L'approximation en temps par la méthode d'Euler explicite consiste à écrire la première équation de (2.6) en chaque point x_i et en temps t_n.

$u_t\left(x_i, t_n\right)$ est approché par le quotient différentiel

$$\frac{u\left(x_i, t_{n+1}\right) - u\left(x_i, t_n\right)}{k},$$

et $-u_{xx}\left(x_i, t_n\right)$ par

$$\frac{1}{h^2}\left(2u\left(x_i, t_n\right) - u\left(x_{i+1}, t_n\right) - u\left(x_{i-1}, t_n\right)\right).$$

On obtient le schéma suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \dfrac{1}{h^2}\left(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = 0, \ i = 1, ..., N; \ n = 0, ..., M-1, \\ u_i^0 = u_0\left(x_i\right), \ i = 1, ..., N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \ n = 1, ..., M. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.9.3 Consistance du schéma

Soit $\bar{u}_i^n = u\left(x_i, t_n\right)$ la valeur exacte de la solution en x_i et t_n. l'erreur de consistance R_i^n en (x_i, t_n) peut s'écrire comme des erreurs de consistance en temps et en espace

$$R_i^n = \hat{R}_i^n + \tilde{R}_i^n,$$

avec

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - u_t\left(x_i, t_n\right) \ \text{ et } \ \hat{R}_i^n = \frac{2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h^2} - u_{xx}\left(x_i, t_n\right).$$

Proposition 1. *Le schéma (2.7) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ ne dependant que de u telque*

$$\left|R_i^n\right| \leq c\left(k + h^2\right).$$

Démonstration. Grace à la formule de Taylor pour les deux termes de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}
R_i^n &= \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} - u_t\left(x_i,t_n\right) + \frac{2u_i^n-u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{h^2} - u_{xx}\left(x_i,t_n\right) \\
&= \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} - \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} + o\left(k\right) \\
&\quad + \frac{2u_i^n-u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{2u_i^n-u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{h^2} + o\left(h^2\right) \\
&= o\left(k\right) + o\left(h^2\right) \leq c\left(k+h^2\right) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Le schéma est consistant. $\square$

2.9.4 Stabilité du schéma

D'aprés la proposition précédente la solution exacte vérifie

$$\|u^n\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T[)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}.$$

Si on choisi correctement le pas d'espace, nous allons voir qu'en avoir l'équivalent discret sur la solution.

Définition 16. *On dit qu'un schéma est L^∞-stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas du maillage.*

Proposition 2. *Si la condition de stabilité $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ est vérifiée alors, le schéma (2.7) est L^∞-stable au sens où*

$$\sup_{\substack{i=1,\dots,N\\ n=1,\dots,M}} \left|u_i^{(n)}\right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1[)}.$$

Démonstration. On peut écrire le schéma (2.7) sous la forme

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \lambda\left(2u_i^{(n)} - u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}\right).$$

Soit encore

$$u_i^{(n+1)} = \left(1-2\lambda\right)u_i^{(n)} + \lambda u_{i+1}^{(n)} + \lambda u_{i-1}^{(n)}. \tag{2.8}$$

Si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, on a $\lambda \geq 0$ et $(1-2\lambda) \geq 0$, (2.8) est donc une combinaison convexe de $u_i^{(n)}, u_{i+1}^{(n)}$ et $u_{i-1}^{(n)}$.

Soit $M^{(n)} = \max\limits_{i=1,\dots,N} u_i^{(n)}$, on a alors

$$u_i^{(n+1)} \leq \left(1-2\lambda\right)M^{(n)} + \lambda M^{(n)} + \lambda M^{(n)}$$

et donc

$$u_i^{(n+1)} \leq M^{(n)}, \forall i = 1, ..., N \Longrightarrow \max_{i=1,\ldots,N} u_i^{(n+1)} \leq \max_{i=1,\ldots,N} u_i^{(n)}.$$

On montre de la même manière que

$$\min_{i=1,\ldots,N} u_i^{(n+1)} \geq \min_{i=1,\ldots,N} u_i^{(n)}.$$

On en déduit par récurrence

$$\max_{i=1,\ldots,N} u_i^{(n+1)} \leq \max_{i=1,\ldots,N} u_i^{(0)}$$

et

$$\min_{i=1,\ldots,N} u_i^{(n+1)} \geq \min_{i=1,\ldots,N} u_i^{(0)}.$$

Alors

$$\max_{i=1,\ldots,N} \left|u_i^{(n+1)}\right| \leq \max_{i=1,\ldots,N} \left|u_i^{(0)}\right|.$$

C'est-à-dire

$$\|u^{(n+1)}\|_\infty \leq \|u^{(0)}\|_\infty.$$

$\square$

2.10 Convergence

Définition 17. *Soit u la solution du problème (2.6) et $\left(u_i^{(n)}\right)_{\substack{i=1,\ldots,N\\ n=1,\ldots,M}}$ la solution du schéma (2.7), on appelle erreur de discrétisation au points (x_i, t_n) la quantité*

$$e_i = u\left(x_i, t_n\right) - u_i^{(n)}.$$

(Solution exacte $-$ solution approchée au point (x_i, t_n)).

Théorème 6. *Sous les hypothèses du théorème 5 (d'existence et unicité) et sous la condition de stabilité il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ ne dépend que de u telque*

$$\|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + Tc\left(k + h^2\right),$$

pour tout $i = 1, ..., N$, $n = 0, ..., M-1$.

Ainsi que si $\|e^{(0)}\|_\infty = 0$. Alors

$$\max_{i=1,\dots,N} \left| e_i^{(n+1)} \right| = \|e^{(n+1)}\|_\infty \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

pour tout $n = 0, ..., M-1$.

Le schéma est converge.

Démonstration. On note $\tilde{u}_i^{(n)} = u\left(x_i, t_n\right)$. On a donc, par définition de l'erreur de consistance

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}\left(2\tilde{u}_i^n - \tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n\right) = R_i^n, \ i = 1, ..., N;\ n = 0, ..., M-1, \tag{2.9}$$

D'autre part le schéma numérique s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}\left(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = 0, \ i = 1, ..., N;\ n = 0, ..., M-1, \tag{2.10}$$

(2.9)−(2.10) donne

$$\begin{aligned} &\frac{(\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}) - (\tilde{u}_i^n - u_i^n)}{k} + \frac{1}{h^2}\left(2(\tilde{u}_i^n - u_i^n) - (\tilde{u}_{i+1}^n - u_{i+1}^n) - (\tilde{u}_{i-1}^n - u_{i-1}^n)\right) = R_i^n \\ &\Longrightarrow \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}\left(2e_i^n - e_{i+1}^n - e_{i-1}^n\right) = R_i^n. \end{aligned}$$

Soit donc

$$e_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)\, e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n + kR_i^n.$$

Or

$$\left|(1 - 2\lambda)\, e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n\right| \leq \max_{i=1,\dots,N} |e_i^n| = \|e^{(n+1)}\|_\infty,$$

donc, comme le schéma est consistant

$$\begin{aligned} \left|e_i^{n+1}\right| &= \left|(1 - 2\lambda)\, e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n + kR_i^n\right| \\ &\leq \max_{i=1,\dots,N} |e_i^n| + kc\left(k + h^2\right) \\ &\Longrightarrow \|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(n)}\|_\infty + kc\left(k + h^2\right). \end{aligned}$$

Par récurrence

$$\Longrightarrow \|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + Mkc\left(k + h^2\right),\ (Mk = T).$$

$(e^{(0)} = 0)$. □

2.11 Méthode de différences finies pour un problème elliptique

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $c \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, qui peut modéliser par exemple un phénomène de diffusion-réaction d'une espèce chimique. On se donne un pas du maillage constant $h = \frac{1}{N+1}$ et une subdivision de $[0,1]$, notés $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ avec

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_N < x_{N+1} = 1.$$

En approchant $u''(x_i)$ par quotient différentiel en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + c_i u_i = f_i, \ i = 1, ..., N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où :

u_i est l'inconnue discrète associée au noeud i, $i = 0, ..., N+1$, on pose $u_0 = u_{N+1} = 0$.

$c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

On peut écrire ces équations sous la forme matricielle

$$A_h U_h = b_h. \tag{2.13}$$

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2+c_3h^2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2+c_Nh^2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

et

$$u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \; b_h = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}.$$

Questions

1. Le système (2.13) admet-il une unique solution ?.
2. A-t-on convergence de u vers u et en quel sens ?.

Définition 18. *Une matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,M}}$ *est dite :*

1. *Symétrique si* $A^t = A$.
2. *Définie positive si*

$$\forall v = (v_1, v_2, ..., v_N) \in \mathbb{R}^N, \; v^t A v \geq 0.$$

Proposition 3. *Soit* $c = (c_1, c_2, ..., c_N) \in \mathbb{R}^N$ *telque* $c_i \geq 0$ *pour* $i = 1, ..., N$*, alors la matrice* A_h *définie par (2.14) est symétrique définie positive et donc inversible.*

Démonstration. La matrice A_h est évidement symétrique.
Montrons qu'elle est définie positive, soit $v = (v_1, v_2, ..., v_N)$, on pose $v_0 = v_{N+1} = 0$.
Calculons le produit $v^t A_h v$.

$v^t A_h v$

$$
= \frac{1}{h^2}\left(v_1, v_2, ..., v_N\right)\begin{bmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2+c_3h^2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2+c_Nh^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{h^2}\left(v_1, v_2, ..., v_N\right)\begin{bmatrix} \left(2+c_1h^2\right)v_1 - v_2 \\ -v_1 + \left(2+c_2h^2\right)v_2 - v_3 \\ -v_2 + \left(2+c_3h^2\right)v_2 - v_4 \\ -v_3 + \left(2+c_4h^2\right)v_3 - v_5 \\ \vdots \\ -v_{N-2} + \left(2+c_{N-1}h^2\right)v_{N-1} - v_N \\ -v_{N-1} + \left(2+c_Nh^2\right)v_N \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2}\Big[\left(2+c_1h^2\right)v_1^2 - v_1v_2 \\
&\quad - v_1v_2 + \left(2+c_2h^2\right)v_2^2 - v_2v_3 \\
&\quad - v_2v_3 + \left(2+c_2h^2\right)v_3^2 - v_3v_4 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad - v_{N-2}v_{N-1} + \left(2+c_2h^2\right)v_{N-1}^2 - v_{N-1}v_N \\
&\quad -v_{N-1}v_N + \left(2+c_2h^2\right)v_N^2\Big],
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
v^t A_h v &= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N} v_i\left(-v_{i-1} + \left(2+c_2h^2\right)v_i - v_{i+1}\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}\left(-v_{i-1}v_i\right) + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}\left(2+c_2h^2\right)v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}\left(-v_iv_{i+1}\right).
\end{aligned}
$$

On a donc, par un changement d'indice

$$v^t A_h v = \frac{1}{h^2}\left[\sum_{i=1}^{i=N}(-v_{i-1}v_i) + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}\left(2+c_2h^2\right)v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=2}^{i=N+1}(-v_{j-1}v_j)\right].$$

et comme on a posé $v_0 = 0$ et $v_{N+1} = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
v^t A_h v &= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}\left(2+c_2h^2\right)v_i^2 - \frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}(v_{i-1}v_i)\\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}c_iv_i^2 - \frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}(v_{i-1}v_i)\\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=2}^{i=N+1}v_{i-1}^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}c_iv_i^2 - \frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}(v_{i-1}v_i)\\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}c_iv_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}v_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}v_{i-1}^2 - \frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}(v_{i-1}v_i) + v_N^2\\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}c_iv_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}\left[v_i^2 + v_{i-1}^2 - 2(v_{i-1}v_i)\right] + v_N^2\\
&= \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}c_iv_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}(v_i - v_{i-1})^2 + v_N^2 \geq 0, \quad \forall v = (v_1, v_2, ..., v_N).
\end{aligned}$$

Remarque 4. *Si on pose $v^t A_h v = 0$, on a alors,*

$$\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{i=N}c_iv_i^2 = 0 \;\; et \;\; (v_i - v_{i-1}) = 0, \;\; \forall i = 1, ..., N,$$

on a donc $v_1 = v_2 = ... = v_N = v_0 = v_{N+1} = 0$. Remarquons que ces égalité sont vérifiés même si les c_i sont nuls. Ceci démontre que la matrice A_h est bient définie.

□

2.11.1 Existence et unicité de la solution

On a montré ci-dessus que A_h est symétrique définie positive, donc inversible, ce qui entraine l'existence et l'unicité de la solution de (2.13).

Définition 19. *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de coefficients (a_{ij}), $i = 1, ..., N$ et $j = 1, ..., N$.*

1. *On dit que A est positive (ou $A \geq 0$) si $a_{ij} \geq 0$, , $\forall i, j = 1, ..., N$.*

2. On dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

L'avantage des schémas a matrices monotones est de satisfaire la propriétés de conservation de positivité, qui peut être cruciale dans les applications physiques.

Définition 20. *On dit que A est conserve la positivité si*

$$Av \geq 0, \ , \forall v = (v_1, v_2, ..., v_N) \in \mathbb{R}^N \Longrightarrow v \geq 0.$$

On a en effet la proposition suivante

Proposition 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Alors :*

$$A \text{ conserve la positivité } \Longleftrightarrow A \text{ est monotone.}$$

Démonstration.
$\Longrightarrow$? Supposons d'abord que A conserve la positivité, et montrons que A est inversible et que A^{-1} a coefficients positive (≥ 0).
Si x est telque $Ax = 0$. Alors $Ax \geq 0$ soit par hypothèse $x \geq 0$, Mais on a aussi $Ax \leq 0$, alors $A(-x) \geq 0$ et donc $-x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 0$.
On en déduit que $x = 0$, ce qui prouve que A est inversible.
La conservation de positivité donne alors que $y \geq 0 \Longrightarrow A^{-1}y \geq 0$, En prenant $y = e_1$, $(e_1 = (1, 0, \ldots, 0))$ on obtient $A^{-1}e_1 \geq 0$ c'est-à-dire la première colonne de la matrice A est positive. Puis en prenant $y = e_i$ on obtient que la *i-ème* colonne de A^{-1} est positive pour $i = 2, 3, \ldots, N$, donc A^{-1} est positive.
$\Longleftarrow$? Réciproquement supposons maintenant que A est inversible et que A^{-1} à des coefficients positifs. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ telque $Ax = y \geq 0$, alors $x = A^{-1}y \geq 0$. Donc A conserve la positivité. □

Remarque 5. *(Principe du maximum)*
On appelle le principe du maximum contenu le fait que si $f \geq 0$ alors le minimum de la fonction u solution du problème (2.11) est atteint sur les bords.

Lemme 1. *Soit $c = (c_1, c_2, ..., c_N) \in \mathbb{R}^N$ et $A_h \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ définie par (2.14). Si $c_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., N$, alors la matrice A_h est monotone.*

Démonstration. On va montrer que $A_h v \geq 0 \Longrightarrow v \geq 0$.

Posons $v_0 = v_N = 0$, supposons que $A_h v \geq 0$, on a donc

$$-\frac{1}{h^2}v_{i-1} + \left(\frac{2}{h^2} + c_i\right) v_i - \frac{1}{h^2}v_{i+1} \geq 0, \; i = 1, ..., N.$$

Soit $p = \min \left\{ i \in \{1, ..., N\} \,; v_i = \min\limits_{j=1,...,N} v_j \right\}$. Supposons que $\min\limits_{j=1,...,N} v_j < 0$, on a alors $p \geq 1$ et

$$\frac{1}{h^2}(v_p - v_{p-1}) + c_p v_p + \frac{1}{h^2}(v_p - v_{p+1}) \geq 0.$$

On en déduit que

$$c_p v_p \geq \frac{1}{h^2}(v_{p-1} - v_p) + \frac{1}{h^2}(v_{p+1} - v_p) \geq 0.$$

Si $c_p > 0$, on a donc $v_p \geq 0$ et donc $v_i \geq 0$, $\forall i$, (contradiction).

Si $c_p = 0$, on a donc $v_p = v_{p+1} = v_{p-1}$ ce qui est impossible car p est le plus petit indice i telque $v_i = \min\limits_{j=1,...,N} v_j$. Donc dans ce cas le minimum ne peut pas être atteint pour $j = p > 1$. On a ainssi finalement montré que $\min\limits_{j=1,...,N} v_j \geq 0$, on a donc $v \geq 0$. □

2.11.2 Erreur de consistance

Définition 21. *On appelle erreur de consistance la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique. Dans le cas du schéma (2.12) l'erreur de consistance au point x_i est donc définie par*

$$R_i = \frac{1}{h^2}\left(2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})\right) + c_i u(x_i) - f(x_i) = 0.$$

L'erreur de consistance R_i est donc l'erreur qu'on connait en remplaçant l'operateur $-u''$ par le quotient différentiel

$$-\frac{1}{h^2}\left(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})\right).$$

Cette erreur peut être évaluer si u est suffisamment régulière en effectuant des développements de Taylor.

Lemme 2. *Si la solution de (2.11) vérifie $u \in C^4([0,1])$, alors le schéma (2.12) est consistant d'ordre 2 et on a plus précisément*

$$R_i \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} \left| u^{(4)} \right| .$$

Démonstration. Par développement de Taylor

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i), \ x_i < \xi_i < x_{i+1}, \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i) + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i), \ x_{i-1} < \xi_{i-1} < x_i. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient que

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})\right) = u''(x_i) + \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1})\right).$$

Ce qui entraîne que

$$R_i = \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1})\right) \leq \frac{h^4}{24} \sup_{[0,1]} \left| u^{(4)} \right| .$$

□

2.11.3 Stabilité

Proposition 5. *On dit que le schéma (2.12) est stable, au sens où la norme infinie de la solution approchée est bornée par un nombre ne dépendant que de f. Plus précisément, la matrice A_h satisfait*

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8},$$

inégalité qui peut aussi s'écrire comme une estimation sur les solutions du système (2.13)

$$\|U_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty.$$

Démonstration. On rappelle que par définition, si $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

$$\|M\|_\infty = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ v \neq 0}} \frac{\|Mv\|_\infty}{\|v\|_\infty}, \quad \text{avec } \|v\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |v_i| .$$

Pour montrer que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}$, on décompose la matrice A_h sous la forme $A_h = A_{oh} + diag(c_i)$ où A_{oh} est la matrice de discrétisation de l'opérateur $-u''$ avec conditions aux limites de Direchlet homogènes et $diag(c_i)$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux c_i.

$$A_{oh} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \text{ et } c_i = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & c_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_N \end{bmatrix}.$$

Les matrice A_{oh} et A_h sont inversible et on a

$$A_{oh}^{-1} - A_h^{-1} = A_{oh}^{-1} A_h A_h^{-1} - A_{oh}^{-1} A_{oh} A_h^{-1} = A_{oh}^{-1} \left(A_h - A_{oh}\right) A_h^{-1},$$

comme $A_h - A_{oh} = diag(c_i) \geq 0$, on a $A_h \geq A_{oh}$ et comme A_h et A_{oh} sont monotones, on en déduit que

$$0 \leq A_h^{-1} \leq A_{oh}^{-1}, \ \text{(composante par composante).}$$

On peut maintenant remarquer que si $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, et si $B \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|B\|_\infty &= \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ \|v\|_\infty = 1}} \sup_{i=1,\dots,N} |(Bv)_i| \\ &= \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ \|v\|_\infty = 1}} \sup_{i=1,\dots,N} \left| \sum_{j=1}^{N} B_{ij} v_j \right| \\ &= \sup_{i=1,\dots,N} \left| \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \right|. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,N} \left| \sum_{j=1}^{N} \left(A_h^{-1}\right)_{ij} \right| \leq \sup_{i=1,\dots,N} \left| \sum_{j=1}^{N} \left(A_{oh}^{-1}\right)_{ij} \right| \quad (A_h^{-1} \leq A_{oh}^{-1}),$$

d'où en déduit que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|A_{oh}^{-1}\|_\infty$.

Il ne reste plus qu'à estimer $\|A_{oh}^{-1}\|_\infty$. Comme $A_{oh}^{-1} \geq 0$, on a

$$\|A_{oh}^{-1}\|_\infty = \|A_{oh}^{-1} e\|_\infty \ \text{ avec } \ e = (1, 1, \dots, 1)\,.$$

Soit $d = A_{oh}^{-1}e \in \mathbb{R}^N$. On veut calculer $\|d\|_\infty$, où d vérifie $A_{oh}d = e$. Or le système linéaire $A_{oh}d = e$ n'est autre que la discrétisation par différences finies du problème

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, \;\; x \in \left]0,1\right[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

dont la solution exacte est $u_0(x) = \frac{x(1-x)}{2}$ qui vérifie $u_0^{(4)}(x) = 0$. On en conclut que $u_0(x_i) = d(i),\ \forall i = 1, ..., N$.
Donc $\|d\|_\infty = \sup \frac{ih(ih+1)}{2}$ où $h = \frac{1}{N+1}$ est le pas de discrétisation. Ceci entraine que

$$\|d\|_\infty \leq \sup_{[0,1]} \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| = \frac{1}{8},$$

et donc que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

□

2.11.4 Convergence

Définition 22. *On appelle erreur de discrétisation en x_i, la différence entre la solution exacte en x_i et la i-ème composante de la solution donnée par le schéma numérique*

$$e_i = u(x_i) - u_i, \;\; \forall i = 1, \ldots, N. \tag{2.15}$$

Théorème 7. *Soit u la solution exacte de*

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = f(x), \;\; x \in \left]0,1\right[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On suppose $u \in C^4([0,1])$. Soit U_h la solution de (2.12). Alors l'erreur de discrétisation définie par (2.15) satisfait

$$\max_{i=1,\ldots,N} |e_i| \leq \frac{h^2}{96}\|u^{(4)}\|_\infty.$$

Le schéma donc est convergent d'ordre 2.

Démonstration. Soit $U_h = (u_1, u_2, ..., u_N)$ et $\tilde{U}_h = (u(x_1), u(x_2), ..., u(x_N))$, on cherche à majorer $\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty$.
On a $A\left(\tilde{U}_h - U_h\right) = R$ où R est l'ereur de consistance. On a donc

$$\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty \leq \frac{1}{8} \times \frac{1}{12}\|u^{(4)}\|_\infty = \frac{1}{96}\|u^{(4)}\|_\infty.$$

□

2.12 Schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur

Précédemment on a évoqué deux schémas classiques pour l'équation de la chaleur, Euler explicite et Euler implicite. Considérons l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} u_t\left(x\right) - \alpha u_{xx}\left(x,t\right) = f\left(x,t\right), & (x,t) \in \left]0,1\right[\times \left]0,T\right[, \\ u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0, & t \in \left]0,T\right[, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), & x \in \left]0,T\right[. \end{cases} \tag{2.16}$$

Euler explicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f_i^n.$$

Euler implicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}.$$

Ces schémas sont conditionnellement stables et sont d'ordre 1 en temps et 2 en espace.
L'idée du schéma de Crank-Nicolson est le choisir une sorte de moyenne entre Euler explicite et Euler implicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha\left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}\right] = \frac{f_i^n + f_i^{n+1}}{2}. \tag{2.17}$$

Que l'on peut écrire de manière matricielle

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + \frac{1}{2}A\left[U^{n+1} + U^n\right] = \frac{1}{2}\left[F^{n+1} + F^n\right]. \tag{2.18}$$

Telle que

$$A = \alpha \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

Sans pertes de généralités, on peut supposer dans la suite $f \equiv 0$. U^{n+1} est alors obtenue en une itérée par

$$\left(Id + \frac{k}{2} A \right) U^{n+1} = \left(Id - \frac{k}{2} A \right) U^n.$$

On note que le cout en calcul est très similaire à celui d'Euler implicite puisque on doit résoudre un système linéaire à chaque itération. Cependant, il va être intéressant de noter quelque petits miracles.

Proposition 6. *Le schéma (2.18) est consistant avec (2.16) à l'ordre 2 en espace et 2 en temps.*

Démonstration. Il est évident que la partie spatiale (donnée par A) est d'ordre 2 en espace. Démontrons l'ordre 2 en temps.

Par le développement de Taylor

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + k \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n) + o(k^4), \tag{2.19}$$

$$\Longrightarrow \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n) + o(k^3), \tag{2.20}$$

de (2.19) on a

$$\frac{1}{2} A u(t_{n+1}) = \frac{1}{2} A u(t_n) + \frac{k}{2} A \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k^2}{4} A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + o(k^3)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} A \left(u(t_{n+1}) + u(t_n) \right) = A u(t_n) + \frac{k}{2} A \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k^2}{4} A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + o(k^3) \tag{2.21}$$

d'où l'erreur de consistance

$$R = \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + A u(t_n) - \left[\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + \frac{1}{2} A \left(U^{n+1} + U^n \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{du(t_n)}{dt} + A u(t_n) \right] + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n) + \frac{k^2}{4} A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + o(k^3), \tag{2.22}$$

donc on peut conclure

$$|R| = \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + Au(t_n) - \frac{U^{n+1} - U^n}{k} - \frac{1}{2} A \left(U^{n+1} + U^n \right) \right| = o(k^2).$$

On a donc la consistance du schéma de Crank-Nicolson d'ordre 2 en temps. $\square$

2.12.1 Stabilité au sens de Von-Neumann

Pour cela, commençons par définir la transformation de Fourier discrète :

On a transformation de Fourier d'une fonction u

$$\hat{u} = \mathcal{F}u = \int_{\mathbb{R}} u \, e^{-2i\pi t} dt, \quad \text{où} \quad i^2 = -1.$$

Alors, on peut définir la transformation de Fourier discrète comme suite

$$\hat{u}^n = \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi kj}{N}}. \tag{2.23}$$

De plus, on remarque que

$$\sum_j u_{j+1}^n e^{\frac{-2i\pi kj}{N}} = \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k(j-1)}{N}} = \left(\sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi kj}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi k}{N}} = \hat{u}^n e^{\frac{2i\pi k}{N}},$$

et

$$\sum_j u_{j-1}^n e^{\frac{-2i\pi kj}{N}} = \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi k(j+1)}{N}} = \left(\sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\pi kj}{N}} \right) e^{\frac{-2i\pi k}{N}} = \hat{u}^n e^{\frac{-2i\pi k}{N}}.$$

Proposition 7. *Le schéma (2.18) est incondionnellement stable au sens de Von-Neumann.*

Démonstration. On part de l'équation (2.18) avec $f \equiv 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0, \ j = 1, ..., N.$$

On multiplie cette équation par $e^{\frac{-2i\pi kj}{N}}$ et on somme sur j, on a alors grâce aux propriétés de la transformée de Fourier

$$\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{k} - \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{u}^n e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2\hat{u}^n + \hat{u}^n e^{\frac{-2i\pi k}{N}}}{h^2} + \frac{\hat{u}^{n+1} e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2\hat{u}^{n+1} + \hat{u}^{n+1} e^{\frac{-2i\pi k}{N}}}{h^2} \right] = 0.$$

Alors, on a

$$\hat{u}^{n+1} = a(k)\hat{u}^n$$

avec

$$a(k) = \frac{1 + \frac{k}{2h^2}\left(e^{\frac{-2i\pi k}{N}} + e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2\right)}{1 - \frac{k}{2h^2}\left(e^{\frac{-2i\pi k}{N}} + e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2\right)},$$

$a(k)$ est appelé la facteur d'amplification. Il reste à voir que $a(k)$ est strictement inferieur à 1 en module. Or on sait que

$$e^{\frac{-2i\pi k}{N}} + e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2 = 2\cos(\frac{2k\pi}{N}) - 2 = 2\left(\cos(\frac{2k\pi}{N}) - 1\right) = -4\sin^2(\frac{k\pi}{N}).$$

Donc,

$$a(k) = \frac{1 - \frac{2k}{h^2}\sin^2(\frac{k\pi}{N})}{1 + \frac{2k}{h^2}\sin^2(\frac{k\pi}{N})}.$$

Il est alors trivial que $a(k) < 1$.

Observons que

$$\begin{aligned} &1 - \lambda\sin^2(\frac{k\pi}{N}) > -1 - \lambda\sin^2(\frac{k\pi}{N}) \\ \Longrightarrow\ &\frac{1 - \lambda\sin^2(\frac{k\pi}{N})}{1 + \lambda\sin^2(\frac{k\pi}{N})} > -1,\ \left(\lambda = \frac{2k}{h^2}\right). \end{aligned}$$

Remarque 6. *On vient de voir que le schéma de Crank-Nicolson est consistant a l'ordre 2 en temps et en espace avec l'équation de la chaleur. De plus, le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable. Donc, d'après le théorème de Lax, il est convergent et*

$$\hat{e}^{n+1} = a(k)\hat{e}^n$$

.

□