السلسلة الأولى: الحساب التكاملي

تمرين 01: عيّن الدوال الأصلية لكل دالة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f_1(x)=x^2+x-3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f_2(x)=\sin x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ ، $I=]0,+\infty[$

3) $g_1(x)=\dfrac{\tan x}{(\cos x)^2}$ ، $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، 4) $g_2(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+(\sin x)^2}}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $h_1(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}+\dfrac{1}{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 6) $h_2(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $I=]-1,1[$

تمرين 02:

I- مستعملا مجاميع ريمان أحسب التكاملات التالية :

1) $I_1=\displaystyle\int_1^2 (x+1)dx$ ، 2*) $I_2=\displaystyle\int_0^1 x^2dx$ ، 3) $I_3=\displaystyle\int_0^1 e^x dx$

II- أحسب النهايات التالية :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ ، 2*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ ، 3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$ ، 4*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}$

5*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ، 6*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}$ $p>0$ ، 7*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{k=2n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$ ، 8*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

تمرين 03: باستعمال تبديل مناسب للمتغيّر أحسب التكاملات التالية :

1) $\displaystyle\int\left(x\sqrt{x^2+1}\right)dx$ 2) $\displaystyle\int(\sin x)^8(\cos x)^3dx$ 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}$ 4) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

5) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ 6*) $\displaystyle\int_1^4\frac{4x}{\sqrt{2+4x}}dx$ 7*) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$ 8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

9) $\displaystyle\int\tan^3t\,dt$ 10) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$ 11*) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ 12*) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

تمرين04: باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب التكاملات التالية:

1) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$ 2) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$ 4) $\displaystyle\int e^x\cos(x)dx$

5*) $\displaystyle\int\ln(1+x^2)dx$ 6*) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ 7*) $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx$ 8*) $\displaystyle\int\operatorname{argsh}(3x)dx$

***تمرين05:** نعتبر التكامل $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\sin x\,dx$ من اجل كل عدد طبيعي n.

1- احسب I_0 و I_1.

2- باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد علاقة تراجعية بين I_{n+2} و I_n ، ثم استنتج I_2 و I_3.

<u>تمرين</u>06: باستخدام تحليل الدوال الناطقة إلى كسور ناطقة بسيطة، احسب التكاملات التالية:

1) $\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}dx$ 2) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ 3) $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)(x+2)}$ *4) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}$

*5) $\int \frac{x+2}{x(x-1)^2}dx$ *6) $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$ *7) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ *8) $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}$

*9) $\int_0^1 \frac{tdt}{\left(2t+1\right)^3}$ *10) $\int \frac{dx}{\left(x^4\pm1\right)^2}$ *11) $\int \frac{x^4+1}{x\left(x-1\right)^3}$ *12) $\int_0^1 \frac{tdt}{\left(2t+1\right)^3}$

<u>تمرين</u>07: بواسطة قواعد مكاملة دالة كسرية من الشكل $R(\cos x, \sin x)$ ، احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ 2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$ *3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$ *4) $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$

*5) $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ *6) $\int \frac{dx}{\cos x+\cos 3x}$ *7) $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx$ *8) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$

*9) $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx$ *10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$ *11) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ *12) $\int \frac{dt}{7+\tan t}$

***<u>تمرين</u>08:** اعتمادا على قواعد مكاملة الدوال من الشكل $R(e^{px}, e^{qx})$ ، $R(\text{ch}\, x, \text{sh}\, x)$ أو الدوال من الشكل $\cos^p x \sin^q$ احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{2x}}$ 2) $\int \frac{dx}{5\text{ch}\, x+3\text{sh}\, x+4}$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x\, dx$ 4) $\int \text{ch}^2 x\, \text{sh}^2 x dx$

*5) $\int \frac{e^{-x}dx}{e^x-e^{-x}-2}$ 6) $\int \text{ch}^3 x\, \text{sh}^4 x dx$ 7) $\int \frac{dx}{e^{2x}\, \text{sh}\, 2x}$ 8) $\int \cos^4 x \sin^4 x\, dx$

9) $\int \frac{dt}{3+cht}$ 10) $\int \frac{3-shx}{2chx+3thx}dx$ 11) $\int \frac{dt}{sht}$ 12) $\int \frac{dt}{th^3 t}$

<u>ملاحظة هامة</u> : التمارين و الحالات المسبوقة بإشارة (*) إضافية ، يترك حلها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة

جامعة الشهيد حمّه لخضر بالوادي
كليّة العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

حل السلسلة الأولى: الحساب التكاملي

تمرين 01: تعيّن الدوا ل الأصلية لكل دالة على المجال I في كل حالة:

باستعمال جدول الدوال الأصلية و العمليات الجبرية عليها نجد المطلوب:

1) $\int f_1(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$ ، 2) $\int f_2(x)dx = -\cos(x) - \ln(x) - \frac{1}{x} + c$

3) $\int g_1(x)dx = \frac{1}{2}(\tan(x))^2 + c$ ، 4) $\int g_2(x)dx = \sqrt{1+(\sin x)^2} + c$

5) $\int h_1(x)dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} + \arctan(x) + c$ ، 6) $\int g_2(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arcsin(x) + c$

حيث c ثابت حقيقي كيفي.

تمرين 02:

تذكير: ليكن d التقسيم المنتظم من الرتبة n للمجال $[a,b]$ الذي خطوته $h = \frac{b-a}{n}$ و عليه $x_k = a + kh = a + \frac{k(b-a)}{n}$

إذا كانت الدّالة f قابلة للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ فإنّ:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

I -

1- لحساب $I_1 = \int_1^2 (x+1)dx$ لدينا $f(x) = x+1$ $a=1$ و $b=2$ وبالتّالي:

$$\int_1^2 (x+1)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(2+\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} k\right)$$

$$= 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\dots\dots\dots\dots+n) = 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n}{2}(1+n) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

2- و لحساب $I_3 = \int_0^1 e^x dx$ لدينا $f(x) = e^x$ ، $a=0$ و $b=1$ وعليه:

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}.\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(1-e).\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(1-e)\lim_{m\to 0}\frac{m}{1-e^m} = (1-e)\times(-1) = e-1$$

II – نحاول كتابة النهاية على الشّكل: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ حيث $f\,,a,b$ يُطلب تعيينها ثمّ نساويها بـ $\int_a^b f(x)dx$

1- لحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ نضرب و نقسم في n فينتج :

$$\frac{n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

نلاحظ أنّ: $b-a=1$ ، $x_k=\frac{k}{n}$ ، $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ وعليه $a=0$ و $b=1$ و بالتّالي:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\left[\arctan(x)\right]_0^1=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

2- و لحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ لدينا:

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

و منه:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

تمرين 03: طريقة تبديل المتغيّر:

1 . نضع لحساب $I_1=\int\left(x\sqrt{x^2+1}\right)dx$ $t=x^2+1$ أي أنّ : $dt=2xdx$ و بالتّالي:

$$I_1=\int\left(x\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+c=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+c$$

2 . و نضع لحساب $I_2=\int(\sin x)^8(\cos x)^3dx$ $t=\sin x$ أي أنّ : $dt=\cos(x)dx$ و بالتّالي:

$$I_2=\int(\sin x)^8(\cos x)^3dx=\int(\sin x)^8(\cos x)^2\underbrace{\cos x dx}_{dt}=\int t^8(1-t^2)dt=\int(t^8-t^{10})dt$$

$$=\frac{1}{9}t^9+\frac{1}{11}t^{11}+c=\frac{1}{9}(\sin x)^9+\frac{1}{11}(\sin x)^{11}+c$$

3 . نضع لحساب $I_3=\int\frac{dx}{x\ln x}$ $t=\ln x$ أي أنّ : $dt=\frac{dx}{x}$ و بالتّالي:

$$I_3=\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\ln x|+c$$

4. نضع لحساب $I_4=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ $x=\tan t$ أي أنّ $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt=\left(1+\tan^2 t\right)dt$

و لحساب الحدود الجديدة للتكامل يجب حساب t بدلالة x معناه أنّ $t(x)=arc\tan x$ و عليه

$$\begin{cases} t(0)=\arctan(0)=0 \\ t(1)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

و بالتّالي :

$$I_4=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\left(1+\tan^2 t\right)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos t\right)^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

5. و لحساب $I_5=\int_0^1\frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$ نضع $x=e^t$ أي أنّ: $dx=e^t dt$

و بمأنّ $x(t)=e^t$ فإنّ الحدود الجديدة للتكامل هي : $\begin{cases} x(0)=e^0=1 \\ x(1)=e^1=e \end{cases}$ و بالتّالي :

$$I_5=\int_0^1\frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt=\int_1^e\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\left[2\sqrt{1+x}\right]_1^e=2\sqrt{1+e}-2\sqrt{2}$$

6. و لحساب $I_8=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ نضع $t=\frac{3}{2}x$ أي أنّ: $dx=\frac{2}{3}dt$ و $4t^2=9x^2$ ينتج على هذا:

$$I_8=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{4-4t^2}}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}}\ \frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{3}\arcsin(t)+c=\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)+c$$

7. نضع لحساب $I_9=\int\tan^3 t\,dt$ $x=\cos t$ أيّ أنّ $dx=-(\sin t)dt$ و بالتّالي:

$$I_9=\int\tan^3 t\,dt=\int\frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^3}\sin t\,dt=\int\frac{1-(\cos t)^2}{(\cos t)^3}\sin t\,dt=\int\frac{x^2-1}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^3}=\ln|x|+\frac{1}{2x^2}+c=\ln|\cos t|+\frac{1}{2(\cos t)^2}$$

8. لحساب $I_{10}=\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$ نستعين بالشكل النموذجي: $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ و نضع: $t=x+3$

وعليه: $I_{10}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+1}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan(t)+c=\arctan(x+3)+c$

تمرين04: المكاملة بالتجزئة

1. لحساب $I_1=\int x^2\ln x\,dx$ نضع: $\begin{cases} u'=x^2 \Rightarrow u=\frac{1}{3}x^3 \\ v=\ln x \Rightarrow v'=\frac{1}{x}\end{cases}$ و بالتّالي:

$$I_1=\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3+c$$

2. لحساب $I_2=\int x\arctan x\,dx$ نضع: $\begin{cases} u'=x \Rightarrow u=\frac{1}{2}x^2 \\ v=\arctan(x)\Rightarrow v'=\frac{1}{x^2+1}\end{cases}$ و بالتّالي:

$$I_2=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan(x)+c$$

3. $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$ نضع: $\begin{cases} u=x^2 \Rightarrow u'=2x \\ v'=\sin x \Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$ و منه:

$$I_3=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos(x)dx}_{J}$$

نضع مره ثانية $\begin{cases} u=x \Rightarrow u'=1 \\ v'=\cos x \Rightarrow v=\sin x\end{cases}$ و بالتّالي: $J=\left[x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)dx=\left[x\sin(x)+\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

بالتعويض عن J في عبارة I_3 نجد:

$$I_3=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\left[x\sin(x)+\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

4. لحساب $I_4=\int e^x\cos(x)dx$ نضع: $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow u'=e^x \\ v'=\cos x \Rightarrow v=\sin x\end{cases}$ و التّالي

$$I_4=\int e^x\cos(x)dx=e^x\sin(x)-\underbrace{\int e^x\sin(x)dx}_{I}$$

نضع مرّه ثانية لحساب $I=\int e^x\sin(x)dx$ $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow u'=e^x \\ v'=\sin(x)\Rightarrow v=-\cos(x)\end{cases}$ فينتج: $I=-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)dx$

بالتعويض عن I في عبارة I_4 نجد: $I_4=e^x\sin(x)-\left(-e^x\cos(x)+\int e^x\cos(x)dx\right)$ أي أنّ:

$$I_4=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)-I_4$$ و منه

$$2I_4=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)$$

و أخيراً $I_4=\frac{1}{2}e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c$

5. لحساب $I_5=\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int x.\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ نضع: $\begin{cases} u=x\Rightarrow u'=1 \\ v'=\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$

وعليه:

$$I_5=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan(x)+c$$

تمرين06: حساب التكاملات باستخدام تحليل الدوال الناطقة إلى كسور ناطقة بسيطة

1. $I_1=\int_0^1\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}dx$ نلاحظ أنّ درجة البسط أكبر من درجة المقام و بالتّالي نجري القسمة الإقليدية للبسط على المقام :

x^3+2x	x^2+2x+1
$-x^3-2x^2-x$	$x-2$
$-2x^2+x$	
$2x^2+4x+2$	
$5x+2$	

و بالتالي: $\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{5x+2}{(x+1)^2}$

لنبحث على A,B حيث : $\frac{5x+2}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}\cdots\cdots(*)$

بضرب طرفي $(*)$ في $(x+1)^2$ وأخذ $x=-1$ نجد وأخذ $B=-3$

بأخذ $x=-2$ في $(*)$ نجد $-8=-A+B$ و منه $A=5$

و عليه: $\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}$

و أخيراً: $I_1=\int_0^1\frac{x^3+2x}{x^2+2x+1}dx=\int_0^1\left(x-2+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+5\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}\right]_0^1=5\ln(2)-3$$

2. لحساب $I_2=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ نكتب الشكل النموذجي للمقام $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

و نضع : $t=x+\frac{1}{2}$ و $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و علية:

$$I_2=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{I}-\frac{3}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{x^2+x+1}}_{J}$$

$$I=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)$$

لدينا:

$$J=\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

و

بالتعويض عن I و J في عبارة I_2 نجد: $I_2=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

.3 $I_3=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)(x+2)}$ لنبحث على A,B,C حيث : $\frac{(x-1)}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\cdots\cdots(**)$

بضرب طرفي $(**)$ في $(x+2)$ وأخذ $x=-2$ نجدقيمة $A=-\frac{3}{5}$

و بضرب طرفي $(**)$ في $\left(x^2+1\right)$ نحصل على $\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{A}{x+2}(x^2+1)+Bx+C$ و أخذ $x=i$ (لأنه جذر لـ x^2+1)

نحصل على المساواة التالية: $\frac{(i-1)}{(i+2)}=Bi+C$ و بكتابة العدد المركب $\frac{(i-1)}{(i+2)}$ على شكله الجبري نجد

$\frac{3i-1}{5}=Bi+C$ معناه أنّ : $B=\frac{3}{5}$ و $C=-\frac{1}{5}$ (يمكن استعمال توحيد المقام و المطابق)

و بالتالي: $I_3=\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{-3}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2+1}\right)dx$

$$=-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{3}{2\times5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{10}\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\arctan(x)+c$$

تمرين 07:

تذكير: في الحالة العامة يمكن نعتمد تبديل المتغير: $t=\tan\frac{x}{2}$ لنجد $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

كحالة خاصة: قاعدة بيوش Bioche: بوضع $w(x)=R(\cos x,\sin x)$ و لحساب $\int w(x)dx=\int R(\cos x,\sin x)dx$

- ♦ إذا كان: $w(-x)=-w(x)$ نضع: $t=\cos x$ ♦ إذا كان: $w(\pi-x)=-w(x)$ نضع: $t=\sin x$
- ♦ إذا كان: $w(\pi+x)=w(x)$ نضع: $t=\tan x$

1. $I_1=\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ نضع $t=\tan\frac{x}{2}$ وبالتّالي: $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ وعليه :

$$I_1=\int \frac{dx}{5-3\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int \frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\arctan(2t)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$$

2. لحساب $I_2=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$ نطبّق قاعدة بيوش : $w(x)=\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$ لدينا:

$$w(\pi-x)=\frac{\left(\cos(\pi-x)\right)^3}{\left(\sin(\pi-x)\right)^5}=\frac{\left(\cos(\pi)\cos(x)+\sin(\pi)\sin(x)\right)^3}{\left(\sin(\pi)\cos(x)-\cos(\pi)\sin(x)\right)^5}=-\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}=-w(x)$$

فنضع $t=\sin x$ فيكون $dt=\cos(x)dx$ و بالتّالي:

$$I_2=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x}\cos x dx=\int \frac{\left(1-t^2\right)}{t^5}dt=\int \frac{dt}{t^5}-\int \frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2t^2}+c=-\frac{1}{4\left(\sin x\right)^4}+\frac{1}{2\left(\sin x\right)^2}+c$$