الفصل ألأول: التحويلات التكاملية في فضاءات لوبيغ

Transformations intégrales dans les espaces Lp

1. فضاءات لوبيبغ L^p حيث $0 \leq p \leq +\infty$

في البداية نقدم بعض المتباينات الشهيرة والتي سنكون في حاجة لها لاحقا .

نقول أن العددين $p, q \in]1; +\infty[$ أسان مترافقان (exposants congugués) اذا حققا :
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

واضح أنه في حالة $p = 1$ فإن q تؤول الى $+\infty$ معناه أن $1, +\infty$ قوتان مترافقتان.

ليكن $(E, \mathcal{B}, \mu)$ فضاءا مقاسا (espace mesuré).

E مجموعة غير خالية $\mathcal{B}$ مجموعة أجزاء E القابلة للقياس نسميها كذلك σ-جبر أو عشيرة (أي مستقرة بالنسبة للمتممة وكذلك الاتحاد القابل للعد) μ : قياس معرف على $\mathcal{B}$.

ونرمز بـ $\mathcal{M}(E, \mathcal{B})$ للدوال $f: E \to \mathbb{R}$ القيوسة (القابلة للقياس)

متباينة هولدر (Inégalité de Holder):

اذا كانت f, g دالتان μ- قيوستان معرفتان على E وبقيم حقيقية فإن

$$\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث p, q أسان مترافقان.

متباينة منكوفسكي (Inégalité de Minkowski):

اذا كانت f, g دالتان μ- قيوستان معرفتان على E وبقيم حقيقية موجبة فإن

$$\left(\int_E (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

الفضاءات $\mathcal{L}^P$ حيث $1 \leq p \leq \infty$

تعريف : نرمز بـ $\left\{ f: E \to \mathbb{R} \,;\, f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}) \text{ و } \int_E |f|^p d\mu < \infty \right\} = \mathcal{L}^P(E)$ حيث $1 \leq p < \infty$ للفضاء الشعاعي للدوال القابلة للقياس على الفضاء المقاس $(E, \mathcal{B}, \mu)$ وبقيم حقيقية (أو مركبة) بحيث $|f|^p$ قابلة للمكاملة بالنسبة للقياس μ.

في حالة $p = +\infty$:

$\mathcal{L}^{\infty}(E)=\{f:E\to\mathbb{R};\ f\in\mathcal{M}(E,\mathcal{B});\exists c>0$ و $|f(t)|\le c\ ,\ \mu\ p.p.\}$.

$$|f(t)|\le c\quad \mu\ p.p.\Leftrightarrow \exists A\in\mathcal{B};\ \mu(A)=0 \text{ و } \forall x\in A;\ |f(t)|\le c$$

نعرف على الفضاء $\mathcal{L}^{P}(E)$ الدالة $\mu_p:\mathcal{L}^{p}(E)\to\mathbb{R}_+$ كما يلي

- في حالة $1\le p<\infty$: $\mu_p(f)=\left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
- في حالة $p=\infty$: $\mu_\infty(f)=\inf\{c>0;\ |f(t)|\le c,\ \mu-p.p\}$

ملاحظة : $\mu_\infty(f)=min\{c>0;\ |f(t)|\le c\quad \mu\ p.p\}$.

الاثبات : حسب تعريف الحد الأدنى فإن :

$$\forall n\mathbb{N},\qquad \exists c_n>0;\ |f(t)|\le c_n\quad \mu\ p.p$$

و $\mu_\infty(f)-\frac{1}{n}\ \le\ \mu_\infty(f)\le c_n\le\ \mu_\infty(f)+\frac{1}{n}$

أي أنه توجد متتالية عددية (c_n) ومتتالية مجموعات (A_n) تحققان :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mu(A_n)=0 \text{ و } \forall t\notin A_n\ ,|f(t)|\le c_n$$

$$\text{و}\quad |c_n-\ \mu_\infty(f)|\le\frac{1}{n}$$

نضع $A=\bigcup A_n$ لدينا : $\mu(A)\le\sum\mu(A_n)=0$ اذا $\mu(A)=0$.

يمكن صياغة القضية السابقة كما يلي $t\notin A$

$$\forall n\in\mathbb{N},\mu(A_n)=0 \text{ و } \forall t\notin A_n\ ,|f(t)|\le c_n$$

$$\text{و}\quad |c_n-\ \mu_\infty(f)|\le\frac{1}{n}$$

مما سبق ينتج :

$$\exists A\in\mathcal{B};\forall t\notin A\ \ |f(t)|\le inf\,c_n=\mu_\infty(f)$$

ومنه $|f(t)|\le\mu_\infty(f)$ أينما كان تقريبا.

قضية: التطبيق $\mu_p:\mathcal{L}^{p}(E)\to\mathbb{R}_+$ المعرف سابقا هو نصف نظيم (*semi norme*)على $\mathcal{L}^{p}(E)$.

الاثبات1) *i)* $1\le p<\infty$:لدينا $\mu_p(0)=\left(\int_E 0^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=0$

و $\mu_p(f) = 0 \Rightarrow \int_E |\mathrm{f}|^p d\,\mu = 0 \Rightarrow f = 0\,, \mu - p.p.$

لكن $f = 0\ p.p.$ لا تعني أن f دالة معدومة لأنها غير معدومة على مجموعة قياسها معدوم.

ومنه فقط الاستلزام و $f \equiv 0 \Rightarrow \mu_p(\quad) = 0$ أما استلزامه العكسي فهو غير صحيح.

ii) من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ وكل $f \in \mathcal{L}^p(E)$ فإن :

$$\mu_p(\alpha f) = \left(\int_E |\alpha \mathrm{f}|^p d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \int_E |\mathrm{f}|^p d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\,\mu_p(f)$$

iii) من أجل كل $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$ حسب منكوفسكي

$$\begin{aligned}\mu_p(f+g) &= \left(\int_E (f+g)^p d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E \mathrm{f}^p d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E \mathrm{g}^p d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \mu_p(g) + \mu_p(g)\end{aligned}$$

اذا μ_p نصف نظيم على الفضاء $\mathcal{L}^p(E)$.

2) $p = +\infty$ *i)* واضح أن $\mu_\infty(0) = 0$

$$\mu_\infty(f) = 0 \Rightarrow inf\{c > 0; |f(x)| \leq c\,, \mu - p.p.\} = 0$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq 0 \quad p.p \Rightarrow f = 0 \ \ , \mu - p.p.$$

ii) نلاحظ أن $\mu_\infty(0.f) = \mu_\infty(0) = 0 = 0.\mu_\infty(0)$.

لما $\alpha \neq 0$ نجد

$$\begin{aligned}\mu_\infty(\alpha f) &= inf\{c > 0; |\alpha f(x)| \leq c\ ,\ \ \mu - p.p.\} \\ &= inf\left\{c > 0; |f(x)| \leq \frac{c}{|\alpha|}\quad , \qquad \mu - p.p.\right\} \\ &= inf\{|\alpha| h > 0; |f(x)| \leq h\,,\ \ \mu - p.p.\} \\ &= |\alpha|.inf\{h > 0; |f(x)| \leq h \ \ p.p.\} = |\alpha| \mu_\infty(f)\end{aligned}$$

iii) ليكن $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$

$$\mu_\infty(f+g) = inf\{c > 0; |f(x) + g(x)| \leq c\ , \qquad \mu - p.p.\}$$

حسب المتباينة المثلثية ثم الملاحظة السابقة نجد

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \mu_\infty(f) + \mu_\infty(g)\,,\ \ \mu - p.p.$$

ومنه $\mu_\infty(f+g)\leq \mu_\infty(f)+\mu_\infty(g)$ وعليه فإن μ_∞ نصف نظيم على $\mathcal{L}^p(E)$.

قضية: العلاقة الثنائية في$\mathcal{M}(E,\mathcal{B})$ المعرفة بـ:

$$\forall f,g\in\mathcal{M}(E,\mathcal{B}); f\sim g \Leftrightarrow f=g,\ \ \mu-p.p$$

هي علاقة تكافؤ.

الاثبات : يمكن التأكد من ذلك بسهولة (أنجز البرهان).

نرمز بـ $\hat{f}$ لصنف تكافؤ الدالة f فيكون

$$\hat{f}=\{g\in\mathcal{M}(E,\mathcal{B});\ g=f\ ,\mu-p.p.\ \}$$

نرمز بـ $\mathcal{M}_\mu(E,\mathcal{B})$ لمجموعة حاصل القسمة (مجموعة أصناف التكافؤ للعلاقة $\sim$)

$$\mathcal{M}_\mu(E,\mathcal{B})=\{\hat{f}; f\in\mathcal{M}(E,\mathcal{B})\}$$

نتيجة: من أجل كل $1\leq p\leq\infty$ و كل$f,g\in\mathcal{L}^p(E)$ يكون لدينا :

$$f\sim g\Leftrightarrow f=g,\ \ \mu-p.p\Leftrightarrow \mu_p(f-g)=0$$

$$f\sim 0\Leftrightarrow f=0\ ,\mu-p.p$$

تعريف: نعرف الفضاء $\mathrm{L}^p(E)$ كما يلي :

اذا كان $1\leq p<\infty$: $L^p(E)=\left\{\hat{f}\in\mathcal{M}_\mu(E,\mathcal{B}); \int_E |f|^p d\mu<\infty\right\}$

في حالة $p=\infty$ فإن $L^\infty(E)=\left\{\hat{f}\in\mathcal{M}_\mu(E,\mathcal{B}): \exists c>0; |f(x)|\leq c\ ,\ \mu-p.p.\ \right\}$.

قضية : $\left(L^p,\mu_p\right)$ هو فضاء شعاعي نظيمي من أجل كل $1\leq p\leq\infty$.

الاثبات: أثبتنا سابقا أن μ_p نصف نظيم فحتى تكون نظيما يكفي اثبات أن

$$\mu_p(\hat{f})=0\Rightarrow\ \hat{f}=0$$

من اجل $1\leq p<\infty$:

$$\mu_p(\hat{f})=0\Rightarrow\left(\int_E |\mathrm{f}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=0\Rightarrow\int_E |\mathrm{f}|^p d\mu=0$$

$$\Rightarrow |\mathrm{f}|^p=0,\mu-p.p.\Rightarrow f=0,\mu-p.p.\Rightarrow\hat{f}=\hat{0}$$

و في حالة $p = \infty$

$$\mu_p(\hat{f}) = 0 \Rightarrow inf\{c > 0;\ |f(t)| \leq c, \mu - p.p.\} = 0 \Rightarrow\ |f(t)| \leq 0, \mu - p.p.$$
$$\Rightarrow f = 0, \mu - p.p. \Rightarrow \hat{f} = \hat{0}.$$

فيما سيأتي نرمز بـ $\|.\|_p$ لنظيم الفضاء L^p في مكان μ_p وبـ $\|.\|_\infty$ لنظيم L^∞. باستخدام الرموز الجديدة يمكن صياغة متباينتي هولدر و منكوفسكي على الترتيب كما يلي :

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

من متباينة هولدر ينتج أنه اذ اكانت $f \in L^p$ و $g \in L^q$ حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ فإن $f.g$ قابلة للمكاملة بمفهوم لوبيق أي $f.g \in L^1$.

نظرية ريز-فيشر: (Théorème de Riez-Fisher) من أجل كل $1 \leq p \leq \infty$، $(L^p, \|.\|_p\ )$ هو فضاء بناخ.

لإثبات ذلك يكفي أثبات أن $(L^p, \|.\|_p\ )$ فضاء تام (espace complet)

2. الفضاء الثنوي لـلفضاء L^p (dual de L^p) - الانعكاس و قابلية الفصل:

تعريف: ليكن $(E;\ \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي. مجموعة الأشكال الخطية أي

$$E' = \{f: E \to \mathbb{R} \text{ تطبيق خطي مستمر}\}$$

يسمى ثنوي الفضاء E. و كما هو معلوم فإن $(E', \|.\|_{E'})$ هو فضاء شعاعي نظيمي حيث :

$$\forall f \in E', \|f\|_{E'} = sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$
$$= sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)| = inf\{c > 0;\ |f(x)| \leq c\|x\|, x \in E\}.$$

اذا كان $f \in E'$ و $x \in E$ فإننا نكتب بصفة عامة :

$$f(x) = \langle f|x\rangle_{E',E}$$

وندعوه جداء الثنوية (*produit de dualité*).

نظرية : ليكن $(E, \mathcal{B}, \mu)$ فضاءا مقاسا. p, q أسان مترافقان من المجال $[1; +\infty]$. اذا كان $g \in L^q$ مثبتا فإن التطبيق

$$T_g : L^p \to \mathbb{R};\ T_g(f) = \int_E f(x)g(x)d\,\mu$$

هو شكل خطي مستمر على الفضاء L^p أي أن $T_g \in (L^p)'$.

إضافة إلى ذلك في حالة $1 < p < \infty$ فإن $\|T_g\|_{E'} = \|g\|_{L^q}$ أما في حالة $p = 1$ فإن $\|T_g\|_{E'} = \|g\|_{L^\infty}$ بشرط أن يكون القياس μ σ-منته.

الاثبات: 1) لدينا من أجل كل $f \in L^p$ (حسب خواص تكامل لوبيغ ثم متباينة هولدر)

$$|T_g(f)| = \left|\int_E f(x)g(x)d\,\mu\right| \le \int_E |f(x)||g(x)|d\,\mu \le \|f\|_p\|g\|_q < \infty$$

ومنه T_g معرف على L^p.

2) T_g هو تطبيق خطي لأن تكامل لوبيغ خطي.

3) من أجل كل $f \in L^p$ نجد $|T_g(f)| \le c.\|f\|_p$ حيث : $c = \|g\|_q < \infty$ ومنه

$$\|T_g\|_{E'} \le c.\|f\|_p \ldots (*)$$

اذا T_g شكل خطي مستمر على L^p.

الحالة الأولى $1 < p < \infty$: حسب $(*)$ فإن $\|T_g\|_{E'} \le \|g\|_{L^q}$. من جهة أخرى لنثبت أن $\|T_g\|_{E'} \ge \|g\|_{L^q}$

اذا كانت $g = 0, \mu - p.p.$ فإن $\|g\|_q = 0$ و $\|T_g\|_{E'} = sup_{\|f\|_p \le 1}|T_g(f)| = 0$

اذا $\|T_g\|_{E'} = 0 \ge 0 = \|g\|_{L^q}$.

اذا كان $g \ne 0, \mu - p.p$ نعتبر الدالة $f_1 = |g|^{q-2}g$ وبما أن $p(q-1) = q$ و $q - 1 = \frac{p}{q}$ لأن p, q مترافقان نستنتج أن

$$|f_1|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$$

وبالتالي $\|f_1\|_p = \|g\|^{\ q-1} < \infty$ أي أن $f_1 \in L^p$. و من جعة أخرى

$T_g(f_1) = \int_E f_1(x)g(x)d\,\mu = \int_E |g(x)|^q d\,\mu = \|g\|_q{}^q$ ومنه

$$\|T_g\|_{E'} = sup_{f\in L^p}\frac{|T_g(f)|}{\|f\|_p} \geq \frac{|T_g(f_1)|}{\|f_1\|_p} = \frac{\|g\|_q{}^q}{\|g\|_q{}^{q-1}} = \|g\|_q$$

اذا : $\|T_g\|_{E'} = \|g\|_q$.

الحالة الثانية : $p = 1$ و $q = \infty$ وبفرض أن القياس μ σ - منته أي أنه يمكن تغطية E بمجموعة (D_n)قابلة للعد من الأجزاء القيوسة أي $\mu(D_n) < \infty$ و $E = \cup D_n$.

من أجل كل $f \in L^1$ فإن

$$|T_g(f)| = \left|\int_E f(x)g(x)d\mu\right| \leq \int_E |f(x)||g(x)|d\mu$$

$$\leq \int_E |f(x)|\|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty\|f\|_1$$

اذا $\|T_g\|_{E'} \leq \|g\|_\infty$.........(1).

من أجل : $g = 0, \mu - p.p.$ نجد $\|T_g\|_{E'} = 0 \geq 0 = \|g\|_\infty$

اذا كان $g \neq 0, \mu - p.p.$ أي أن $\|g\|_\infty > 0$.

من أجل كل $n \geq 1$ نعتبر المجموعة $E_n = \left\{x \in B(0,n); |g(x)| \geq \|T_g\|_{E'} + \frac{1}{n}\right\}$ و الدالة $f_n(x) = \mathbb{I}_{E_n}(x)\frac{|g(x)|}{g(x)}$. نلاحظ أن $\|f_n\|_1 = \mu(\quad_n)$ و

$$T_g(f_n) = \int_{E_n}|g(x)|d\mu \geq \int_{E_n}\left(\|T_g\|_{E'} + \frac{1}{n}\right)d\mu = \left(\|T_g\|_{E'} + \frac{1}{n}\right)\mu(E_n)$$

وحسب تعريف $\|T_g\|_{E'}$ نستنتج أن :

$$\left(\|T_g\|_{E'} + \frac{1}{n}\right)\mu(E_n) \leq |T_g(f_n)| \leq \|T_g\|_{E'}\mu(E_n)$$

وبما أن $\mu(\quad_n)$ منته فإن $\mu(E_n) = 0$. و منه

$$\mu\left\{x \in E; |g(x)| \geq \|T_g\|_{E'}\right\} = \mu(\cup E_n) = 0$$

اذا $\|T_g\|_{E'} \geq \|g\|_\infty$ وبالتالي $\|T_g\|_{E'} = \|g\|_\infty$.

تمثيل ريز (*Représentation de Riesz*)

ليكن $(E,\mathcal{B},\mu)$ فضاءا مقاسا حيث μ قياس σ ـمنته وليكن $1 < p < \infty$ و q مرافقه أي :
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

نظرية: من أجل كل $\varphi \in (L^p)'$ يوجد $g \in L^q$ وحيد بحيث: $\varphi = T_g$.

أي أن :التطبيق $\mathrm{T}: L^q \to (L^p)';\ \mathrm{T}(g)=\mathrm{T}_g$ تقابلي).

إضافة إلى ذلك فإن التطبيق T خطي و مستمر ولذلك يمكن المطابقة كل عنصر g بصورته T_g أي

$$(L^p)' = L^q$$

الاثبات: استخدم النظرية السابقة.

ملاحظة : من أجل كل $\varphi \in (L^1)'$ يوجد $g \in L^\infty$ وحيد بحيث: $\varphi = T_g$ وبالتالي يمكن اعتماد المطابقة

$$(L^1)' = L^\infty$$

لكن: $L^1 \subset (L^\infty)'$ وغير متساويين.

تعريف : ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي.

1) نقول أن الفضاء E إنعكاسي اذا كان $E''=E$ (حيث E'' هو ثنوي E').

2) نقول أن الفضاء E قابل للفصل اذا احتوى على مجموعة A عدودة كثيفة بشكل عام أي

$$\exists A \subset E; A \text{ (قابلة للعد) و } \bar{A}=E$$

نظرية : اذا كان $(E,\mathcal{B},\mu)$ فضاءا مقاسا فإن :

1) من أجل كل $p \in]1;+\infty[$ ، الفضاء L^p انعكاسي .
2) من أجل كل $p \in [1;+\infty[$ ، الفضاء L^p قابل للفصل.

الاثبات : في حالة $1 < p < \infty$ لدينا من نظرية تمثيل ريز

$(L^p)' = L^q$ و $(L^q)' = L^p$ حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ومنه $(L^p)'' = (L^q)' = L^p$ اذا L^p انعكاسي

من جهة أخرى $(L^1)' = L^\infty$ ومنه $(L^1)'' = (L^\infty)'$ ولدينا دائما $E \subset E''$ اذا $L^1 \subset (L^\infty)'$.

أي أن ^{1} ليس انعكاسيا.

نظريات الكثافة وجداء اللف (الجداء التزاوجي) *produit de convolution -théorèmes de densité -*

ليكن $(E,\mathcal{B},\mu)$ فضاءا مقاسا نرمز بـ $\varepsilon(E)$ لمجموعة الدوال الدرجية المعرفة على الفضاء E وبقيم حقيقية.

نظرية: مجموعة الدوال الدرجية f المعرفة على E حيث $\mu(\{x \in E; f(x) \neq 0\}) < \infty$ كثيفة في $L^p(E)$ حيث $1 \leq p < \infty$.

نتيجة: $C_c(\mathbb{R})$ لمجموعة الدوال المستمرة على $\mathbb{R}$ وذات حامل متراص كثيفة في $L^p(\mathbb{R})$ من أجل كل $1 \leq p < \infty$.

نتيجة: ${C_c}^k(\mathbb{R})$ لمجموعة الدوال الصنف $C^k(\mathbb{R})$ وذات حامل متراص كثيفة في $L^p(\mathbb{R})$ من أجل كل $1 \leq p < \infty$.

مكاملة التوابع المتناظرة كرويا

تعريف : التوابع من الشكل $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}(\|\boldsymbol{x}\|)$ حيث $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}} \to \mathbb{R}_+$ متناظرة كرويا حيث $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} {x_i}^2}$

مبرهنة .

اذا كان f تابع من $\mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$ في $\mathbb{R}_+$ موجب وقيوس ومتناظر كرويا فإن

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = NW_N \int_0^{\infty} f(r) r^{N-1} dr$$

W_n هو حجم كرة الوحدة الاقليدية في $\mathbb{R}^n$. أي : $W_N = \mu\left(\overline{B(0,1)}\right)$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^{\frac{N}{2}}} & 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & \|x\| > 1 \end{cases}$$

بين ان $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ هل $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ ؟

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = NW_N \int_0^{\infty} f(r) r^{N-1} dr = NW_N \int_0^1 \frac{1}{r^{\frac{N}{2}}} r^{N-1} dr = NW_N \int_0^1 r^{\frac{N}{2}-1} dr$$
$$= \frac{2NW_N}{N} \left[r^{\frac{N}{2}}\right]_0^1 = NW_N \frac{2}{N} = 2W_N < \infty$$

ومنه $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2(x)\,dx = NW_N \int_0^{\infty} \frac{1}{r^N} r^{N-1} dr = NW_N \int_0^1 \frac{1}{r} dr = +\infty$$

ومنه $f^2 \notin L^1(\mathbb{R}^N)$

جداء اللف

لقد راينا في المثال السابق انه اذا كان $f \in L^1$ فقد يكون $f^2 \notin L^1$ او بعبارة اخرى انه

اذا كانت $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و g فان $f, g \notin L^1(\mathbb{R}^N)$ أي $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, g(x) dx$ ليس منته على العموم.

وبتحويل طفيف على الجداء السابق نحصل على العبارة المعرفة بالشكل التالي

اذا كان $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ فان

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y) dy$$

والذي يدعى جداء اللف لـ g, f يكون $\mu -$ منتهي اينما كان تقريبا في $\mathbb{R}^N$ لأن

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y) dy \right| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y) dx \right| dy \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)| dy \right) \mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, dx\ \ dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

و منه ان $f * g$ منته اينما كان تقريبا في $\mathbb{R}^N$

تمرين

ليكن b, a عددين حقيقين موجبين مختلفين $b \neq a$ وليكن f, g تابعين حقيقين حيث

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{ax}} & \mathrm{x} \geq 0 \\ 0 & \mathrm{x} < 0 \end{cases} \quad , g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{bx}} & \mathrm{x} \geq 0 \\ 0 & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$

أحسب $f * g$

الحل

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{ax}} dx = \frac{-1}{a} [e^{-ax}]_0^\infty = \frac{1}{a} < \infty$$

و منه $f \epsilon L^1(\,]0, \infty[)$

$$\int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{bx}} dx = \frac{-1}{b} [e^{-bx}]_0^\infty = \frac{1}{b} < \infty$$

و منه $\mathrm{g} \epsilon L^1(\,]0, \infty[)$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_0^{+\infty} f(x-y) g(y) dy$$

الحالة الأولى: اذا كان $x < 0$ فإن $(f * g)(x) = 0$

لأنه عندها يكون إما $(y) = 0$ أو $f(x-y) = 0$.

الحالة الثانية اذا كان $x \geq 0$ فإن

$$(f * g)(x) = \int_0^x e^{-a(x-y)} e^{-by}\, dy + \int_x^{+\infty} 0.e^{-by}\, dy = e^{-ax} \int_0^x e^{-(b-a)y}\, dy + 0$$

$$= e^{-ax} \frac{e^{-(b-a)x} - 1}{a-b} = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{a-b}$$

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{a-b}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

خواص :

ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$

1) $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

2) $f * g = g * f$

لأن بإجراء تغيير المتغير $z = x - y \Rightarrow y = x - z$ نجد

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(z)\, g(x-z) dz = (g * f)(x)$$

3) اذا كان $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ حيث $1 \leq p \leq \infty$ يمكن إثبات أن $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ (تعميم الخاصية 1)

سندات التوابع القيوسة أو التوابع من L^p

تعريف : لتكن $f: E \to \mathbb{R}$ دالة. نسمي سند (أو حامل) الدالة f متممة أكبر مفتوح من E يشمل العناصر x التي تحقق $f(x) = 0$ ونكتب اختصارا

$$supp(f) = \overline{\{x \in E; f(x) \neq 0\}}$$

قضية

ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^N$ وليكن f تابعا حقيقيا معرفا علي Ω عندئذ $\{\omega_i\}$ مجموعة كل المفتوحات من Ω حيث $f = 0$ اينما كان تقريبا في ω_i من اجل كل $i \in I$ فبوضع $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ فان $f = 0$ اينما كان تقريبا في ω وعندئذ سند f هو $supp(f) = \Omega \setminus \omega$

ملاحظات

1) اذا كان f_1, f_2 تابعين حيث $f_1 = f_2$ اينما كان تقريبا في $\mathbb{C}$ فان $supp(f_2) = supp(f_1)$

2) ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 < p \leq \infty$ اذا

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$$

3) اذا كان $supp(g)$ و $supp(f)$ متراصين فان $supp(f*g)$ متراص واذا كان احدهما غير متراص فإن $supp(f*g)$ غير متراص

الإثبات : الخاصية 2)

ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ حيث يكون التابع

$$y \in \mathbb{R}^N \rightarrow f(x-y)g(y) \in \mathbb{R}$$ كمولا

عندئذ يكون

$$(f*g)(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \quad = \int_{suppg} f(x-y)g(y)dy$$

$$= \int_{(x-supp(f))\cap supp(g)} f(x-y)g(y)dy$$

إذا كان $x \notin supp(f)+supp(g)$ فان $\left(x-supp(f)\right)\cap supp(g)=\emptyset$ و $(f*g)(\mathrm{x})=0$

اذا $(f*g)(\mathrm{x})=0$ اينما كان تقريبا علي $(supp(f)+supp(g))^c$

وعلي وجه الخصوص $(f*g)(\mathrm{x})=0$ اينما كان تقريبا في داخلية $(supp(f)+supp(g))^c$

وبالتالي $supp(f*g)\subset \overline{supp(f)+supp(g)}$

مثال مضاد : الخاصية3)

$$f(x)=\chi_{[0,1]}(x), \qquad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(f*g)(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f(x-y)\,g(y)dy} = \int_{\mathrm{x}-1}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dy}}{1+\mathrm{y}^2}$$

$$= artgx - arctg(x-1) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$supp(f*g)=\mathbb{R}$ غير متراص.

مقياس: تحويلات تكاملية في فضاءات ليبيغ	جامعة الشهيد حمة لخضر- الوادي كلية العلوم الدقيقة	قسم الرياضيات
2022/2021		سنة ثالثة ليسانس رياضيات

سلسلة أعمال موجّهة رقم: 01 (فضاءات ليبيغ

تمرين1: ليكن $a,b \geq 0$ و $p,q \in (1;+\infty)$ بحيث : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. أثبت صحة متباينة يونغ : $ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$ (يمكن اعتبار الدالة $\rho:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ بحيث $\rho(t)=\frac{1}{p}t^p+\frac{1}{q}b^q$).
2. لتكن $f\in L^p(\Omega)$ $g\in L^q(\Omega)$.

a) باستخدام متباينة يونغ أثبت من أجل كل $\alpha>0$ فإن :

$$\int_\Omega |fg|d\mu \leq \frac{\alpha^p}{p}\int_\Omega |f|^p d\mu+\frac{\alpha^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q d\mu$$

b) أوجد القيمة الصغرى للطرف الثاني بالنسبة لـ α واستنتج صحة المتباينة : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$ (متباينة هولدر) .

تمرين2. ليكن $p<q\in[1;+\infty[$ (ليس بالضرورة مترافقان) .

a) أثبت أن : اذا كان $f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ فإن $f\in L^r(\Omega)$ حيث $p<r<q$.

b) بين أنه اذا كان القياس μ منته فإن : $L^\infty(\Omega)\subset \bigcap_{p\geq 1}L^p(\Omega)$

ومن أجل كل f : $\|f\|_\infty = lim_{p\to\infty}\|f\|_p$.

c) برهن أنه اذا كان $f\in L^p(\Omega)$ و $g\in L^q(\Omega)$ حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ فإن

$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$

d) أثبت أن : اذا كان $f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ فإن $f\in L^r(\Omega)$ حيث $p<r<q$ و حينها يكون لدينا

$\|f\|_r \leq \|f\|^\alpha{}_p\|g\|^{1-\alpha}{}_q$ حيث $0\leq\alpha\leq 1$ و يحقق $\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1-\alpha}{r}$.

تمرين3: بفرض $\Omega=\mathbb{R}^n$ مزودة بقياس ليبيغ . $L^p(\Omega)$ حيث $p\in[1;+\infty[$ يمثل فضاء الدوال $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ بحيث

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ .$$

من أجل أي قيم لـ α تكون الدالة $x\longmapsto \frac{1}{(1+\|x\|^2)^\alpha}$ تنتمي الى $L^p(\Omega)$.

من أجل أي قيم لـ β تكون الدالة $x\longmapsto \frac{1}{\|x\|^\beta}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ تنتمي الى $L^p(\Omega)$.

ليكن $p,q\in[1;\infty[$. باستعمال ما سبق جد دالة $g\in L^q(\Omega)$ و لا تنتمي الى $L^p(\Omega)$. و جد $f\in L^p(\Omega)$ و لا تنتمي الى $L^q(\Omega)$.

برهن أن $L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ هو فضاء بناخ بالنسبة للنظيم : $\|f\|_{p,q}=\|f\|_p+\|f\|_q$.

الفصل الثاني :تحويل فوريه

التوابع القابلة للمكاملة محليا

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ وليكن f تابعا من I في $\mathbb{R}$

تعريف : نقول عن التابع f انه قابل للمكاملة محليا علي I اذا كان f قابل للمكاملة علي اي مجال مغلق $[a,b]$ حيث $[a,b] \subset I$

نرمز لمجموعة التوابع القابلة للمكاملة محليا علي I بالرمز $Loc(I,\mathbb{R})$

ملاحظة كل التوابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المستمرة علي $\mathbb{R}$ قابلة للمكاملة محليا والعكس غير صحيح .

تحويل فوريه

ليكن التابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابل للمكاملة محليا و مطلقا على مجموعة الأعداد الحقيقية . تحويل فوريي للتابع f هو التابع $F(f)$ المعرف كما يلي

$$F(f):\mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$F(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t} dt$$

$F(f)$ له معنى لأن $f \epsilon L^1(\mathbb{R})$ لأن : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-i\alpha t}|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

أمثلة: أوجد تحويل فوريي للدوال التالية :

$$g(t) = e^{-|t|}, f(t) = \begin{cases} 1; 0 \le t \le T \\ 0; t < 0 \end{cases}$$

$$F(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \int_0^T 1.e^{-i\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{i\alpha}e^{-i\alpha t}\right]_0^T = \frac{1}{i\alpha}\left(1 - e^{-i\alpha T}\right)$$

$$F(g)(\alpha) = \hat{g}(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^t.e^{-i\alpha t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}\, e^{-i\alpha t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{(1-i\alpha)t}}{1-i\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(1+i\alpha)t}}{-(1+i\alpha)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} = \frac{2}{1+\alpha^2}$$

مبرهنات

1) اذا كانت $f \epsilon L^1(\mathbb{R})$ عندئذ يكون تحويل فوريي $\hat{f}$ تابعا مستمرا و محدودا على $\mathbb{R}$ ويكون

$$\|\hat{f}\|_{\infty} = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}|F(f)| \leq \|f\|_1$$

2) اذا كان $f\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ عندئذ $\lim_{\alpha\to-\infty}|\hat{f}(\alpha)| = \lim_{\alpha\to+\infty}|\hat{f}(\alpha)| = 0$

خاصية:

تحويل فوريي خطي أي اذا كان $f\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ و $g\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ فإن:

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$$

التحويل العكسي لتحويل فوريه

ليكن $f\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ و $F(f)$ تحويل فوريه للتابع f فان التحويل العكسي لتحويل فوريه معرف كما يلي:

$$F^{-1}\left(\hat{f}(\alpha)\right) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha t} d\alpha$$

مثال: باستخدام التحويل العكسي لفوريه اوجد تحويل فوريي للدالة $F\left(e^{-|t|}\right)$

الحل : لدينا $e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+\alpha^2}e^{i\alpha t}d\alpha$ بالاستبدال بين t,α نحصل علي

$e^{-|\alpha|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}e^{i\alpha t}dt$ وبما أن $e^{-|\alpha|}$ زوجي فان

$$e^{-|\alpha|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}e^{-i\alpha t}dt$$

ومنه $2\pi e^{-|\alpha|} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}e^{-i\alpha t}dt = F\left[\frac{2}{1+t^2}\right](\alpha)$ اذا $F\left[\frac{2}{1+t^2}\right](\alpha) = 2\pi e^{-|\alpha|}$

تحويل فوريه والانسحاب

$f\epsilon L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $a \in \mathbb{R}$ نضع $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ عندئذ يكون لدينا

$$F[f_\tau(t)](\alpha) = e^{-i\alpha\tau}F[f(t)](\alpha)$$

الإثبات: حسب تعريف تحويل فوريي نجد

$$F[f_\tau(t)](\alpha) = F[f(t-\tau)](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, e^{-i\alpha t}dt$$

نضع: $x = t-\tau \Rightarrow t = x+\tau$ ومنه $dx = dt$ اذا

$$F[f_\tau(t)](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha(x+\tau)}dx = e^{-i\alpha\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}dx = e^{-i\alpha\tau}F[f(t)](\alpha)$$

تحويل فوريه والتحاكي

$f_k(t)=f(kt)$ نضع $k>0$ و $f\epsilon L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$F[f_k(t)](\alpha)=\frac{1}{k}F[f(t)]\left(\frac{\alpha}{k}\right)$$

الإثبات: حسب التعريف

$$[f_k(t)](\alpha)=F[f(kt)](\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(kt)\,e^{-i\alpha t}dt$$

$$x=kt\Rightarrow t=\frac{x}{k}\Rightarrow\frac{1}{k}dx=dt$$

$$F[f_\tau(t)](\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(kt)\,e^{-i\alpha t}dt=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-i\frac{\alpha}{k}x}dx$$
$$=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ix\left(\frac{\alpha}{k}\right)}dx=\frac{1}{k}F[f(t)]\left(\frac{\alpha}{k}\right)$$

تحويل فوريه وجداء اللف

من أجل كل $L^1(\mathbb{R})$ و فإن

$$F(f*g)(\alpha)=F(f)(\alpha).F(g)(\alpha)$$

الإثبات:

$$F(f)(\alpha).F(g)(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}dt\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\,e^{-i\alpha y}dy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(y)e^{-i\alpha(t+y)}dtdy$$

نضع

$$x=t+y$$

$$F(f)(\alpha).F(g)(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)dy\right]dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{-i\alpha x}\,dx=F[f*g](\alpha)$$

ومنه

$$F(f)(\alpha).F(g)(\alpha)=F(f*g)(\alpha)$$

قضية: من أجل كل $L^{1}(\mathbb{R})$ و g فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\hat{g}\,(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\,(t)\,g\,(t)dt$$

الإثبات

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\hat{g}\,(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,e^{-iyt}dy\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iyt}dt\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\hat{f}\,(y)\,dy$$

تحويل فوريه لمشتق تابع

نظرية: اذا كان $f,\ f' \in L^{1}(\mathbb{R})$ $f \in C^{1}(\mathbb{R})$ فإن

$$F[f'(t)](\alpha) = i\alpha\, F[f(t)](\alpha)$$

الإثبات: لدينا $F[f'(t)](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-i\alpha t}dt$ باستخدام التكامل بالتجزئة

$$V' = f'(t) \Rightarrow V = f(t) \quad \text{و} \quad U = e^{-i\alpha t} \Rightarrow U' = -i\alpha e^{-i\alpha t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-i\alpha t}dt = \left[f(t)e^{-i\alpha t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}dt = i\alpha F[f(t)](\alpha)$$

مبرهنة من أجل كل $f,\ f', \dots f^{(n)} \in L^{1}(\mathbb{R})$ $f \in C^{n}(\mathbb{R})$ فإن

$$F\left[f^{(n)}(t)\right](\alpha) = (i\alpha)^{n}\, F[f(t)](\alpha)$$

الإثبات :باستخدام الاستدلال بالتراجع

$$F[f(t)](\alpha) = F\left[f^{(0)}(t)\right](\alpha) = (i\alpha)^{0}\, F[f(t)](\alpha) = F[f(t)](\alpha) \quad : n = 0$$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

$$F\left[f^{(n+1)}(t)\right](\alpha) = F\left[\left(f^{(n)}\right)'(t)\right](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f^{(n)}\right)'(t)\,e^{-i\alpha t}dt$$

$$= \left[f^{(n)}(t)e^{-i\alpha t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t)\,e^{-i\alpha t}dt = (i\alpha)^{n+1}\, F[f(t)](\alpha)$$

تحويل فوريه للتابع $t \to tf(t)\ ,t \in \mathbb{R}$

مبرهنة: لتكن $f \in L^{1}(\mathbb{R})$ و $t \in \mathbb{R} \to tf(t) \in L^{1}(\mathbb{R})$ عندئذ يكون $F[f](\alpha)$ قابل للاشتقاق ويحقق

$$F[tf(t)](\alpha) = i.F'[f(t)](\alpha)$$

الإثبات

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}F[f(t)](\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(f(t)\, e^{-i\alpha t})dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)\, e^{-i\alpha t}dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, e^{-i\alpha t}dt$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, e^{-i\alpha t}dt = i\,\frac{\partial}{\partial\alpha}F[f(t)](\alpha) = iF'[f(t)](\alpha)$$

مبرهنة

ليكن $f\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ و $t \to t^k f(t)\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ من اجل $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ عندئذ $F[f](\alpha) \in C^{(k)}(\mathbb{R})$

ويكون لدينا $F[t^k f(t)](\alpha) = i^k F^{(k)}[f(t)](\alpha) = i^k \frac{\partial^{(k)}}{\partial^k\alpha}\big(F[f(t)](\alpha)\big)$

الإثبات

باستخدام الاستدلال بالتراجع. من اجل $k = 0$

$$F[t^0 f(t)](\alpha) = i^0 F^{(0)}[f(t)](\alpha) = i^0 \frac{\partial^{(0)}}{\partial^0\alpha}\big(F[f(t)](\alpha)\big)$$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل k ونبرهن صحتها من اجل $k + 1$

$$F^{(k+1)}[f(t)](\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}F^{(k)}[f(t)](\alpha) = \frac{1}{i^k}\frac{\partial}{\partial\alpha}\, F[t^k f(t)](\alpha)$$
$$= \frac{1}{i^{k+1}}\, F[t^{k+1} f(t)](\alpha)$$

ومنه $F[\quad ^{k+1} f(t)](\alpha) = i^{k+1} F^{(k+1)}[f(t)](\alpha)$

عبارة بول ونشار ويرسل فال

ليكن $f\epsilon\, L^{1}(\mathbb{R})$ و g عندئذ يكون لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[f(t)](\alpha)\,.\,\bar{F}[g(t)](\alpha)d\alpha \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F[f(t)](\alpha)|^2 d\alpha \quad (2)$$

الإثبات

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}[g(t)](\alpha) e^{-i\alpha t} d\alpha \; dt \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}[g(t)](\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \; d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f(t)](\alpha)\; \bar{F}[g(t)](\alpha) d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{f(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f(t)](\alpha)\; \bar{F}[g(t)](\alpha) d\alpha \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F[f(t)](\alpha)|^2 d\alpha$$

حل معادلات تفاضلية باستخدام تحويل فوريه

1) معادلات تفاضلية من الشكل : $\boldsymbol{ax' + bx = f}$ حيث a, b ثوابت حقيقية و f دالة معلومة:
نطبق على الطرفين تحويل فوريي مع الأخذ بعين الاعتبار خواص هذا الأخير فنجد

$$F[ax' + bx](\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$aF(\boldsymbol{x'})(\alpha) + bF(\boldsymbol{x})(\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$ai.\alpha F[x](\alpha) + bF[x](\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$(ai.\alpha + b)F[x](\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$F[x](\alpha) = \frac{F[f](\alpha)}{(ai.\alpha + b)}$$

معادلات تفاضلية من الشكل $ax'' + bx' + cx = f$

$$F[ax'' + bx' + cx](\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$aF[\boldsymbol{x''}](\alpha) + bF[\boldsymbol{x'}](\alpha) + cF[x](\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$a(i\alpha)^2 F[x](\alpha) + bi\alpha F[x](\alpha) + cF[x](\alpha) = F[f](\alpha)$$

$$(a(i\alpha)^2 + bi\alpha + c)F[x](\alpha) = \ F[f](\alpha)$$

$$F[x](\alpha) = \frac{F[f](\alpha)}{(-a(\alpha)^2 + bi\alpha + c)}$$

مثال

اوجد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$-x''(t) + x(t) = f(t)$$

الحل

$$F[-x''(t) + x(t)](\alpha) = F[f(t)](\alpha)$$

$$-F[x''(t)](\alpha) + F[x(t)](\alpha) = F[f(t)](\alpha)$$

$$\alpha^2 F[x(t)](\alpha) + F[x(t)](\alpha) = F[f(t)](\alpha)$$

$$(1 + \alpha^2)\ F[x(t)](\alpha) = F[f(t)](\alpha)$$

$$F[x(t)](\alpha) = \frac{F[f(t)](\alpha)}{1 + \alpha^2} = \ F[f(t)](\alpha).F[g(t)](\alpha)\ /\ g(t) = e^{-|t|}$$

$$= \ F[(f * g)(t)](\alpha)$$

$$x(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{|x-t|} dx$$

حل معادلات تكاملية باستخدام تحويل فوريه

متال اوجد حل المعادلة التكاملية التالية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, f(t) dt = \frac{1}{x^2 + 1}$$

الحل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, f(t) dt = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow (f * f)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow F[(f * f)(x)](\alpha) = F\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right](\alpha)$$

$$\Rightarrow [F[f(x)](\alpha)]^2 = \pi e^{-|\alpha|}$$

$$\Rightarrow \; F[f(x)](\alpha) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{|\alpha|}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2e^{-\frac{|\alpha|}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, F\left[\frac{1}{4x^2+1}\right](\alpha) = \; F\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)\right](\alpha)$$

$$\Rightarrow \; f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{4x^2+1}\right)$$

سلسلة تمارين حول تحويلات فورييه

التمرين الأول : اوجد تحويل فوريه للتوابع التالية

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t), \quad g(t) = e^{-|t|}, \quad h(t) = \frac{sint}{t}, \quad k(t) = \frac{1}{1+x^2},$$

التمرين الثاني: ليكن التابع f المعرف علي $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = e^{-t^2}$ و $F[f](\alpha)$ تحويل فوريي لهذا التابع . بين أن f هي حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى يطلب تحديدها . و استنتج عبارة $F[f](\alpha)$.

التمرين الثالث: نعرف المعادلة التكاملية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2} \qquad (*)$$

من اجل $0 < a < b$

ليكن التابع $f \in L^1(\mathbb{R})$. اكتب المعادلة التكاملية $(*)$ بواسطة جداء لف.

عين $F[f](\alpha)$ محولة فوريه للتابع f ثم استنتج التابع f

التمرين الرابع: ليكن التابع المميز المعرف كما يلي : $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

اوجد تحويل فوريه للتوابع التالية

$$,\chi(t)\frac{sint}{t}\ e^{-t}, \quad \chi(t)e^{-\frac{t}{2}}, \quad \chi(t-1)\, e^{-3t}cost; \quad \chi(2-|t|)$$

$$\chi(1-|t|)(1-2|t|), \qquad \chi(t+1)e^{-|t|}, \qquad \left(\frac{sint}{t}\right)^2\ e^{-|t|}$$

التمرين الخامس: ليكن b , عددان حقيقيان حيث $a, b > \frac{1}{2}$. احسب التكاملات التالية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(at)sin(bt)}{t^2} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2(1-it)^2}$$

التمرين السادس: ليكن التابعان: $g_a(t) = \frac{sin(at)}{t}, \quad f_a(t) = \frac{a}{(t^2+a^2)}$

اثبت ان $g_a * g_b = g_{min(a,b)}, \quad f_a * f_b = f_{a+b}$

التمرين السابع : بين أن $F[f * g](\alpha) = F[f]F[g]$ و $F[f] * F[g] = 2\pi F[fg]$ **التمرين الثامن:** اوجد حل لمعادلة لابلاس التالية باستخدام تحويل فوريه للمتغير x

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \ \ y > 0$$

مع $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \to 0$ و $\varphi \to 0$ لما $\|(x,y)\| \to \infty$

$$\varphi(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

التمرين التاسع :ليكن التابع $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $F[f] = \widehat{f}$ تحويل فوريه للتابع f

من اجل كل $T > 0$ ومن اجل كل $t \in \mathbb{R}$ نعرف التابع :

$$f_T(t) = \int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{ixt} F[f(t)](x)dx$$

1. بين ان $f_T(t) = \frac{1}{\pi^2 T}\int_{-T}^{T}\frac{sin^2(Ts)}{s^2}\left(f(t+s) + f(t-s)\right)ds$

2. احسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\infty}\frac{sin^2(u)}{u^2}du$

التمرين العاشر: ليكن التابعان $g, f \in L^1(\mathbb{R})$. بين ان

1. $f * g = g * f$

2. اذا كان f, g زوجيان أو فرديان معا فان $f * g$ زوجيا

3. اذا كان f زوجي و g فردي او العكس فان $f * g$ فردي

التمرين الحادي عشر: ليكن التابع f حيث

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1 \\ 0\ , & |t| \geq 1 \end{cases}$$

1. اوجد تحويل فوريه للتابع f .

2. استنتج قيمة التكامل $\int_0^{\infty}\frac{tcos(t) - sin(t)}{t^3}\ cos\left(\frac{t}{2}\right)dt$

التمرين الثاني عشر: نضع $(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}cos(tx)dx$

1. بين ان f قابلة للمكاملة علي $\mathbb{R}$ وهي حل لمعادلة تفاضلية يطلب تحديدها.

2. استنتج عبارة التابع f ثم اوجد تحويل فوريه للتابع $g(x) = e^{-x^2}$

3. ليكن التابع h المعرف ب : $h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{\frac{-t^2}{2}}$ احسب $h * h$

التمرين الثالث عشر: نضع $g(t) = e^{-|t|}$

1. اوجد تحويل فوريه للتابع g

2. باستعمال تحويل فوريه العكسي للتابع g استنتج التكامل $\int_0^{\infty}\frac{cos(t)}{1+t^2}dt$

الفصل الثالث :تحويل لابلاس

فضاء التوابع ذات التناقص السريع

تعريف : نقول عن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ينتمي الي فضاء التوابع ذات التناقص السريع S

إذا وفقط إذا حقق الشروط التالية:

1) التابع f ينتمي الي صنف C^{∞}

2) $\forall n,k\in\mathbb{N}\quad sup_{x\epsilon\mathbb{R}}\left|x^n f^{(k)}(x)\right|<\infty$

S فضاء شعاعي يحوي D فضاءالتوابع من الصنف C^{∞} بحامل متراص

خواص

تتحقق في S الخواص التالية

1) $f\in S$ و P تابع كثير حدود $\Leftarrow$ $Pf\in S$

2) $f\in S$ $\Leftarrow$ $f'\in S$

3) مهما يكن $P\in[1,\infty[$ فان S فضاء شعاعي جزئ من $L_c^p(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu)$ كثيف فيه .

4) $f\in S$ $\Leftarrow$ $\hat{f}\in S$ (اي $F[f]\subset S$)

تعريف

لتكن $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية من S. نقول ان متتالية $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تتقارب في S نحو f من S

إذا وفقط إذا كان

$\forall(n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \ lim_{m\to+\infty}sup_{x\epsilon\mathbb{R}}\left|x^n(f_m-f)^{(k)}(x)\right|$ ونكتب عندئذ

$$f=S-\lim_{m\to\approx}f_m$$

تعريف : نقول عن تابع f انه ذو رتبة اسية اذا وجد عددان حقيقيان $M>0$ و $\alpha>0$ بحيث $\forall t>\quad |f(t)|\leq Me^{\alpha t}$.

تعريف : ليكن $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ تابع مستمر بالاجزاء . نسمي تحويل لابلاس للتابع f التابع

$$L(p)=L[f(t)](p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}\,dt\,,\ \ p\in\mathbb{C}$$

شروط الوجود لتحويل لابلاس

تحويل لابلاس للتابع f معرف بتكامل موسع وحتى يكون معرفا يجب مراعاة الشروط التالية

التابع f ذو رتبة اسية : بحيث $|f(t)e^{-pt}| \le Me^{-(Rep-\alpha)t}$ و $Re(p) > \alpha$

ملاحظة : توجد توابع لاتقبل تحويل لابلاس

مثال : (1) $f(t) = \frac{1}{t}$ لا يحقق الشرط الثاني . بالفعل

$$\exists\beta\epsilon]0,1[/lim_{t\to 0}\, t^{\beta}\,\frac{1}{t} = lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{1-\beta}} = \infty$$

(2) $f(t) = e^{t^2}$ لا يقبل ترتيب اسي

نظرية : ليكن f تابع $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ مستمر

(1) $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ متقارب ببساطة $\exists!\, a \in \overline{\mathbb{R}},\ Re(p) > a \Rightarrow$

$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ متباعد $Re(p) < a \Rightarrow$

(2) $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ متقارب مطلقا $\exists!\, b \in \overline{\mathbb{R}},\ Re(p) > b \Rightarrow$

$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ غير متقارب مطلقا $Re(p) < b \Rightarrow$

أمثلة: 1) ليكن f تابع معرف بـ : $f(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$L(p) = L[f(t)](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^x =$$

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{p} - \frac{e^{-xt}}{p}\right] = \frac{1}{p}$ اذا كان $Re(p) > 0$.

2) ليكن f تابع معرف ب : $a \in \mathbb{C},\ f(t) = \begin{cases} e^{at}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$L(p) = L[f(t)](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{at}e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} =$$

$$lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right]_0^x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-x(p-a)}}{p-a}\right] = \frac{1}{p-a}$$

اذا كان $Re(p) > Re(a)$

3) ليكن f تابع معرف ب : $a > -1,\ f(t) = \begin{cases} t^a, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$

$$L(p) = L[f(t)](p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} t^a e^{-pt}\,dt = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$$

$$Re(p) > 0$$

خواص تحويلات لابلاس

الخطية : ليكن f و g تابعين $g,f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ يقبلان تحويل لابلاس و α,β عددان حقيقيان. عندئذ يكون لدينا

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)](p) = \alpha L[f(t)](p) + \beta L[g(t)](p)$$

مثال : باستعمال خاصية خطية تحويل لابلاس اوجد

$$L[ch(at)](p),\ L[sh(at)](p),\ L[sin(at)](p),\ L[cos(at)](p),$$

$$L[ch(at)](p) = L\left[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}[L(e^{at})(p) + L(e^{-at})(p)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right] = \frac{p}{p^2-a^2}$$

$$L[sh(at)](p) = L\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}[L(e^{at})(p) - L(e^{-at})(p)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right] = \frac{a}{p^2-a^2}$$

$$L[cos(at)](p) = L\left[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}\left[L\left(e^{iat}\right)(p) + L\left(e^{-iat}\right)(p)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right] = \frac{p}{p^2+a^2}$$

$$L[sin(at)](p) = L\left[\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right](p) = \frac{1}{2i}\left[L\left(e^{iat}\right)(p) - L\left(e^{-iat}\right)(p)\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right] = \frac{a}{p^2+a^2}$$

تحويل لابلاس و الانسحاب

ليكن f تابع $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ يقبل تحويل لابلاس نضع

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

عندئذ يكون

$$L[f_a(t)](p) = e^{-ap}L[f(t)](p)$$

الإثبات: $L[f_a(t)](p) = \int_0^{\infty} f(t-a)e^{-pt}dt$

نستعمل استبدال المتغير حيث نضع $u = t - a \Rightarrow du = dt$

$t = 0 \Rightarrow u = -a,\ t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$$L[f_a(t)](p) = \int_0^{\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_{-a}^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)}du = e^{-pa}\int_0^{\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-pa}\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = e^{-pa}L[f(t)](p)$$

تحويل لابلاس و التحاكي

ليكن f تابع $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ يقبل $L[f(t)](p)$ تحويل لابلاس له نضع

$$f_k(t) = \begin{cases} f(kt), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$ حيث $k > 0$

عندئذ يكون

$$L[f_k(t)](p) = \frac{1}{k}L[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right)$$

الاثبات: $L[f_k(t)](p) = \int_0^{\infty} f(kt)e^{-pt}dt$

نستعمل استبدال المتغير حيث نضع $u = kt \Rightarrow du = kdt$ وبالتالي

$t = 0 \Rightarrow u = -a,\ t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$$\int_0^{\infty} f(kt)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(u)e^{-p\frac{u}{k}}du = \frac{1}{k}\int_0^{\infty} f(u)e^{-\frac{p}{k}u}du = \frac{1}{k}L[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right)$$

مشتق تابع تحويل لابلاس

ليكن $F(p) = L[f(t)](p)$ تحويل لابلاس للتابع f عندئذ

$$L[t^n f(t)](p) = (-1)^n \frac{dF(p)}{dp}$$

الاثبات : نستعمل الاستدلال بالتراجع

من أجل $n = 1$

$$\frac{dF(p)}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt\right)=\int_0^{\infty}\frac{d}{dp}f(t)e^{-pt}dt=-\int_0^{\infty}t\,f(t)e^{-pt}dt$$

نفرض صحة الخاصية من أحل عدد طبيعي n

$$\frac{d^{n+1}F(p)}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\frac{d^nF(p)}{dp}\right)=\frac{d}{dp}\left((-1)^nL[t^nf(t)](p)\right)$$
$$=(-1)^{n+1}L[t^{n+1}f(t)](p)$$

ومنه بضرب طرفي المساواة في $(-1)^{n+1}$ نجد $(-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}F(p)}{dp}=L[t^{n+1}f(t)](p)$

مثال (1) : اوجد تحويل لابلاس للتابع التالي

$$f(t)=te^{-5t},g(t)=t^2e^{-5t},h(t)=t^3e^{-5t}$$

نضع $f_1(t)=e^{-5t}$

$$F_1(p)=L[f_1(t)](p)=\frac{1}{p+5}$$

$$L[te^{-5t}](p)=-\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+5}\right)=\frac{1}{(p+5)^2}$$

$$L[t^2e^{-5t}](p)=\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p+5}\right)=-\frac{2}{(p+5)^3}$$

مثال (2) : اوجد تحويل لابلاس للتابع التالي

$$f(t)=te^{-2t}cos(4t)$$

$$L[e^{-2t}cos(4t)](p)=\frac{p+2}{(p+2)^2+4^2}$$

$$L[te^{-2t}cos(4t)](p)=-\frac{d}{dp}\left[\frac{p+2}{(p+2)^2+4^2}\right]=\frac{p^2+4p-32}{(p^2+4p+20)^2}$$

تحويل لابلاس لمشتق تابع

ليكن f تابع $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ يقبل الاشتقاف باستمرار علي $\mathbb{R}^+$ و

$L[f(t)](p)$ تحويل لابلاس للتابع f عندئذ

$$L[f'(t)](p)=p.L[f(t)](p)-\lim_{t\to0^+}f(t)=pL[f(t)](p)-f(0^+)$$

الإثبات :

$L[f'(t)](p) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt$ لحسابه نستعمل التكامل بالتجزئة حيث نضع

$v(t) = e^{-pt} \Rightarrow v'(t) = -pe^{-pt}$ ومنه $u'(t) = f'(t) \Rightarrow u(t) = f(t)$ اذا

$$L[f'(t)](p) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{x\to\infty 0}[f(t)e^{-pt}]_0^x + p\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,e^{-pt}dt$$
$$= pL[f(t)](p) - \lim_{y\to\infty} f(y) = pL[f(t)](p) - f(0^+)$$

قضية : ليكن f تابع $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ يحقق الشروط التلية

$f \in C^n(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ (1) و $\exists M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \le n; \left|f^{(k)}(t)\right| \le Me^{\alpha t}$ (2)

عندئذ يكون :

$$L\left[f^{(n)}(t)\right](p) = p^n L[f(t)](p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$$

الإثبات : نستعمل الاستدلال بالتراجع

من اجل $n = 0$: نجد $L[\ ^{(0)}(t)](p) = p^0 L[f(t)](p) = L[f(t)](p)$ نفرض أن

$L\left[f^{(n)}(t)\right](p) = p^n L[f(t)](p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$ صحيحة ونبرهن صحة

$L\left[f^{(n+1)}(t)\right](p) = p^{n+1} L[f(t)](p) - \sum_{k=1}^{n+1} p^{n+1-k} f^{(k-1)}(0^+)$

لدينا:

$$L\left[f^{(n+1)}(t)\right](p) = L\left[(f^{(n)})'(t)\right](p) = pL\left[f^{(n)}(t)\right](p) - f^{(n)}(0^+)$$

$$= p\left[p^n L[f(t)](p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)\right] - f^{(n)}(0^+)$$

$$= p^{n+1} L[f(t)](p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n+1-k} f^{(k-1)}(0^+) - f^{(n)}(0^+)$$

$$= p^{n+1} L[f(t)](p) - \sum_{k=1}^{n+1} p^{n+1-k} f^{(k-1)}(0^+)$$

تحويل لابلاس لتكامل تابع : $\int_0^t f(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$

لدينا $h'(\ \ ) = f(t)$ ومنه حسبما سبق فإن

اذا $L[f(t)](p) = L[h'(\boldsymbol{t})](p) = pL[h(t)](p) - h(0^+) = pL[h(t)](p)$

أي $L[h(t)](p) = \frac{L[f(t)](p)}{p}$ $L\left[\int_0^t f(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}\right](p) = \frac{L[f(t)](p)}{p}$.

وبصورة عامة يمكن أن نستنتج أن

$$L\left[\underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots}_{n \text{ مرة}} \int_0^t f(u)du\right](p) = \frac{L[f(t)](p)}{p^n}$$

تكامل تحويل لابلاس :

نظرية : اذا كان f مستمر بالاجزاء علي المجال $[0,\infty[$ وذو رتبة اسية c واذا كانت

$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$ موجودة عندئذ $\int_p^\infty F(u)du = L\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p), \ \ p > 0$

نظرية القيمة الابتدائية والقيمة النهائية :

ليكن $F(p) = L[f(t)](p)$ تحويل لابلاس للتابع f . عندئذ يكون

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 0 \ \ (1)$$

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p) \ \ (2)$ و $\lim_{t\to 0} \ f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p) \ (3)$

الاثبات :

بماأن التابع f يقبل تحويل لابلاس وحسب شروط الوجود فان $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$

متقارب نظيميا وحسب نظرية الاستمرار للتكامل الموسع المتعلق بوسيط فان

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = \lim_{p\to\infty} \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \lim_{p\to\infty} f(t)e^{-pt}dt = 0 \ (1)$$

$$L[f'(t)](p) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = pL[f(t)](p) - f(0^+) \quad (2)$$

$$\lim_{p\to 0} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{p\to 0} pL[f(t)](p) - f(0^+)$$

بمان التابع المشتق f' يقبل تحويل لابلاس وحسب شروط الوجود فان $\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$

متقارب نظيميا وحسب نظرية الاستمرار للتكامل الموسع المتعلق بوسيط فان

$$\lim_{p\to 0}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} \lim_{p\to 0} f'(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{p\to 0} pL[f(t)](p) - f(0^+)$$

وبالتالي $\int_0^{\infty} f'(t)\,dt = \lim_{p\to 0} pL[f(t)](p) - f(0^+)$

اذا $lim_{t\to\infty} f(t) - lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to 0} pL[f(t)](p) - f(0^+)$

$.lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pL[f(t)](p)$

بنفس الطريقة السابقة نثبت (3)

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{p\to\infty} pL[f(t)](p) - f(0^+)$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} \lim_{p\to\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = 0 = \lim_{p\to\infty} pL[f(t)](p) - f(0^+)$$

ومنه $\lim_{p\to 0} pL[f(t)](p) - f(0^+) = 0$

$$\lim_{p\to 0} pL[f(t)](p) = f(0^+)$$

جداء اللف وتحويل لابلاس

ليكن $L\big(f(t)\big)$ و $L\big(g(t)\big)$ تحويلا لابلاس لكل من f و g علي الترتيب عندئذ

$$L\big((f*g)(t)\big)(p) = L\big(f(t)\big)(p).L\big(g(t)\big)(p)$$

الاثبات :

$$L\big((f*g)(t)\big)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}(f*g)(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt}\int_0^{\infty} f(t-u)\,g(u)dudt$$

نضع $r = t-u \Leftarrow dr = dt$ فنجد

$$L\big((f*g)(t)\big)(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(r+u)}\int_0^{\infty} f(r)\,g(u)dudr =$$
$$\int_0^{\infty} e^{-pr} f(r)dr\int_0^{\infty} e^{-pu} g(u)\,du = L\big(f(t)\big)(p).L\big(g(t)\big)(p)$$

مثال : عين $L^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right)$

$$L^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\times\frac{1}{p^2+1}\right) = sin(t)*cos(t)$$

$$= \int_0^t sin(t-u)cos(u)\, du = \int_0^t [sin(t)cos^2(u) - sin(u)cos(t)cos(u)]cos(u)\, du = sin(t)\int_0^t cos^2(u)du - cos(t)\int_0^t sin(u)cos(u) = \frac{tsin(t)}{2}$$

تحويل لابلاس العكسي

تحويل لابلاس العكسي يمكن تعريفه كمايلي :

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1}[pL[f(t)](p)] = f\,(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty}^{c+\infty} F(p)e^{pt}\, dp$$

ورغم إن تحويل لابلاس العكسي المعطى بالعلاقة السابقة يمكن إجراؤه علي جميع التوابع لكن مع بعض الجهد. للحصول علي تحويل لابلاس العكسي نستعمل جدول تحويل لابلاس لكن هذا الجدول محدود لذا يلزم تفكيك التابع المراد تحويله العكسي إلي كسور جزئية يمكن معها استخدام الجدول مباشرة. إي إن التابع يفكك الي مجموع عدة توابع .

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p\,) + \cdots + F_n(p)$$

ويكون تحويل لابلاس العكسي علي الصورة التالية

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t\,) + \cdots + f_n(t)$$

ويكون التابع $F(p)$ عادة كسرا ناطقا اي $F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ حيث B, A

كثيري حدود للمتغير p و $F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{B(p)}{(p+p_1)(p+p_2)\ldots(p+p_n)}$

حيث $p_1, p_2, \ldots, p_n$ اعداد حقيقية او مركبة

الكسور الجزئية عندما يحتوي التابع أقطابا عليا مختلفة

في هذه الحالة نكتب $F(p)$ كما يلي

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{a_1}{p+p_1} + \frac{a_2}{p+p_1} + \cdots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

الثوابت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ تسمى احيانا بالمتبقي عند القطب المقابل ولإيجاد قيمة هذه الثوابت نطبق ذلك في المعادلات التالية $a_1 = lim_{p\to -p_1} F(p)(p+p_1),$

$$a_n = lim_{p\to -p_n} F(p)(p+p_n)\,, \ldots, a_2 = lim_{p\to -p_1} F(p)(p+p_1),$$

وفي هذه الحالة فان تحويل لابلاس العكسي من المعادلة $F(p)$ تصبح

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}$$

مثال : اوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع التالي

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p+3)}$$

الحل

اقطاب هذه المعادلة هي $p = 0, \quad p = -1, \quad p = -3$

$$F(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p+1} + \frac{a_3}{p+3}$$

$$a_1 = lim_{p\to 0} F(p)p = \lim_{p\to 0} \frac{p+2}{(p+1)(p+3)} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = lim_{p\to -1} F(p)(p+1) = \lim_{p\to -1p} \frac{p+2}{p(p+3)} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = lim_{p\to -3} F(p)\,(p+3) = \lim_{p\to -3} \frac{p+2}{(p+1)p} = -\frac{1}{6}$$

ومنه

$$F(p) = \frac{\frac{2}{3}}{p} + \frac{\frac{-1}{2}}{p+1} + \frac{\frac{-1}{6}}{p+3}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي من جدول لابلاس يصبح حل المعادلة

$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

الكسور الجزئية عندما يحتوي التابع أقطاب عليا مركبة مترافقة

اذا كان التابع يحوي قطبين مترافقين مثلا p_1, p_2 فانه يمكن كتابة مفكوك

التابع علي الصورة التالية :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{a_1 p + a_2}{(p+p_1)(p+p_2)} + \frac{a_3}{p+p_3} + \cdots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

وتحدد قيم كل من a_2, a_1 بضرب طرفي المعادلة بـ $(p+p_1)(p+p_2)$ و

مثال : اوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع التالي

$$F(p)=\frac{p+1}{p(p^2+p+1)}$$

اقطاب هذه المعادلة هي $p=0$, $p=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $p=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$,

$$F(p)=\frac{a_1p+a_2}{(p^2+p+1)}+\frac{a_3}{p}$$

$$lim_{p\to-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}F(p)\,(p^2+p+1)=\lim_{p\to-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\frac{p+1}{p}=\lim_{p\to-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}a_1p+a_2+$$

اذا $\lim_{p\to-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\frac{p+1}{p}=\lim_{p\to-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}a_1p+a_2$ $\frac{a_3(p^2+p+1)}{p}=\lim_{p\to-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}a_1p+a_2$

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a_1\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)+a_2=\left(-\frac{1}{2}a_1+a_2\right)-i\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$$

و منه $a_1=-1\,,a_2=0$ $-\frac{1}{2}a_1+a_2=\frac{1}{2}\,,-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a_3=lim_{p\to0}F(p)p=\lim_{p\to0}\frac{p+1}{(p^2+p+1)}=1$$

وعليه

$$F(p)=\frac{-p}{p^2+p+1}+\frac{1}{p}=\frac{-p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$f(t)=1-e^{-\frac{1}{2}t}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

الكسور الجزئية عندما يحتوي التابع أقطاب عليا متكررة

اذا كان احد اقطاب التابع يتكرر r مرة فان

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{b_r}{(p+p_1)^r}+\frac{b_{r-1}}{(p+p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{b_1}{(p+p_1)}$$

ولايجاد قيم الثوابت $b_r,b_{r-1},..,\;\; b_1$ نتبع الخطوات التالية

(1) نضرب طرفي المعادلة في $(p+p_1)^r$ فنجد

$$b_r=\lim_{p\to-p_1}F(p)(p+p_1)^r$$

(2) نضرب طرفي المعادلة في $(p+p_1)^r$ ثم نفاضل طرفي المعادلة للمتغير p فنجد

$$b_{r-1}=\frac{\lim\limits_{p\to -p_1} d(F(p)(p+p_1)^r)}{dp}$$

(3) نضرب طرفي المعادلة في $(p+p_1)^r$ ثم نفاضل طرفي المعادلة مرتين للمتغير p فنجد

$$b_{r-2}=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{p\to -p_1} d^2(F(p)(p+p_1)^r)}{dp^2}$$

(3) نتبع نفس الخطوات وفي كل مرة نزيد رتبة التفاضل مرة واحدة حتى نحصل علي جميع الثوابت

ويمكن كتابة الصورة العامة :

$$b_{r-k}=\frac{1}{k!}\frac{\lim\limits_{p\to -p_1} d^k(F(p)(p+p_1)^r)}{dp^k}$$

مثال : اوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع $F(p)=\frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$

الحل: $F(p)=\frac{b_1}{(p+1)^3}+\frac{b_2}{(p+1)^2}+\frac{b_3}{p+1}$

$$b_3=\lim_{p\to -1} F(p)(p+1)^3=\lim_{p\to -1}(p^2+2p+3)=2$$

$$b_2=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d\big(F(p)(p+1)^3\big)}{dp}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d\big(p^2+2p+3\big)}{dp}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}2p+2=0$$

$b_1=\frac{1}{2!}\lim\limits_{p\to -1}\frac{d(2p+2)}{dp}=1$ ومنه $F(p)=\frac{2}{(p+1)^3}+\frac{1}{p+1}$ اذا

$$f(t)=t^2e^{-t}+e^{-t}\ ,\quad t>0$$

خطية تحويل لابلاس العكسي

نظرية : ليكن التابعين F_1 , F_2 و العددين المركبين α , β حيث

$F_1(p)=L[f(t)](p)$, $F_2(p)=L[g(t)](p)$ عندئذ

$$L^{-1}[\alpha\, F_1(p)+\beta F_2(p)]=\alpha L^{-1}[\,F_1(p)]+\beta L^{-1}[\,F_2(p)]$$

مثال : اوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع التالي $F(p)=\frac{5}{2p^2}+\frac{2p+4}{p^2+9}$

$$L^{-1}\left[\frac{5}{2p^2}+\frac{2p+4}{p^2+9}\right]=\frac{5}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]+2L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+5}\right]+\frac{4}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{p^2+5}\right]$$

$$=\frac{5}{2}t+2cos(3t)+\frac{4}{3}sin(3t)$$

حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة تحويل لابلاس

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n التالية :

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=x(t)$$

المطلوب ايجاد الحل $y(t)$ لهذه المعادلة من اجل $t\geq 0$ وتحقق الشروط الابتدائية التالية

$$y(0)=y_0\,,y'(0)=y_0{}'\;,\ldots,\quad y^{(n+1)}(0)=y_0{}^{(n+1)}$$

نبحث عن تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$L\left(a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)\right)=L\big(x(t)\big)$$

باستخدام خاصية الخطية لتحويل لابلاس

$$a_nL\left(y^{(n)}(t)\right)+a_{n-1}L\left(y^{(n-1)}(t)\right)+\cdots+a_1L\big(y'(t)\big)+a_0L\big(y(t)\big)=L\big(x(t)\big)$$

علما ان $L\left(y^{(n)}(t)\right)=p^nL[y(t)](p)-\sum_{k=1}^{n}p^{k-1}y^{(n-k)}(0^+)$

مثال : اوجد حل المعادلة التفاضلية التالية $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=5$

$$y(0)=1\,,y'(0)=2$$

الحل: $L\big(y''(t)\big)+4L\big(y'(t)\big)+5L\big(y(t)\big)=5L(1)$

ومنه $p^2L\big(y(t)\big)-py(0)-y'(0)+4\big[pL\big(y(t)\big)-y(0)+5L\big(y(t)\big)\big]=5L(1)$

$(p^2+4p+5)L\big(y(t)\big)=\frac{5}{p}+p+6$ اذا $F(P)=L\big(y(t)\big)=\frac{p^2+6p+5}{p(p^2+4p+5)}$ نجد.

الأقطاب كما يلي $p=0,\ p=-2+i,\ p=-2-i$ أي أن $F(P)=\frac{a_1p+a_2}{p^2+4p+5}+\frac{a_3}{p}$

وباستخدام طرق حساب الثوابت نجد

$a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=1$ و بالتالي $(P)=\frac{2}{(p+2)^2+1}+\frac{1}{p}$ ومنه

$$.y(t)=1+2e^{-2t}sin(t)$$

حل المعادلات التفاضلية الجزئية بطريقة تحويل لابلاس

ليكن $u(x,t)$ تابع يقبل تحويل لابلاس بالنسبة للمتغير t حيث

$U(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)\,e^{-pt}dt$ متقارب نظميا من اجل $p>p_0$ ولدينا

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(p)=pU(x,p)-u(x,0)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(p)=p^2U(x,p)-pu(x,0)-\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{dU}{dx}\quad ,L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{d^2U}{dx^2}$$

تحويل لابلاس للتوابع الدوريه :

نظرية : ليكن f تابع $T-$ دوري عندئذ $F(p)\ =L[f(t)](p)$ معرف من اجل كل $p>0$

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f\,(t)dt$$

الإثبات

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f\,(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}e^{-pt}f\,(t)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}e^{-p(n\pi+y)}f\,(y)dy$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-pnT}\int_0^T e^{-py}f\,(y)dy=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f\,(t)dt$$

بوضع $(t=nT+y\Rightarrow dt=dy)$.

سلسلة تمارين حول تحويل لابلاس

التمرين الاول : اوجد تحويل لابلاس للتوابع التالية مع تحديد مجال الوجود

$$(1)\quad t \to 2e^{-6t}, \qquad (2)\ t \to 5e^{2t},$$

$$(3)\ t \to (t^2+1)^2, \qquad (4)\ t \to cos(3t) + sin(3t)$$

$$(5)\ t \to ch(3t) + sh(3t), \qquad (6)\ t \to 2e^{-2t}cos(3t),$$

$$(7)\ t \to 2e^{-5t}\big(cos(3t) + sin(3t)\big), \qquad (8\ )t \to e^{-4t}sh(8t),$$

$$(9)\ \ t \to e^{-t}sin^2\left(\frac{t}{2}\right), \qquad (10)\ t \to e^{-2t}(t^2-1)^2$$

التمرين الثاني : ليكن μ التابع المعرف كما يلي

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \mu(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

باستعمال خاصية الانسحاب عين تحويل لابلاس للتوابع التالية

$$(1)\ g(t) = \mu(t-3)sin(t-3)$$

$$(2)\ g(t) = \mu\left(t - \frac{3}{2}\right)sin(2t-3)$$

$$(3)\ g(t) = \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right)sin(t)$$

$$(4)\ g(t) = \mu(t)sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين الثالث : نعتبر التابعين f_1, f_2 $2-$ دوري المعرفين علي $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}, f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 < t < 1 \\ -t+2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

اوجد تحويل لابلاس لكل من التابعين f_1, f_2

التمرين الرابع :

اوجد التابع f التحويل العكسي لتحويل لابلاس $F(p) = L\big(f(t)\big)(p)$ في كل حالة

$$L\big(f(t)\big)(p) = \frac{5}{p^2+9}, L\big(f(t)\big)(p) = \frac{5p}{p^2+9}, L\big(f(t)\big)(p) = \frac{5p-3}{p^2+9}$$

$$L\big(f(t)\big)(p)=\frac{1}{p^3}\ ,L\big(f(t)\big)(p)=\frac{1}{p+3}\ L\big(f(t)\big)(p)=\frac{5p}{(p^2+9)^2}$$

التمرين الخامس : اوجد التابع f التحويل العكسي لتحويل لابلاس $F(p)=L\big(f(t)\big)(p)$ حيث

$$F(p)=L\big(f(t)\big)(p)=\frac{1}{(p^2+w^2)^2}$$

ثم اوجد التابع g حيث $L\big(g(t)\big)(p)=\frac{w}{(p^2+w^2)^2}$

التمرين السادس :

اوجد التابع f التحويل العكسي لتحويل لابلاس $F(p)=L\big(f(t)\big)(p)$ في كل حالة

$$(a)\quad \frac{p^2+3p+1}{(p^2+4)^2}\ ,\qquad (b)\quad \frac{p+3}{(p^2+6p+18)^2}$$

$$(c)\quad \frac{3}{(p^2+6p+18)^2}\ ,\qquad (d)\quad \frac{9p+7}{(p^2+2p+2)^2}$$

التمرين السابع : اوجد حل المعلدلات التفاضلية التالية باستعمال تحويل

$$(1)\begin{cases} y'(t)=2y(t)+8sin(2t) \\ y(0)=-2\end{cases}\ ,(2)\begin{cases} y'(t)=2y(t)+te^{2t} \\ y(0)=1\end{cases}\ ,$$

$$(3)\begin{cases} y'(t)=2y(t)+e^{3t}sint \\ y(0)=1\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}sint \\ y'(0)=0\ ,y(0)=1\end{cases}\ ,\qquad (5)\begin{cases} y''(t)-y(t)=sint \\ y'(0)=1\ ,y(0)=-1\end{cases}$$

التمرين الثامن :

(**1**) اوجد التابع f التحويل العكسي لتحويل لابلاس $F(p)=L\big(f(t)\big)(p)$ في كل حالة

$$(a)\quad \frac{p+13}{p^2+2p-8}\ ,\qquad (b)\quad \frac{2p-1}{p^2+2p-8}$$

(2)اوجد حل الجملة التفاضلية التالية باستعمال تحويل لابلاس

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)+5y(t) \\ y'(t)=x(t)+3y(t)\end{cases}\ ,\qquad \begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=2\end{cases}$$

التمرين التاسع :

اكتب f بدلالة φ اذا كان لدينا من اجل كل $t\geq 0$ فإن $\varphi(t)-\lambda\int_0^t e^{t-y}\,\varphi(y)dy=f(t)$

التمرين العاشر :*

لتكن المسالة التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4u(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 6sin(x) - 4sin(2x) \end{cases}$$

باستعمال تحويل لابلاس اوجد حل هذه المسالة

∗ **التمرين الحادي عشر** : اوجد تحويل لابلاس للتوابع التالية , $t > 0$ $n \in \mathbb{N}$

$$f(t) = t^n, \quad f(t) = e^{at}, f(t) = te^{at}\ f(t) = t^3 e^{at}, f(t) = sin(2t)e^{at}$$

التمرين الثاني عشر :*

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية

$$* \qquad y'' + 2y' + y = te^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(**1**) اوجد تحويل لابلاس لحل المعادلة التفاضلية

(2) استنتج باستعمال تحويل لابلاس العكسي حل المعادلة التفاضلية ∗

التمرين الثالث عشر :*

باستعمال تحويل لابلاس اوجد حل المعادلات التفاضلية التالية

$$(1) y' + y = t^2, \quad y(0) = 2 \quad (2)\ y' - 3y = te^{-2t}, y(0) = 1$$

$$(3)\ y'' + 2y' - 3y = e^{-2t}, y(0) = y'(0) = 0$$

$$(4)\ y'' - y' - 2y = 1 + e^{-t}, y(0) = y'(0) = 0$$

$$(5)\ y'' + 2y' + 5y = cos(2t), y(0) = y'(0) = 0$$

$$(5)\ y'' + 4y = t + sin(t), y(0) = y'(0) = 0$$

التمرين الرابع عشر : اوجد تحويل لابلاس للتوابع التالية , $t > 0$ $n \in \mathbb{N}$ *

$$f(t) = cos(3t)e^{-t}\mu(t)\ \ f(t) = (5t)^2 e^{-5t}\mu(t),$$

$$f(t) = (t^2 + t + 1)e^{-2t}\mu(t), f(t) = \left(cos(2t) - sin(t)\right)e^{-3t}\mu(t)$$

حيث

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \mu(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$