المصفوفات

تعريف

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفا ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عمودا.
إذا كانت $(a_{j,k})$ هي عناصر المصفوفة A فإننا نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ونقول أن المصفوفة A هي من الدرجة (m,n) حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الأعمدة.

ملاحظات

1. في بعض الأحيان نرمز الصيغة المختزلة $A = (a_{j,k})$ لكتابة المصفوفة.
2. المصفوفة الصفية هى المصفوفة المكونة من صف واحد أي من الدرجة $(1,n)$
3. المصفوفة العمودية هي المصفوفة المكونة من عمود واحد (أي من الدرجة $(n,1)$)
4. المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها اصفار ويرمز لها بالرمز (0).
5. مصفوفة الوحدة هي المصفوفة المربعة التي عناصرها القطرية تساوي واحد وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الدرجة (n,n).

6. المصفوفة القطرية هي المصفوفة المربعة و جميع عناصرها أصفارا ما عدا العناصر الواقعة على القطر فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر مثال $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية علوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أسفل القطر أصفارا. و نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية سفلوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أعلى القطر أصفارا.

العمليات على المصفوفات

تعريف

1. الجمع:
لتكن $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n).
نعرف المصفوفة

$$A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})$$

و تسمى مصفوفة الجمع بين المصفوفة A و المصفوفة B.

2. الضرب بعدد حقيقي:
لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n) و λ عدد حقيقي.
نعرف المصفوفة

$$\lambda A = (\lambda a_{j,k})$$

و تسمى مصفوفة ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي λ.

تعريف

إذا كانت $A = (a_1, \ldots, a_n)$ صف و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ عمود فنعرف الضرب الإقليدي A و B على النحو التالي

$$AB = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

تعريف

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n) و $B = (b_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (n, p) فإن $AB = (c_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, p) حيث $c_{j,k}$ هو نتيجة الضرب الإقليدي للصف j من المصفوفة A مع العمود k من المصفوفة B.

$$c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k}.$$

تعريف

لتكن $(a_{j,k}) = A$ مصفوفة من الدرجة (m, n). يعرف منقول المصفوفة A المصفوفة من الدرجة (n, m) والتي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمدة A على التوالي. و نرمز بها A^T.

تعريف

نقول أن مصفوفة مربعة أنها متماثلة إذا كان $A = A^T$.

خواص

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفات من الدرجة (m, n) فإن

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(kA)^T = kA^T$.
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

العمليات الأولية على المصفوفات

العمليات الأولية على الصفوف هي

1. تغيير ترتيب صفين من المصفوفة
2. ضرف صف بعدد غير صفري
3. ضرب صف بعدد و إضافة الناتج إلى صف آخر.

تعريف

نقول أن مصفوفتين متكافئتين صفيا إذا حصلنا على إحداها من الأخرى بعد إجراء عدد منته من العمليات الأولية على الصفوف. و نكتب $A \sim B$.

نستخدم الرموز التالية

1. $L_{j,k}$ وتعني تبادل الصفين j و k.
2. $r\,L_j$ و تعني ضرب الصف j بالعدد r.
3. $r\,L_{j,k}$ و تعني ضرب الصف j بالعدد r و إضافة الناتج للصف k.

مثال: A+B

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

A+B =

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: ليكن

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد A+B

الحل :

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال: ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A-B

الحل :

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-3 & -3-1 & 2-(-2) \\ 0-(-1) & 1-7 & -6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

مثال: ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

أوجد $A \times B$

شرط الضرب وبما أن $A=2\times2$ و $B=2\times2$

إذاً:

$(2\times2)(2\times2)$ الشرط محقق والمصفوفتان قابلتان للضرب .

$$A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+54 & 2+42 \\ 6+72 & 6+56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 56 & 44 \\ 78 & 62 \end{bmatrix}$$

مثال:-

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال:-

$$2 \times \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times -3 & 2 \times 1 \\ 2 \times 4 & 2 \times 2 \\ 2 \times -1 & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:-

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{tr}(A) = -2+1+(-1) = -2$$

المحددات

خواص المحددات:

1- لا تتغير قيمة المحدد إذا استبدلت كل صفوفه بأعمدته

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2- إذا كان للمحدد صفان متساويان او عمودين متساويين فإنه تكون قيمة المحدد صفر

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3- ان تبديل مكانين صفين او عمودين في المحدد يكافئ ضربه في (1-)

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4- ضرب كل عناصر صف واحد او عمود واحد في أي عدد K يكافئ ضرب كامل المحدد في K

$$\begin{vmatrix} Ka_1 & b_1 & c_1 \\ Ka_2 & b_2 & c_2 \\ Ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5- إذا كانت كل عناصر صف ما أو عمود ما تساوي صفر فإن المحدد نفسه يساوي صفر

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{0}$$

6- إذا كانت العناصر المناظرة لصفين أو عمودين متناسبة فإن المحدد يكون مساوي للصفر

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

7- إذا كان كل عنصر من عناصر العمود رقم (n) أو الصف رقم (n) المحدد عبارة عن مجموع حدين فإنه يمكن التعبير عن المحدد في صورة مجموع محددين يحتوي أحدهما في عموده في رقم(n) على الحدود الأولى من الحدود المذكورة سابقا والثاني على الحدود الثانية وتكون العناصر في باقي الاماكن في كل الحدود الثلاثة هي نفسها

$$\begin{vmatrix} 'a_1 + "a_1 & b_1 & c_1 \\ 'a_2 + "a_2 & b_2 & c_2 \\ 'a_3 + "a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 'a_1 & b_1 & c_1 \\ 'a_2 & b_2 & c_2 \\ 'a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} "a_1 & b_1 & c_1 \\ "a_2 & b_2 & c_2 \\ "a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

8- إذا اضيفت الى عناصر عمود أو صف العناصر المناظرة في عمود آخر أو في صف آخر مضروبة في أي عامل مشترك فإن قيمة المحدد لا تتغير:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix}$$

9- إذا كانت A مصفوفه قطريه أو مثلثيه عليا أو فإن محدد A هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن المحدد :

$$|A| = \underline{1(3)(2)} = 6$$

إشارة المحدد

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

يرمز للمحدد بالرمز Δ

قيمة المحدد :

- إذا كان المحدد من الدرجة الثانية 2×2 فإن قيمته تساوي مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الآخر .

القطر الرئيسي $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

مثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -6(8) - 10(-7) = -48 - (-70) = -48 + 70 = 22$$

- إذا كان المحدد من الدرجة الثالثة 3×3 فيمكن حساب قيمته باستعمال قاعدة الأقطار .
- خطوات ايجاد قيمة المحدد بقاعدة الأقطار :

1- نعيد كتابة العمود الأول والثاني على يمين المحدد .

2- نوجد مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي والقطرين الموازيين له على يمينه كما هو موضح بالصورة التالية :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & c & h \end{array}\right.$$

3- نوجد مجموع حاصل ضرب عناصر القطر الآخر والقطرين الموازيين له على يمينه كما هو موضح بالصورة التالية :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & c & h \end{array}\right.$$

4- نوجد قيمة المحدد بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & c & h \end{array}\right. - \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & c & h \end{array}\right.$$

مثال :

أوجد $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

1- نعيد كتابة المحدد بوضع العمودين الأول والثاني يمين المحدد $\left|\begin{matrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & -4 \\ 5 & -5 \\ 3 & 4 \end{matrix}$

2- نوجد مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار :

$$\left|\begin{matrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & -4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{matrix} \qquad \left|\begin{matrix} -8 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -8 & -4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$-8(-5)2 = 80$
$-4(6)(3) = -72$
$1(0)(4) = 0$

$80 + (-72) + 0 = 8$

$3(-5)(1) = -15$
$4(6)(-8) = -192$
$2(0)(4) = 0$

$-15 + (-192) + 0 = -207$

3- نقوم بطرح المجموع الثاني 207- من المجموع الأول 8

$8 - (-207) = 8 + 207 = 215$

4- إذاً قيمة المحدد $\Delta = 215$

المصفوفة المساعدة او مصفوفة المحددات الصغرى Adj

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من درجة n فإننا نعرف العامل المرافق $\propto_{ij}$ لعنصر a_{ij} ويحسب كالتالي :

$$Adj\,(A) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad , \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j}\,M_{ij}$$

مثال : أوجد Adj المصفوفة التالية :

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد $Adj\ (A)$

نقوم بحذف الصف والعمود الواقع فيهما العنصر ونضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منه ضرب عناصر القطر الآخر مع الأخذ بالاعتبار إشارة المحدد لكل عنصر :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

نأتي بالعنصر x_{11} والذي إشارته حسب المحدد + إذاً نضرب المحدد بـ $+1$

$$C_{11} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = +1(4 - 0) = 4$$

نأتي بالعنصر x_{12} والذي إشارته حسب المحدد − إذاً نضرب المحدد بـ -1

$$C_{12} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1(0 - 2) = 2$$

$$C_{13} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +1(0 - 2) = -2$$

$$C_{21} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1(4 - 0) = -4$$

$$C_{22} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +1(4 - 6) = -2$$

$$C_{23} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1(0 - 2) = 2$$

$$C_{31} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1(1 - 3) = -2$$

$$C_{32} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1 - 0) = -1$$

$$C_{33} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1(1 - 0) = 1$$

مقلوب المصفوفة

يقصد به المقلوب للمصفوفة بحيث يكون حاصل ضرب المصفوفة في مقلوبها يساوى مصفوفة الوحدة .

المصفوفة الشاذة :

المصفوفة الشاذة هي المصفوفة التي ليس لها مقلوب ويمكن تحديد ما إذا كانت

المصفوفة شاذة أو لا إذا كانت $|A| = 0$ فهي مصفوفة شاذة.

إيجاد مقلوب المصفوفة :

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة من القانون التالي : $A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{|A|}$

لحساب مقلوب المصفوفة :

- حساب محدد المصفوفة والتأكد أنه لا يساوى صفر .
- حساب المصفوفة (المرافقة) .
- حساب المقلوب .

خواص مقلوب المصفوفة :

1. مقلوب حاصل ضرب مصفوفتين غير شاذتين يساوى حاصل ضرب مقلوب كل من المصفوفتين.
2. مقلوب منقول المصفوفة يساوى منقول مقلوب المصفوفة .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{|A|}$$

$$C_{11} = +1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1(12 - 6) = 6$$

$$C_{12} = -1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(8 - 6) = -2$$

$$C_{13} = +1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = +1(6 - 9) = -3$$

$$C_{21} = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1(8 - 9) = 1$$

$$C_{22} = +1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +1(4 - 9) = -5$$

$$C_{23} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -1(3 - 6) = 3$$

$$C_{31} = +1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +1(4 - 9) = -5$$

$$C_{32} = -1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(2 - 6) = -4$$

$$C_{33} = +1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +1(3 - 4) = -1$$

$$Adj\,(A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ثانياً نأتي بـ $|A|$:

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

$$= [1(3)(4) + 2(2)(3) + 3(2)(3)] - [3(3)(3) + 3(2)(1) + 4(2)(2)]$$

$$= (12 + 12 + 18) - (27 + 6 + 16)$$

$$= 42 - 49$$

$$= -7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

حل جملة معادلات خطية

درسنا في المحاضرات السابقة المحددات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها المعرفة فوق حقل الأعداد الحقيقية . ندرس في هذه المحاضرة :

حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف غوص.

جملة m معادلة خطية بـ n مجهول :

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

تسمى العناصر a_{ij} المعاملات

وتسمى العناصر b_i المقادير الثابتة

العناصر x_i المجاهل

كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت الجملة متجانسة وإذا كان احدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.

تسمى المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

مصفوفة المعاملات .

والمصفوفة الموسعة $\overline{A}$ **التي هي :**

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \; \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \; \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \; \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

فإذا رمزنا

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبالاستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بالشكل المختصر :

$$AX = B \qquad (4)$$

أن حل جملة المعادلات الخطية (1) يعني إيجاد جميع المتجهات X التي تحقق (1) وهنا نطرح ثلاثة أسئلة :

1- هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل .

2- إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حلا لها ؟

3- كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

حل جملة n معادلة و n مجهول

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

طريقة مقلوب المصفوفة:

من العلاقة (4) : $AX = B$

حيث A مصفوفة المعاملات و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A غير شاذة أي $\Delta \neq 0$ فانه يوجد لـ A معكوس A^{-1}.

لذلك بضرب طرفي العلاقة (4) من اليسار بـ A^{-1} نجد :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

أو

$$\boxed{X = A^{-1}B} \qquad (5)$$

ويكون الحل **وحيدا**. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو العمود X الذي جميع عناصره معدومة . تدعى هذه الطريقة **بالطريقة المصفوفية** لحل جملة المعادلات الخطية.

مثال : حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

إذا فرضنا أن :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

كنا وجدنا في المثال (1) من المحاضرة السادسة أن $\Delta = \det A \neq 0$ وان :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فان :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

طريقة كرامر: CRAMER

أن الصعوبة العملية سابقا كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفة A ولكن الصيغة (5) تسمح بإيجاد طريقة أكثر عملية لإيجاد الحل وتتلخص كما يلي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

حيث Δ_i نحصل عليه باستبدال العمود دي الرتبة i من المصفوفة A بعمود B .

إذا كان $\Delta \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \, , \, i = 1,2,.....,n}$$

الحالة الأولى : $\Delta_i \neq 0 \, , \, i = 1,2,.....,n$ عندئذ جملة المعادلات الخطية (1) مستحيلة الحل.

الحالة الثانية : $\Delta_i = 0 \, , \, i = 1,2,.....,n$ عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1) عدد غير منته من الحلول.

مثال : استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال **السابق**

بما أن $\Delta \neq 0$ فان لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} , i = 1,2,3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$;\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$;\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$;\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = \tfrac{4}{4} = 1$$
$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = \tfrac{4}{4} = 1$$
$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = \tfrac{4}{4} = 1$$

الجواب:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 1$$

طريقـة غوص : GAUSS

تتلخص طريقة غوص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A:B]$.لنذّكر أولاً ببعض المفاهيم الأخرى على المصفوفات وأهمها :

التحويلات الأولية على المصفوفات :

نسمي التحويلات التالية في المصفوفات تحويلات أولية :

1- مبادلة السطر i بالسطر j ونرمز لهذه العملية R_{ij} .

2- ضرب جميع عناصر السطر i بالعدد k ونرمز لهذه العملية بالرمز $R_i(k)$.

3- إضافة إلى عناصر السطر j عناصر السطر i مضروبة بالعدد k ونرمز لهذه العملية $R_{ij}(k)$.

ملاحظة : نرمز بـ $A \approx B$ إذا كانت B تنتج عن A بتحويلات أولية .

تكافؤ مصفوفتين :

نقول عن مصفوفتين A و B أنهما متكافئتين إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بسلسلة من التحويلات الأولية المفروضة .

نقول عن مصفوفة A إنها سطرية مدرجة إذا تحقق فيها الصفات الآتية :

- الأسطر غير الصفرية في المصفوفة A **تسبق الأسطر الصفرية (إن وجدت).**

- العنصر الرائد لكل سطر يقع على يمين العنصر الرائد للسطر الذي يسبقه**. حيث يعرف العنصر الرائد في السطر الأول بأنه العنصر الأول الذي قيمته يساوي الواحد .**

, طريقة غوص في حل جملة من المعادلات الخطية, تتلخص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A:B]$ وتكون على الشكل الآتي :

- نكتب المصفوفة الموسعة $H=[A:B]$ لجملة المعادلات الخطية المفروضة.
- نوجد المصفوفة السطرية المدرجة المكافئة للمصفوفة H وذلك بأجراء بعض التحويلات الأولية عل الأسطر .

ملاحظة: تتلخص طريقة غوص بتحويل مصفوفة المعاملات الى مثلثية علوية بالتحويلات الاولية السابقة

مثال : استخدم طريقة GAUSS لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

تحويل المصفوفة الموسعة إلى الشكل المتدرج حسب الصفوف:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad L2 \Leftarrow L2 - 1/2\, L1 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad L3 \Leftarrow L3 - 1/2\, L1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) \quad L3 \Leftarrow L3 - 1/3\, L2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$(1)\begin{cases} 2 \times x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \frac{3}{2} \times x_2 + \frac{1}{2} \times x_3 = 2 \\ \frac{4}{3} \times x_3 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

- أوجد المتغير x_3 من المعادلة 3من (1):

$$\frac{4}{3} \times x_3 = \frac{4}{3}$$
$$\mathbf{x_3 = 1}$$

- أوجد المتغير x_2 من المعادلة 2من (1):

$$\frac{3}{2} \times x_2 = 2 - \frac{1}{2} \times x_3 = 2 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$
$$\mathbf{x_2 = 1}$$

- أوجد المتغير x_1 من المعادلة 1من (1):

$$2 \times x_1 = 4 - x_2 - x_3 = 4 - 1 - 1 = 2$$
$$\mathbf{x_1 = 1}$$

الجواب:

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

الحل العام: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

طريقـة غوص-جوردان GAUSS-JORDAN

تتلخص بإجراء بعض التحويلات الأولية على المصفوفة الموسعة $[A:B]$

و ذلك بتحويل المصفوفة A الى المصفوفة الحيادية I $\quad [\,I:X\,] \sim [A:B]$

مثال : استخدم طريقة GAUSS-JORDAN لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

تحويل المصفوفة الموسعة إلى الشكل المتدرج حسب الصفوف:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) L1 \Leftarrow L1/2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) L2 \Leftarrow L2 - 1\ L1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) L3 \Leftarrow L3 - 1\ L1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) L2 \Leftarrow L2/3/2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) L3 \Leftarrow L3 - 1/2\ L2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) L3 \Leftarrow L3/4/3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) L2 \Leftarrow L2 - 1/3\ L3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) L1 \Leftarrow L1 - 1/2\ L3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) L1 \Leftarrow L1 - 1/2\ L2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(1)\begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 1 \\ x_3 & = 1 \end{cases}$$

- أوجد المتغير x_3 من المعادلة 3من (1):

  $x_3 = 1$
- أوجد المتغير x_2 من المعادلة 2من (1):

  $x_2 = 1$
- أوجد المتغير x_1 من المعادلة 1من (1):

  $x_1 = 1$

الجواب:

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

الحل العام: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

القيم الذاتية للمصفوفات

وبصورة عامة إذا كان لدينا n معادلة فإنه يمكننا

كتابتها بدلالة مصفوفة A وشعاع X كما يلي:

$$A \cdot X = \lambda X$$

حيث أن: A هي مصفوفة مربعة من المرتبة $n \cdot n$ و X هو الشعاع العمود

والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$[A - \lambda I] \cdot X = 0$$

وهذا يعني أنه يجب أن يكون محددها معدوماً. أي نشترط أن يحقق المحدد الشرط

$$|A - \lambda I| = 0$$

وبما أن هذا المحدد هو من المرتبة $n * n$ وان عناصر قطره الرئيسي تساوي $(a_{ii} - \lambda)$

فإن العلاقة تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وعندما نقوم بحساب هذا المحدد فإننا سنحصل منه على كثير حدود مميز من المرتبة n بالنسبة للوسيط λ ويكون له الشكل التالي:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots + a_n\lambda^n = 0$$

وتسمى بمعادلة القيم الذاتية للمصفوفة A وعندما نقوم بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ فإننا سنحصل على n جذراً لها: أي إننا سنحصل منها على n قيمة لـ λ وسنرمز لها بالرموز :

$$\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \dots\dots\dots \ \lambda_n$$

وتسمى هذه الجذور بالقيم الذاتية للمصفوفة A، وهي تستخدم كثيراً في المسائل العلمية.
وإن هذه القيم الذاتية قد لا تكون مختلفة عن بعضها البعض بل قد يكون بعضها مكررا عدة مرات

إيجاد الشعاع X الذي يحقق العلاقة مقابل كل قيمة من القيم الذاتية λ_k .

ولذلك نأخذ أحد القيم الذاتية وليكن $\lambda = \lambda_k$ ونعوضها في المعادلة فإننا سنحصل على المعادلة المحددة التالية:

$$[A - \lambda_k I] * X = 0$$

وبما أن قيمة λ_k تجعل المصفوفة $[A - \lambda_k I]$ مصفوفة شاذة فإنه يمكننا الحصول على عدد لانهائي من الحلول المقبولة لـ X . وإذا أخذنا أحد تلك الحلول وليكن X_k المقابل للقيمة الذاتية λ_k فإنه سيكون على شكل شعاع عمود كمايلي:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ويسمى هذا الشعاع X_k بالشعاع الذاتي للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية λ_k

مثال:

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المقابلة لها للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: نكتب المعادلة المميزة لـ A كما يلي:

$$[A - \lambda I] \cdot X = 0$$

ثم نضع محدد المصفوفة اليسرى مساويا للصفر فنحصل على أن :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

فنحصل على كثير حدود من المرتبة الثانية بالنسبة لـ λ وهو:

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 3 * 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ λ نحصل على الجذرين التاليين:

$$\lambda_1 = 4 \qquad\qquad \lambda_2 = -2$$

ولإيجاد الأشعة الذاتية المقابلة لهما، نأخذ كل قيمة

فنجد أنه عندما نأخذ $\lambda_1 = 4$ فإن

مصفوفة المعادلة المميزة تساوي :

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الأشعة الذاتية المقابلة لهذه القيمة نكتب المعادلة المميزة كما يلي :

$$[A - \lambda_1 I] \cdot X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

وهما عبارة عن معادلة واحدة

نأخذ أحدهما ولتكن الأولى: $-3x_1 + 3x_2 = 0$

فنحصل منها على أن: $x_1 = x_2$

أي أن العنصر x_1 يساوي x_2 وله نفس الإشارة

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة ويكون لها نفس الاتجاه .

وحتى نحدد أحد هذه الحلول نضع كيفياً $x_1 = 1$

فنحصل على أن: $x_2 = 1$

وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي الأول والذي نرمز له بـ X_1 وهو $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ وهو يقابل $\lambda_1 = 4$.

أما عندما نأخذ القيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ فإننا نجد أن المصفوفة:

$$[A - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم نكتب المعادلة الذاتية كمايلي:

$$[A - \lambda_2 I]X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ومنها نحصل على المعادلتين

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

وهما عبارة عن معادلة واحدة، وإذا أخذنا أحدهما نجد أن:

$$x_1 = -x_2$$

وبإعطاء x_1 أية قيمة كيفية، فإنه يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على لانهاية من الحلول المقبولة كمايلي:

نضع بشكل كيفي $x_1 = 1$ فنحصل على أن $x_2 = -1$، وبذلك نحصل على الشعاع الذاتي الأول X_2

المقابل للقيمة الذاتية الثانية $\lambda_2 = -2$ وهو

$$\mathrm{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$