Distributions et Analyse de Fourier **Contrôle C.** Durée 1h:10mn

Nom :........................ **Prénom :**........................ **Groupe :**..........

I. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact dans Ω. Donner la relation entre les espaces suivants : $D(\Omega)$, $D'(\Omega)$, $L^1_{loc}(\Omega)$, $L^1(\Omega)$, $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $D_K(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$.

$D_K(\Omega) \subset D(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) \subset C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$

$\mathcal{E}'(\Omega) \subset D'(\Omega)$, $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$

II. Qu'est ce qu'une distribution régulière?

T est régulière $\Leftrightarrow$

$\exists f \in L^1_{loc}(\Omega) : \langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$

III. Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et H la fonction de Heaviside.

1. Justifier, puis définir l'opération $f.T_H$.

$f \in C^\infty(\Omega)$, donc $f\,T_H$ est bien défini

$\langle f T_H, \varphi \rangle = \langle T_H, f\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x) f(x) \varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

2. Calculer $(f.T_H)' - \lambda(f.T_H)$.

$\langle (f T_H)', \varphi \rangle = -\langle f T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\varphi'(x)\,dx$

$= -e^{\lambda x}\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\varphi(x)\,dx \overset{\varphi(\infty)=0}{=} \varphi(0) + \lambda\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\varphi(x)\,dx$

d'autre part :

$\langle \lambda f T_H, \varphi \rangle = \lambda \langle T_H, f\varphi \rangle = \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\varphi(x)\,dx$

Donc : $\langle (f T_H)' - \lambda f T_H, \varphi \rangle = \langle (f T_H)', \varphi \rangle - \langle \lambda f T_H, \varphi \rangle$

$= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow (f T_H)' - \lambda f T_H = \delta_0$ (au sens des distributions)

3. Que peut on déduire au propos de la dérivabilité de $f.H$ (en tant que fonction) ?
Puisque $(f.T_H)'$ est en fonction de δ_0 on déduit que la fonction $f.H$ n'est pas dérivable

Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux avec une justification brève ou un contre exemple. (Toute réponse non justifiée n'est pas prise en considération)

(a.) Toute distribution est régulière. faux

par exemple δ_0 : $\nexists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

(b.) Toute distribution régulière est d'ordre zéro. vrai

Soit T_f une distribution régulière, K compact de Ω

$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \int_K |f(x)\varphi(x)|\,dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|\,dx$

$= C \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \Rightarrow T_f$ est d'ordre 0. $\left(C = \int_K |f(x)|\,dx < \infty \text{ car } f \in L^1_{loc}(\Omega) \right)$

(c.) Toute distribution d'ordre zéro est régulière. faux

par exemple δ_0, n'est pas régulière mais
$|\langle \delta_0, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \Rightarrow \delta_0$ est d'ordre 0.
$(C = 1)$

(d.) Existe-il $\varphi \in D(]-1, 1[)$ tel que φ est égale à 10 au voisinage de 1 ? faux

$\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[) \Rightarrow \exists [a,b] \subset]-1,1[$: $\operatorname{Supp} \varphi \subset [a,b]$
$\Rightarrow \varphi$ au voisinage de 1 est nul

(e.) Soit $M \in \mathbb{R}$. Existe-il $\varphi \in D(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(x) = M^2$ si $|x| \leqslant \frac{1}{4}$ et $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geqslant \frac{1}{2}$? vrai

On a le Théorème suivant :
soient $K \subset \theta \subset \Omega$: K compact, θ ouvert. Alors $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq :

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(x) \leq 1 & \text{sur } \Omega \\ \varphi = 1 & \text{sur } K \\ \varphi = 0 & \text{sur } \theta^c \end{cases}$$

Il suffit donc de prendre $\Omega = \mathbb{R}$, $K = [-1/4, 1/4]$, $\theta =]-1/2, 1/2[$ pour obtenir $\tilde{\varphi}$, puis prendre $\varphi = M^2 \tilde{\varphi}$