جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير وعلوم الاقتصادية والتجارية

بعنوان:

محاضرات في رياضيات المؤسسة

من إعداد الأستاذ: عيشوش محمد الحافظ

الموسم الجامعي 2021-2022

فهرس المحتويات

يدخل هذا العمل المتواضع في صدد تذليل بعض العقبات والعراقيل التي تصادف طلبتنا الجامعيين في بعض المقاييس الكمية، ولعل من أهمها مقياس رياضيات المؤسسة والذي تكمن صعوبته في اعتماده على الطرق الرياضية بشكل مطلق مما يتطلب تركيزا أدق وجهدا اكبر.

إضافة إلى أن المكتبة العربية عموما والجزائرية خصوصا تعاني نقصا ملحوظا في المراجع الأساسية في ميدان الاقتصاد الرياضي واستخداماته في مجال الإدارة ، ويمثل هذا العمل محاولة متواضعة لسد هذا العجز ومساعدة الطلبة على الفهم والإدراك وبالتالي التحكم الجيد في استعمال الطرق والأدوات الرياضية في التحليل الاقتصادي .

لقد حاولنا في إعداد هذا العمل، التبسيط قدر الإمكان والاستعانة بقدر واسع من الأمثلة، والابتعاد عن التجريد والنظريات الرياضية المعقدة ، فاستخدمنا مختلف النماذج الرياضية في ابسط صورة لها، حتى نساهم في نزع الغموض والتخوف الذي عادة ما يصاحب دراسة هذا الفرع في ميدان العلوم الاقتصادية.

حيث قمنا بتقسيم هذا العمل إلى اربعة فصول تدخل ضمن المحاور الكبرى في مقياس رياضيات المؤسسة وكان الفصل الاول بعنوان بناء البرنامج الخطي والثاني حل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية اما الثالث حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس واخيرا الفصل الرابع بعنوان مشكلة النقل.

الفصل الأول :

صياغة البرنامج الخطي

البرمجة الخطية هي أسلوب أو طريقة رياضية صممت لمساعدة المسيرين في تخصيص أو استعمال الموارد المتاحة للمؤسسة الاقتصادية استعمالا امثلا.

قبل شرح طرق حل مسائل البرمجة الخطية سوف نتعرض أولا لكيفية وضع أو صياغة البرنامج الخطي ، أي تحويل المشكلة الاقتصادية من صورتها النظرية إلى شكل نموذج رياضي يسمى بالبرنامج الخطي يمكن حله باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

يمكن تلخيص أنواع المسائل الاقتصادية التي يمكن استخدام البرمجة الخطية في حلها كالأتي :

عادة ما يطرح على المؤسسة الاقتصادية تحقيق أهداف اقتصادية عامة ، كتحقيق أكبر ربح ممكن، اكبر رقم أعمال ممكن ، اكبر إنتاج ممكن أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن .

هذا الهدف يرمز له بمتغير تـــابع عادة ما يكون دالة في عدد من المتغيرات المستقلة، ويسمى **بدالة الهدف** أو **الدالة الاقتصادية** (*la fonction economique*) ، ويكون مطلوبا من المؤسسة الاقتصادية إيجاد قيمة مثلى (*une valeur optimale*) لهذا المتغير ، يعني تعظيم *maximiser* الدالة الاقتصادية أو تخفيضها إلى أدنى حد ممكن *minimiser* ، فاذا رمزنا للهدف المراد تحقيقه بالرمز (Z) ورمزنا للعوامل التي تؤثر فيه بالرمز $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_N$ فان المطلوب يكون :

$$max\ Z = f\,(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$$

أو

$$min\ Z = f\,(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$$

إن تحقيق هذا الهدف يكون طبعا ضمن حدود معينة ، وهذه الحدود تمثل الإمكانيات أو الموارد المالية، البشرية والمادية المتاحة للمؤسسة والتي تنشط في إطارها، أي أن تحقيق هذا الهدف يكون مقرونا ومحددا بحجم الموارد التي هي بحوزة المؤسسة.

هذه الموارد المتاحة للمؤسسة أو الإمكانيات تشكل قيودا على المؤسسة في سبيل تحقيق أهدافها ، وهذه القيود تسمى بالقيود الفنية ، وعادة ما يعبر عنها في شكل متباينات أو معادلات

$(\geq , \leq , =)$ لمجموعة من المتغيرات المستقلة (X_j) ، والتي نريد إيجاد قيمة لها عن طريق حل البرنامج الخطي .

إن حل هذا النوع من المشكلات الاقتصادية عن طريق استعمال البرمجة الخطية يتطلب إذن:

-وضع المشكلة الاقتصادية محل الدراسة في شكل برنامج (نموذج) رياضي خطي متكون من دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) وقيود الموارد المفروضة على المؤسسة من اجل تحقيق دالة هدفها.

ثم حل البرنامج الخطي عن طريق إيجاد قيم المتغيرات المستقلة والتي تعطي قيمة مثلى (*min*، *max*) لدالة الهدف مراعاة القيود الفنية المفروضة على المؤسسة.

شروط استخدام البرمجة الخطية .

هناك شروط يجب توفرها في المشكلة التي نريد حلها بواسطة البرمجة الخطية ونذكر منها:

-**شرط الخطية:** يجب أن تكون هناك علاقة خطية بين العوامل المستقلة المؤثرة في المشكلة المدروسة والتي يرمز لها بالرمز X_j والمشكلة المدروسة في حد ذاتها والتي نرمز لها بالمتغير التابع Y ، ونعبر عن هذه العلاقة بالصيغة :

$$Y = a + b X_i$$

-**وحدة الهدف:** يجب أن يسعى نموذج البرمجة الخطية إلى تحقيق هدف وحيد يكون إما في شكل تعظيم أو تدنية لهذا الهدف .

-**الصياغة الكمية للمشكلة:** يجب ان يكون ممكنا التعبير عن العلاقة بين المتغيرات التي تحتويها المشكلة تعبيرا كميا إما في شكل معادلات او متراجحات او في الشكلين مع بعضهما .

-**تعدد القيود الفنية:** تشمل المشكلة المدروسة مجموعة من القيود الفنية ، والتي تؤثر على حرية متخذ القرار للوصول إلى الحل الأمثل، وهذا يفترض التضحية ببعض بدائل الحل، وتتعلق هذه القيود بمدخلات النشاط والإمكانيات المتاحة مثل المواد والتجهيزات، الطاقة الإنتاجية المتاحة ، الموارد المالية ، الموارد البشرية، وبصفة عامة كل عناصر الإنتاج وظروف العمل المستعملة.

تعدد بدائل الحل: يوفر نموذج البرمجة الخطية لمتخذ القرار خيارات مختلفة لحل النموذج حتى يتمكن من اختيار أفضلها ، الذي يسمى الحل الأمثل ، وهو ذلك الحل الذي يعظم دالة الهدف أو يدنيها إلى أدنى قيمة لها في حدود القيود المتوفرة .

عدم السالبية: يفترض إن تكون قيم كل مؤشرات البرنامج غير سالبة ، معبرة في ذلك على عدم سلبية المؤشرات الاقتصادية.

مراحل صياغة البرنامج الخطي .

ان صياغة البرنامج الخطي هو أعظم خطوة في البحث عن الأمثلية ، ويقصد به كما اشرنا سابقا الى تحويل المسألة من كلام مسرود في تعابير ادبية الى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح يتكون من دالة الهدف وقيود في شكل متراجحات او معادلات او هما معا .

وصياغة البرنامج نتبع المراحل التالية:

أولا: تحديد المتغيرات $(x_1, x_2, \dots x_n)$

وهي المجاهيل التي نبحث عن قيمها والتي يحددها السؤال الذي نريد الاجابة عليه عند حل المسألة ونرمز لها بـــ $x_1, x_2, \dots x_n$

ثانيا :تحديد دالة الهدف $(\max z = c_1x_1+c_2x_2+ \dots + c_nx_n)$

تعبر هذه الدالة على الهدف الذي تسعى المؤسسة لبلوغه، وبصفه عامه فقد يكون هذا الهدف في حالة التعظيم (max) : تعظيم الربح اوتعظيم الايرادات او تعظيم الانتاج ..

أو قد يكون في حالة التدنئة (min) : تخفيض التكاليف ...

فاذا كان هدف المؤسسة هو تحقيق اقصى ربح ممكن مثلا، فان دالة الهدف سوف تتكون من ربح كل وحدة منتجة من كل نوع c_1 مضروبا في الكمية المنتجة لنفس ذلك النوع x_1 بالاضافة الى ربح كل وحدة منتجة من كل نوع c_2 مضروبا في الكمية المنتجة لنفس ذلك النوع x_2 وهكذا...

ثالثا : تحديد القيود :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات $(x_1, x_2, \dots x_n)$ والإمكانيات المتاحة $(b_1, b_2, \dots b_m)$ في صور قيود خطية ، وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج (x) من كل مورد (a) من الموارد المتاحة المحدودة (b) بشكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط لكل منهما.

فاذا فرضنا مثلا انه يوجد لدى مؤسسة ما 180 كغ من مادة الحديد متاحة يوميا في الورشة الأولى ، وإذا كان بامكان هذه الورشة انتاج كرسي واحدة باستعمال 3كغ، واذا رمزنا الى الكمية المنتجة من الكراسي بـــ x_1 ، وطلب منا تحديد الكمية x_1 التي يمكن انتاجها يوميا في الورشة الاولى.

رياضيا يمكن استعمال التعبير التالي:

$$3x_1 = 180$$

أي $x_1 = 60$

وهذا معناه انه يمكن إنتاج 60 كرسي يوميا، وهذا يترتب عنه وجوب استغلال كل الكمية المتوفرة من المادة الأولية ، إلا انه يستحيل واقعيا تحقيق ذلك لأسباب عديدة ومنها عدم صلاحية كل الكمية المتوفرة من المادة الأولية أو ضياع جزء منها ... وحتى ولو كانت كل الكمية متوفرة وبنوعية جيدة، قد نستعمل جزءا منها فقط وذلك في حالة عدم توفر المواد الأولية الأخرى كالخشب مثلا لانتاج الكراسي لذلك اليوم.

لهذا فان التعبير الرياضي الانسب للقيد يكون

$$3x_1 \le 180$$

رابعا: شرط عدم السالبية : $x_n \geq 0$.

إذ يجب أن تكون كل المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

وسوف نتعرض الآن إلى بعض الأمثلة والتي ستساعد في التوضيح :

مثال 01:

تقوم إحدى الشركات الصناعية بإنتاج ثلاث أنواع من المنتجات A، B، C وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يوميا من كل منتج بحيث تحصل على اكبر ربح ممكن.

ويتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج المرور على ثلاث عمليات إنتاجية 1، 2، 3 والجدول التالي بين الزمن بالدقائق المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة بالنسبة لكل عملية إنتاجية وكذا الربح المحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعملية الإنتاجية.

والمطلوب صياغة البرنامج الخطي الذي يحقق اكبر ربح ممكن.

العملية	الزمن المطلوب لكل وحدة انتاجية من المنتوجات الثلاثة في كل عملية انتاجية			الزمن المتاح للانتاج (دقيقة/ يوم)
	منتوج A	منتوج B	منتوج C	
1	2	2	3	420
2	5	0	4	440
3	3	6	0	465
ربح الوحدة الواحدة	5	4	7	

<u>الحل:</u>

من المعلومات في الجدول أعلاه يمكن صياغة البرنامج الخطي بأتباع المراحل الأربعة السابقة الذكر .

<u>أولا:</u> تحديد المتغيرات

يتطلب الأمر إنتاج اكبر حد ممكن من المنتوجات للأنواع الثلاثة A و B و C خلال الوقت المتاح للعمليات الأولى والثانية والثالثة من اجل أن نحصل على اكبر ربح ممكن .

نفرض ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتوج A هي X_1 .

نفرض ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتوج B هي X_2 .

نفرض ان عدد الوحدات التي سيتم انتاجها من المنتوج C هي X_3 .

<u>ثانيا:</u> تحديد دالة الهدف

نريد في هذه الحالة تحقيق أكبر ربح ممكن، فيكون بذلك الربح الاجمالي هو ضرب جميع الوحدات المنتجة لكل منتوج في سعر ربح الوحدة الواحدة ، ثم نجمع مع بعض الربح المتحصل عليه من كل منتوج، ويعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة :

$$MAX\ Z= 5x_1+ 4x_2 +7x_3$$

<u>ثالثا:</u> تحديد القيود

✓ **القيد الأول (قيد العملية** 1) : إن أقصى زمن متاح للعملية الأولى 420 دقيقة يوميا (ليس بالضروري استغلال كامل الزمن المتاح).

وحيث أن : الوحدة الواحدة من المنتوج A تحتاج لتصنيعها في العملية الأولى 2 دقيقة .

الوحدة الواحدة من المنتوج B تحتاج لتصنيعها في العملية الأولى 2 دقيقة .

الوحدة الواحدة من المنتوج C تحتاج لتصنيعها في العملية الأولى 3 دقائق .

وبالتالي : يمكن صياغة القيد الأول كما يلي :

$$2x_1+ 2x_2 + 3x_3 \leq 420$$

✓ **القيد الثاني (قيد العملية** 2) : إن أقصى زمن متاح للعملية الثانية 440 دقيقة يوميا.

وحيث أن : الوحدة الواحدة من المنتوج A تحتاج لتصنيعها في العملية الثانية 5 دقائق .

الوحدة الواحدة من المتوج B لاتحتاج أي زمن لتصنيعها في العملية الثانية .

الوحدة الواحدة من المنتوج C تحتاج لتصنيعها في العملية الثانية 4 دقائق .

وبالتالي : يمكن صياغة القيد الثاني كما يلي :

$$5x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 440$$

أي

$$5x_1 + 2x_3 \leq 440$$

✓ **القيد الثالث (قيد العملية** 3) : إن أقصى زمن متاح للعملية الثالثة 465 دقيقة يوميا.

وحيث أن : الوحدة الواحدة من المنتوج A تحتاج لتصنيعها في العملية الثالثة 3 دقائق.

الوحدة الواحدة من المنتوج B تحتاج لتصنيعها في العملية الثالثة 6 دقائق.

الوحدة الواحدة من المنتوج C لا تحتاج أي زمن لتصنيعها في العملية الثالثة.

دقائق .

وبالتالي : يمكن صياغة القيد الثالث كما يلي :

$$3x_1 + 6x_2 + 0x_3 \leq 465$$

أي

$$3x_1 + 6x_2 \leq 465$$

رابعا: شرط عدم السالبية.

ان عدد الوحدات (x_1 , x_2 , x_3) من الممكن ان تكون سالبة وهذا لا يجوز منطقيا لانها تعبر عن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها، وبالتالي يجب ان تكون ذات قيمة موجبة اوان لا تنتج نهائيا فتكون قيمتها مساوية للصفر، لذلك يوضع شرط عدم السالبية كالتالي:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

وعليه يكتب البرنامج الخطي بالشكل التالي :

$$MAX\ Z = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 420 \\ 5x_1 + 2x_3 \leq 440 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 465 \end{cases}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

<u>مثال 02:</u>

تنتج احدى مؤسسات النجارة المنتوجات التالية :

الخزائن، المكاتب، الكراسي.

تمر هذه المنتوجات عبر ثلاث ورشات:

- الورشة الاولى طاقة العمل القصوى بها هي 32 ساعة عمل يوميا.
- الورشة الثانية طاقة العمل القصوى بها هي 24 ساعة يوميا.
- الورشة الثالثة طاقة العمل القصوى بها هي 16 ساعة عمل يوميا.

تسعى المؤسسة لتحقيق أعظم ربح ممكن، وبهذا الصدد جمعت المعطيات التالية:

- انتاج وحدة واحدة من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعة عمل في الورشة الأولى و 2 ساعة عمل في الورشة الثانية، 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة .
- انتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني تتطلب 4 ساعة عمل في الورشة الأولى و 4 ساعات عمل في الورشة الثانية و 2 ساعة عمل في الورشة الثالثة.
- انتاج وحدة واحدة منة المنتوج الثالث تتطلب 5 ساعات عمل في الورشة الأولى و 3 ساعات عمل في الورشة الثانية و ساعة عمل واحدة في الورشة الثالثة.

ان ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الأول هو 200 دج، وربح الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني هو 150 دج ، وربح الوحدة الواحدة من المنتوج الثالث هو 120 دج.

المطلوب:

اوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها ايجاد الكميات الواجب انتاجها من كل منتوج لاجل تعظيم ربح هذه المؤسسة.

الحل:

اولا : تحديد المتغيرات

بما ان المسؤسسة تبحث عن الكميات الواجب انتاجها من كل منتوج لتعظيم ربحها، لذلك فان المجاهيل هي **عدد الخزائن وعدد المكاتب وعدد الكراسي.**

ومنه نضع:

X_1: عدد الخزائن

X_2: عدد المكاتب

X_3: عدد الكراسي

ثانيا : تحديد دالة الهدف

يمكن الاستعانة بجدول المسألة وهو جدول مساعد يحتوي على كل عناصر القيود وعناصر دالة الهدف .

جدول المسألة:

	المنتوج X_1	المنتوج X_2	المنتوج X_3	الطاقة القصوى
الورشة الأولى	4	4	5	32
الورشة الثانية	2	4	3	24
الورشة الثالثة	2	2	1	16
ربح الوحدة الواحدة	200	150	120	

يظهر الجدول ان:

ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الاول هو 200 دج ، فاذا تم انتاج x_1 وحدة فان الربح هو $200\ x_1$ بالنسبة للمنتوج الاول ، وهكذا بالنسبة لباقي المنتوجات .

ومنه نستنتج دالة الهدف:

$$MAX\ Z = 200\ x_1 + 150\ x_2 + 120\ x_3$$

ثالثا : تحديد القيود

يلخص الجدول معطيات المسألة ، فعلى سبيل المثال بالنسبة للورشة الاولى :

- ✓ انتاج **وحدة واحدة** من المنتوج الأول x_1 يتطلب **4 ساعات** عمل .
- ✓ انتاج **وحدتـــــين** من المنتوج الأول x_1 يتطلب **4 x 2** **ساعة** عمل .
- ✓ انتاج **الكـــمية X** من المنتوج الأول x_1 يتطلب **$4\ X_1$** **ساعة** عمل .

واذا تم انتاج **وحدة واحدة** من كل منتوج فذلك يتطلب :

$(5 \times 1) + (4 \times 1) + (4 \times 1) = 13$ ساعة عمل ، بينما الطاقة القصوى للورشة الاولى هي 32 ساعة عمل.

فاذا اردنا انتاج **الكميات** (x_1, x_2, x_3) من كل منتوج فانه يتطلب :

$$4x_1 + 4\,x_2 + 5x_3$$

ولا يجب ان يتجاوز **32 ساعة** عمل والتي هي الطاقة القصوى، ومنه نكتب:

$$4x_1 + 4\,x_2 + 5x_3 \leq 32$$

ومنه نستنتج باقي القيود:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4\,x_2 + 5x_3 \leq 32 \\ 2x_1 + 4\,x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + 2\,x_2 + 1x_3 \leq 16 \end{cases}$$

رابعا: شرط عدم السالبية.

بما ان الكميات مستحيل ان تكون سالبة نكتب:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

وعليه يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل:

$$MAX\ Z = 200\ x_1 + 150\ x_2 + 120\ x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4\ x_2 + 5x_3 \leq 32 \\ 2x_1 + 4\ x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + 2\ x_2 + 1x_3 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

ونكون قد انتقلنا من الشكل الوصفي للمسألة الى الشكل الرياضي وهو ما يصطلح عليه **ببناء البرنامج الخطي** .

مثال 03 :

مؤسسة منجمية تستغل 3 مناجم بإحدى الولايات، اذ تقوم بتصفية المعدن وفصل إلى نوعين : معدن خام قليل الجودة ، ومعدن خام عالي الجودة.

اذا علمت ان الطاقة الإنتاجية لكل نوع حسب كل منجم، وكذا تكلفة الإنتاج اليومية معروضة حسب الجدول التالي:

الطـــــاقة / المنـــاجم	الطاقة الانتاجية		التكلفة
	النوع الاول طن/يوم	النوع الثاني طن/يوم	10^3 دج / يوم
المنجم 1	4	4	20
المنجم 2	4	6	22
المنجم 3	6	1	18

وأنها التزمت مع زبائنها بتسليم على الأقل 65 طن من النوع الأول و 54 طن من النوع الثاني.

المطلوب:

إيجاد البرنامج الخطي الذي من شانه **تحديد عدد الأيام** التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع للوفاء بالتزامات هذه الشركة **بأقل تكلفة ممكنة**.

الحل:

اولا : تحديد المتغيرات:

بما ان المؤسسة تبحث عن عدد الأيام التي يعملها كل منجم للوفاء بالتزامات ه فستكون المجاهيل هي عدد الأيام التي يشتغلها المنجم 1، المنجم 2، ثم المنجم 3 .

ومنه نضع:

X_1: عدد للمنجم 1

X_2: عدد للمنجم 2

X_3 : عدد للمنجم 3

إضافة إلى أن المؤسسة في هذه الحالة تريد تدنية التكاليف (min) ، ونلاحظ في المسألة أن التكاليف مرتبطة بعدد الأيام حسب معطيات الجدول، فكل ما اشتغلت المؤسسة أياما اقل انخفضت التكاليف والعكس ... لذلك فمن المنطقي أن يكون المتغير هو عدد الأيام التي يشتغلها كل منجم على حدى، فتكون المتغيرات (x_1 , x_2 , x_3) هي عدد الأيام التي يشتغلها كل من المنجم (1، 2، 3) على الترتيب .

ثانيا : تحديد دالة الهدف

نلاحظ أن التكلفة الإجمالية هي مجموع تكلفة اليوم الواحد مضروبا في عدد الأيام الخاص بكل منجم ، وحسب المسألة يتضح أن هدف المؤسسة هو تدنية هذه التكاليف ، ومنه تصاغ داله الهدف بالشكل التالي :

$$MIN\ Z = 20\,x_1 + 22\,x_2 + 18\,x_3$$

ثالثا : تحديد القيود

من خلال الجدول نلاحظ ان المؤسسة لو تشتغل ليوم واحد فقط في المناجم الثلاثة ، فستكون طاقتها الانتاجية (4+ 4+ 6 = 14طن) للمعدن من النوع الاول ، و (4+ 6 +1 = 11 طن) للمعدن من النوع الثاني ، لكن المؤسسة مقيدة بالتزامها مع زبائنها، بتسليم على الأقل 65 طن من النوع الأول و 54 طن على الاقل من النوع الثاني للمعدن .

ومنه فان **القيد الاول** هو الالتزام ب 65 طن من النوع الأول **على الاقل** ونكتب:

$$4\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 \geq 65$$

ومنه فان **القيد الثاني** هو الالتزام ب 54 طن من النوع الثاني **على الاقل** ونكتب:

$$4\,x_1 + 6\,x_2 + 1\,x_3 \geq 54$$

رابعا: شرط عدم السالبية.

من المنطقي ان لا يكون عدد الايام سالب ومنه نكتب:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

فيصبح البرنامج الرياضي بالشكل التالي:

$$MIN\ Z = 20\,x_1 + 22\,x_2 + 18\,x_3$$

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 \geq 65 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 + 1\,x_3 \geq 54 \end{cases}$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0$$

مســـائل اخرى:

تمرين 01 :

حاول أحد خريجي كلية الفلاحة من جامعة الجلفة، التوصل إلى خليط معين من مادتين غذائيتين للدواجن A وB ، بحيث يتحقق في المزيج شروط التغذية المثالية بأقل تكلفة ممكنة.

لنفرض أن شروط التغذية المطلوبة أن تتحقق كحد أدنى لوحدة التغذية كأتي : بروتينات 36 وحدة، دهون 32 وحدة ، سكريات 40 وحدة، لنفرض أن الوحدة من المادة A تحتوي على وحدة واحدة من البروتين، و وحدتين من الدهون، و5 وحدات من السكريات، بتكلفة قدرها وحدة نقدية،كما أن الوحدة من B تحتوي على ثلاث وحدات بروتين ووحدة دهون، و وحدة سكريات، بتكلفة 0.6 وحدة نقدية.

المطلوب:

يرغب خريج الزراعة بتحديد الخليط الأمثل من A وB في وحدة التغذية و التي يتحقق فيها الشروط المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة.

تمرين 02:

تنتج شركة CONDOR نوعين من التلفزيونات (T42.T32) في ثلاثة مصانع في كل من البرج وسطيف والمسيلة ، بحيث ينتج المصنع البرج ، 40 وحدة من T32و 35 وحدة من T42 يوميا و مصنع سطيف ينتج 65 وحدة من T32 يوميا و بدون إنتاج T42، كما ينتج المصنع المسيلة 53 وحدة من T42يوميا بدون T32، تكلفة تشغيل مصانع الولايات الثلاثة هي 210.000 ، 190.000، 182.000 وحدة نقدية في اليوم .

المطلوب:

شكل البرنامج الخطي الذي يحدد عدد الأيام (بما فيها أيام العطل) التي يجب أن يعملها كل مصنع خلال الشهر القادم لاستعمال خطة الإنتاج المقدرة (T32:1100 ، T42:1500) بأقل تكلفة، مع افترض أن تعاقدات العمال تنص على أن يحصل العامل على أجر اليوم الكامل بمجرد دفع المصنع.

تمرين 03:

خصص مدير وكالة سياحية مبلغا ماليا قدره 120000 و.ن للإعلان في السنة القادمة، البرنامج الإعلاني المقترح وضع خطة لنشر الإعلان في جريدتي الخبر والشروق ، حيث أن تكلفة الإعلان في جريدة الخبر 2000 و.ن وفي جريدة الشروق 5000 و.ن ، من الخبرة السابقة يرى مدير المبيعات أنه يجب نشر الإعلان لفترة لاتقل عن يومين في الجريدة الأولى و 10 أيام في الجريدة الثانية ، كما يرى أنه لا داعي للنشر في أي من الجريدتين لمدة تزيد عن 50 يوما.

المطلوب:

بناءاً على ما تقدم ماه و عدد الأيام المطلوبةللنشر في كل من الجريدة الأولى و الجريدة الثانية، مع ملاحظة أن الوكالة ترغب في تكرار هذا الإعلان إلى أكبر درجة ممكنة .

تمرين 04:

نريد استغلال منطقة فلاحيه لولاية الجلفة ، حيث هناك إمكانية زراعة منتوجين هما الزيتون والقمح، والجدول التالي يلخص معطيات الزراعة لكل هكتار.

البيان	الزيتون	القمح
المردودبالقنطار في الهكتار الواحد	75	25
سعر بيع القنطار 10^2 دج	60	60
تكاليف الاستغلال للهكتار 10^4 دج	35	10
اليد العاملة الضرورية (عدد العمال)	1	2
الماء الضروري للسقي (م ^{3} في السنة)	14000	6000

كما ان المتاح من مختلف عناصر الإنتاج هو كآلاتي:

الأرض 900هكتار، اليد العاملة 1200عامل ، الماء 14000000م^3 /للسنة

المطلوب:

تحديد المساحة المخصصة لكل زراعة، علما ان الفلاح يريد تعظيم الربح.

الفصل الثاني :

حل البرنامـــــج الخطي

بالطريقة البيانية

نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في امثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود .

ويمكن إيجاد ، حل للبرنامج الخطي بإحدى الطريقتين :

1) **الطريقة البيانية:** وهي شائعة الاستخدام فقط في البرامج الخطية والتي تحتوي على متغيرين على الأكثر .

2) **طريقة السمبلكس أو طريقة الجدول:** وهي طريقة عامة تستخدم مهما كان عدد متغيرات البرنامج الخطي.

وسنتطرق في هذا الفصل إلى الطريقة البيانية : ولحل البرنامج بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

1) نرسم محورين احدهما أفقي وليكن x_1 والثاني عمودي وليكن x_2 ، وبالتالي يتشكل لدينا معلم متعامد.

2) نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات ، وذلك بتحويل إشارات ($\geq$) ($\leq$) إلى ($=$)، حيث أن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

3) نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات القيود ، ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور (x_2) نفرض أن $x_1 = 0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة لـــ x_2 ، ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور (x_1) نفرض أن $x_2 = 0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة لـــ x_1 ، ويتم تحديد نقاط التقاطع بين المحورين ، ثم نصل بينهما بخط مستقيم .

4) نشطب المناطق التي لا تحقق القيود ، (توجد على يمين المستقيم في حالة القيد **اقل من** ، وعلى يساره في حالة القيد **أكبر من**)

5) نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود ، وفي الغالب تشكل لنا **مضلع متعدد الرؤوس** .

6) نجعل دالة الهدف معدومة ، ونرسم المستقيم على نفس المعلم حيث يمر بالمبدأ ، ونسميه (Z).

7) نحرك المستقيم (Z) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع وتكون آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Z) هي التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم.

(وفي حالة التدنية تكون أول نقطة يصل إليها المستقيم (Z) .

8) نجد قيم الأزواج لهذه النقطة إما **هندسيا** بالإنزال على المحورين ، أو **جبريا** بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة.

9) في حالة إذا لم نتمكن من تحديد النقطة بدقة ، فإننا نعوض قيم تلك النقاط (رؤوس المضلع) في دالة الهدف ، ونأخذ النقطة التي تعطينا اكبر قيمة إذا كنا في حالة التعظيم ، وأقل قيمة في حالة التدنية.

10) نعوض قيم المتغيرين (x_1, x_2) المتحصل عليها في دالة الهدف فنحصل على قيمتها .

مثال 01:

اوجد حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MAX\ Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحــل:

1) نرسم محورين احدهما أفقي وليكن x_1 والثاني عمودي وليكن x_2 ، وبالتالي يتشكل لدينا معلم متعامد.

2) نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات ، ونسمي المستقيمين C1 ، C2 :

المستقيم C1 ..... $2X_1+3X_2\leq 12 \Rightarrow 2X_1+3X_2=12$

المستقيم C2 ..... $2X_1+X_2\leq 8 \Rightarrow 2X_1+X_2=8$

3) نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات القيود :

المستقيم C1

X_1	0	6
X_2	4	0

المستقيم C2

X_1	0	4
X_2	8	0

4) نشطب المناطق التي لا تحقق القيود ، توجد على يمين كل مستقيم ، كما تشطب المناطق التي تحقق شرط عدم السالبية (انظر الشكل).

5) نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود، والتي هي في موضحة في الشكل أسفله بالمضلـــع ABCD .

6) . نجعل دالة الهدف معدومة ، ونرسم المستقيم على نفس المعلم حيث يمر بالمبدأ ، ونسميه (Z).

$$Z = 0 \Rightarrow 4x_1 + 5x_2 = 0$$

المستقيم Z

X_1	0	5
X_2	0	-4

7) نحرك المستقيم (Z) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع ABCD وتكون آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Z) وهي النقطة B كما يوضحه الشكل.

8) نجد قيم الأزواج لهذه النقطة إما **هندسيا** بالإنزال على المحورين، ومن خلال الشكل نلاحظ إن إحداثيات النقطة B (x_1, x_2) هي $(3, 2)$

أو نتحقق من الحل **جبريا** :

حيث ان النقطة B تمثل تقاطع المستقيمين C1، C2 ، وبالتالي نقول بحل جملة معادلتي المستقيمين :

$$\begin{cases} 2X_1+3X_2=12 \ \ldots\ldots. \ (1) \\ 2X_1+\ X_2= 8 \ \ \ldots\ldots.. \ (2) \end{cases}$$

نطرح (2) من (1) فنجد :

$3X_2+X_2=12 - 8$

$\Rightarrow 2X_2 = 4$

$\Rightarrow X_2 = 2$

وبالتعويض في (2) نجد :

$2X_1+ 2= 8$

$\Rightarrow 2X_1= 8 - 2$

$\Rightarrow 2X_1= 6$

$\Rightarrow X_1= 3$

ومنه : $X_1= 3$ ، $X_2=2$

وهذا الحل الجبري يتطابق مع الحل الهندسي.

9) ولنتحقق اكثر من الحل (خطوة غير اجبارية في حل التمارين)، نعوض قيم نقاط رؤوس المضلع في دالة الهدف .

$A \Longrightarrow Z = 4(0) + 5(4) = 20$

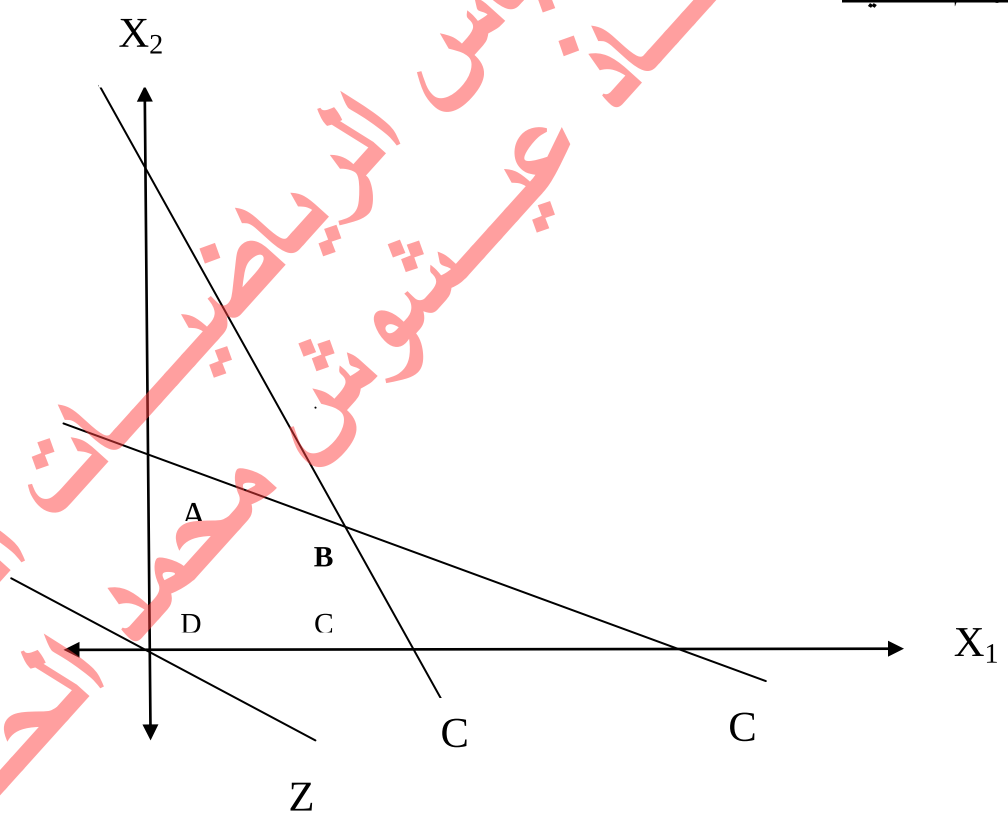
$\mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{Z} = 4(3) + 5(2) = \mathbf{22}$

$C \Longrightarrow Z = 4(4) + 5(0) = 16$

نلاحظ ان النقطة B حققت أكبر قيمة لــ Z

10) نستنتج مما سبق ان **Z = 22 وهي اكبر قيمة لدالة الهدف.**

<u>الرسم البياني :</u>



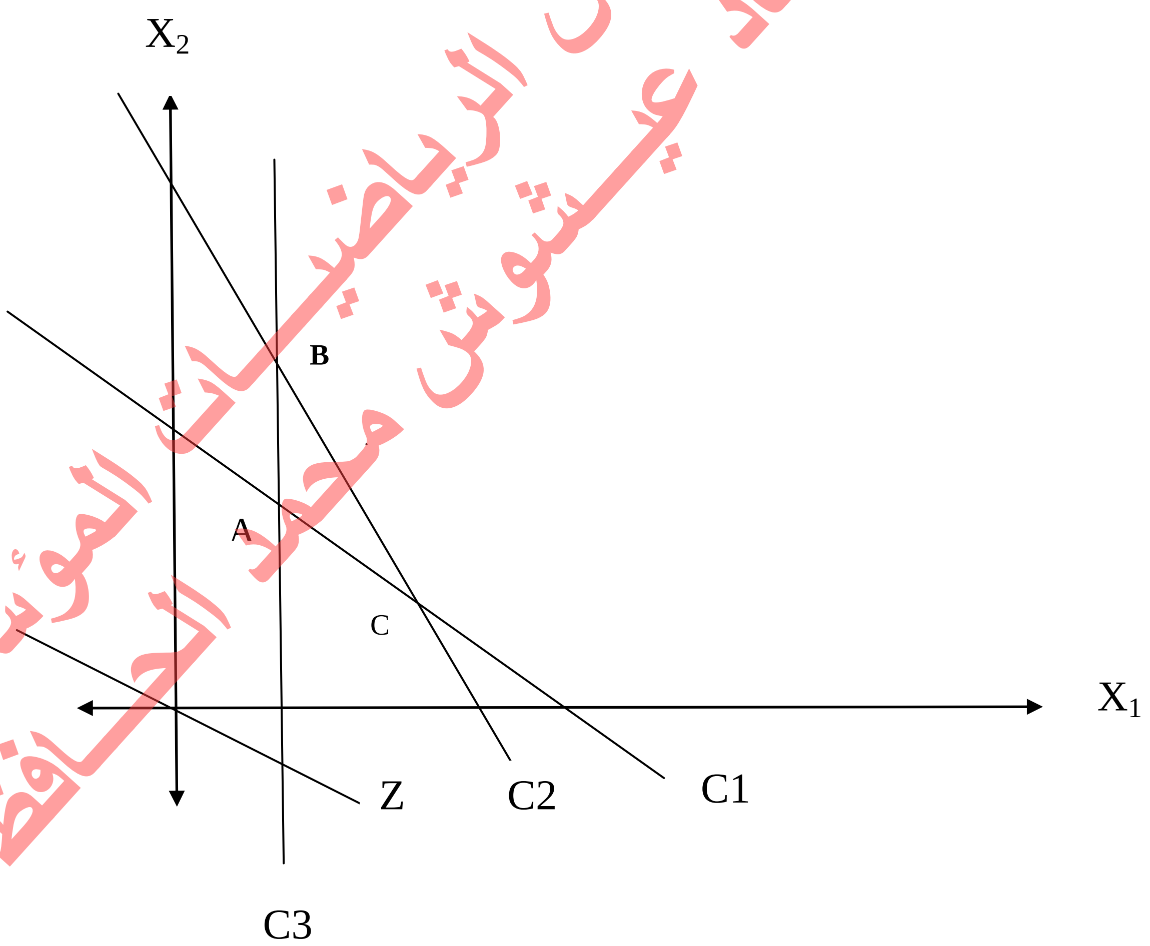
<u>مثال 02:</u>

$$MAX\ Z = 2\,x_1 + 3\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 350 \\ x_1 \geq 125 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \end{cases}$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

<u>الرسم البياني:</u>



الحالات الخاصة في الحل البياني:

إن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

1/ تعدد الحلول المثلى: وهي احتمال وجود أكثر من حل أمثل للمشكلة وكما هو موضح في المثال الآتي:

مثـــال:

ينتج مصنع سلعتين يدخل في إنتاجهما مادتين من المواد الخام. الكمية المتاحة من المواد الخام ونسب مكونات كل وحدة سلعة من المواد الخام وربح الوحدة موضحة في الجدول الآتي:

السلعـــة / المواد الخام	الأولى	الثانية	الكميات المتاحة بآلاف من المواد الخام
الأولى	1	2	40
الثانية	1	3	45
ربح الوحدة	5	10	

المطلوب تحديد الكميات التي تنتج من السلعتين بحيث تحقق أكبر ربح ممكن ولا تتجاوز الكميات المتاحة من المواد الخام وذلك باستخدام الطريقة البيانية.

نفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى، وأن X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

المشكلة هي إيجاد قيم X_1، X_2.

وعليه فإن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة يأخذ الشكل الآتي:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 10X_2$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2 \leq 40 \\ X_1+3X_2 \leq 45 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ولتمثيل المشكلة بيانيا يتم تحويل القيود إلى معادلات وكالآتي:

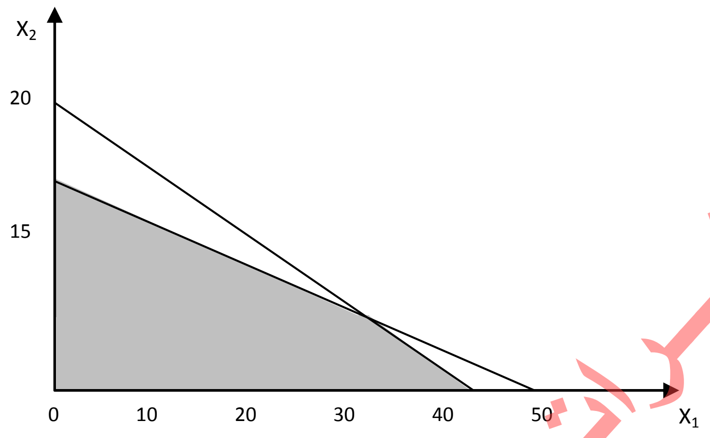
$$X_1+2X_2 = 40 \text{ ...... } (1)$$

$$X_1+3X_2 = 45 \text{ ...... } (2)$$

الجدول الآتي يبين نقاط التقاطع للمعادلات (1)، (2).

	X_1	X_2
المعادلة (1)	0	20
	40	0
المعادلة (2)	0	15
	45	0

يتم تحديد نقاط التقاطع للمعادلات (1)، (2) على المحورين X_1، X_2 ثم نصل بينهما بخط مستقيم وكما هو مبين بالشكل الآتي:



إن جميع النقاط داخل المنطقة المضللة تمثل منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق القيدين في آن واحد والنقاط D، C، B، A فهي الحلول الأساسية.

أما نقطة التقاطع بين المستقيمين $C(30,5)$ تم الحصول عليها بحل معادلتي المستقيمين.

يتم تحديد الحل الأمثل وذلك بتعويض كل من الحلول الأربعة في دالة الهدف لتعظيم الربح كالآتي:

المنطقة	X_1	X_2	$\text{MAX } Z=5X_1+10X_2$
A	0	0	0
B	0	15	150
C^*	30	5	200
D^*	40	0	200

من الجدول نجد أن النقطتين D، C تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 200. أي أنالنقطة تحدد الكمية التي يجب إنتاجها من السلعة الأولى وهي مساوية إلى 30 وحدة ومن السلعة الثانية 5

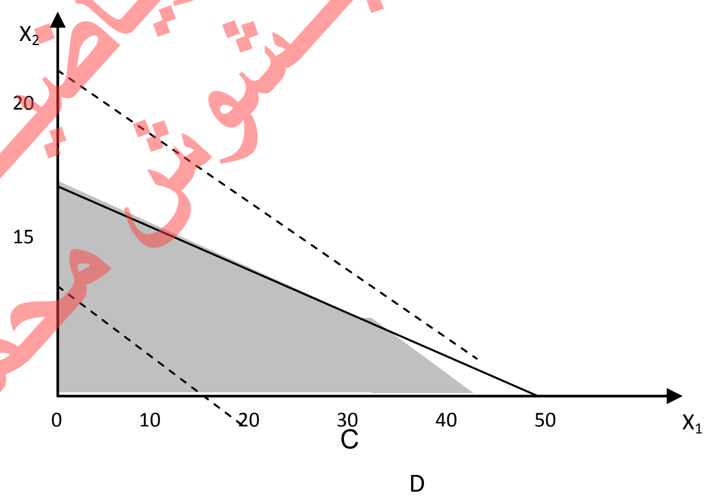
وحدات ويكون الربح المتحقق هو 200. كما نقطة D تحقق مقدار ربح مساوي إلى 200 في حالة تخصيص الإنتاج للسلعة الأولى فقط وبمقدار 40 وحدة.

يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى.

ولتوضيح هذه الحالة، نرسم دالة الهدف على الشكل المرسوم بعد إعطاء قيمة افتراضية لــ Z ولتكن بمقدار 100 أي أن:

$$\text{MAX } Z = 5X_1 + 10X_2 = 100$$

بتعيين النقاط على الرسم نلاحظ أنه يوازي القيد الأول. أما إذا فرضنا أن قيمة Z مساوية إلى 200 نلاحظ أنه ينطبق على القيد الأول، وبهذا نستنتج أن أية نقطة تقع على المستقيم C، D ستكون حلا أمثل للمشكلة.



2/ الحلول غير المحدودة:

في هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وليست مغلقة. لاحظ ذلك في المثال الآتي:

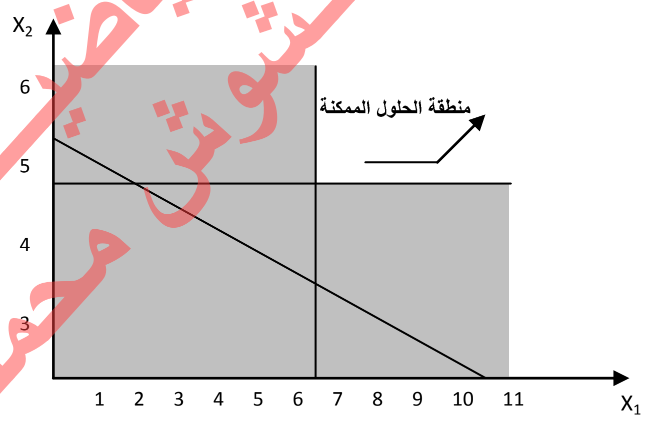
مثـــال:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$\begin{cases} 4X_1+8X_2 \geq 40 \\ X_1 \geq 6 \\ X_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

يتم تطبيق الخطوات السابقة وبعد تحويل القيود إلى معادلات ثم إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات، يتم رسم الشكل وكما في أدناه:



نلاحظ من خلال الشكل أنه توجد منطقة لا محدودة (لا نهائية) تحقق دالة الهدف، فأي نقطة من هذه المنطقة تحقق دالة الهدف، وبالتالي نقول أنه يوجد عدد غير محدود من الحلول لهذا البرنامج

3/ عدم وجود حلول ممكنة:

في هذه الحالة تكون منطقة الحل للقيود متعاكسة، أي أن القيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة. لاحظ ذلك في المثال الآتي:

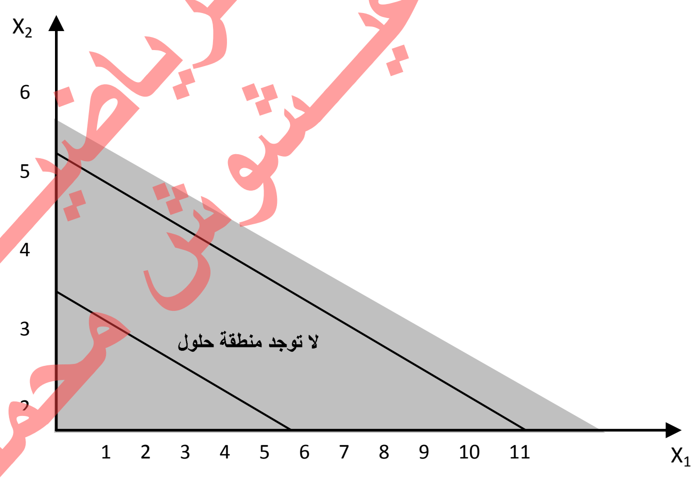
مثـــال:

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 15X_2$$

$$\begin{cases} 5X_1+10X_2 \leq 25 \\ 5X_1+10X_2 \geq 50 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

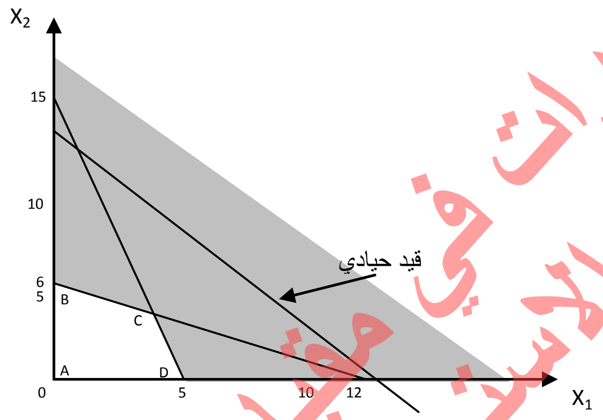
وبعد تحويل القيود إلى معادلات ثم إيجاد نقاط تقاطع المستقيمات، يتم رسم الشكل وكما في أدناه:



من الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائيا, وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

4/ الانحلال (حياد أحد القيود):

عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحل الممكن في أية نقطة، وفي هذه الحالة يكون هذا القيد حيادياً تماماً، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج دون أن يؤثر ذلك على النظام، وتظهر هذه الحالة كما في الشكل الآتي:



مســـــائل اخرى:

تمرين 01:

مؤسسة صناعية تنتج أجهزة الطبخ الكهربائية وأجهزة الطبخ الغازية، بغية معـــرفة إذا كان ربح الحاسب التجاري الواحد هو 25 دج و ربح الحاسب العلمي الواحد هو 30دج.

الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أعظم ربح مـــ م كن قامت بجمع البيانات التالية:

1 المنتوجان يمران عبر ورشتين اساستين، هما ورشة التركيب يعمل بها 5عمــــــال، وورشـــة الإعداد النهائي ويعمل بها 4عمال، طاقة العمل اليومي القصـــوى لكل عامل هي 8 ساعات.

2- إن المنتوج الأول يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى و2 ساعة عمل في الورشة الثانية، بينما المنتوج الثاني يتطلب 2 ساعة عمل في الورشـــــــــــــــة الأول وساعات عمل في الورشة الثانية.

3- سعر المنتوج الواحد من النوع الأول هو 500 دج ويكـــلف 200 دج و سعر المنتوج الواحد من النوع الثاني هو 300 دج ويكلف 100 دج.

المطلوب:

- ✓ اكتب البرنامج الخطي الذي من شانه تعظيم ربح المؤسسة.
- ✓ باستعمال الطريقة البيانية ، اوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النـــــوعين لتعظيم ربـــح المؤسسة.

تمرين 02:

مصنع للالكترونيات الصغيرة ينتج نموذجين من الآلات الحاسبة هما:

1- الحاسب التجاري. 2- الحاسب العلمي

كل نوع من الحاسبين يمر عبر 3 أقسام هي :

- قسم التسليك: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 55 ساعة عمل يوميا.
- قسم التجميع: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 72 ساعة عمل يوميا.
- قسم الاختبار: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 20 ساعة عمل يوميا.

الحاسب التجاري الواحد يتطلب 2 ساعة عمل في قسم التسليك و 12 ساعة عمل في قسم التجميع و 2 ساعة عمل في قسم الاختبار.

الحاسب العلمي الواحد يتطلب 4 ساعات عمل في قسم التسليك، 6 ساعات عمل في قسم التجميع ، و4 ساعات عمل في قسم الاختبار.

إذا كان ربح الحاسب التجاري الواحد هو 25 دج و ربح الحاسب العلمي الواحد هو 30دج

المطلوب:

- ✓ اكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المصنع.
- ✓ اوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين والتي تجعل الربح في أعظم قيمة باستخدام الطريقة البيانية.
- ✓ حدد الطاقات غير المستغلة في كل قسم، إن وجدت.

تمرين 03:

باستخدام الطريقة البيانية اوجد حل للبرامج التالية:

Max $Z = 10x_1+20x_2$ $5x_1+3x_2 \leq 15$ $2x_1+4x_2 \leq 8$ $x_1+x_2 \leq 4$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	**Max** $Z = x_1+x_2$ $2x_1+2x_2 \leq 2$ $2x_1-2x_2 \leq 2$ $x_1+x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
Max $Z = 4x_1+3x_2$ $x_1+3.5x_2 \leq 9$ $2x_1+x_2 \leq 8$ $x_1+x_2 \leq 6$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	**Max** $Z = 150x_1+200x_2$ $20x_1+30x_2 \leq 240$ $10x_1+25x_2 \leq 500$ $15x_1+40x_2 \leq 550$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
Min $Z = 20x_1+30x_2$ $2x_1+14x_2 \geq 4$ $16x_1+10x_2 \geq 8$ $3x_1+9x_2 \geq 6$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	**Min** $Z = 25x_1+30x_2$ $4x_1+7x_2 \geq 1$ $8x_1+5x_2 \geq 3$ $6x_1+9x_2 \geq -2$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

الفصل الثالث :

حل البرنامـــــج الخـــــــطي

بطريقة simplexe

إن الطريقة المبسطة هي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة.

وبسبب إمكانية برمجة المعلومات لمشكلات البرمجة الخطية على الحاسبة الإلكترونية بهذه الطريقة، أدى ذلك إلى انتشار استخدام هذه الطريقة على مدى واسع وبصورة كبيرة.

ولغرض شرح خطوات هذه الطريقة, سيتم الاستعانة بالمثال الآتي:

مثـــال

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام الطريقة المبسطة **Simplexe**:

$$\text{Max } Z = X_1 + 3X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \leq 5 \\ X_1+2X_2 \leq 5 \\ X_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

1/ <u>تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج القياسي</u>: يتم تحويل نموذج البرمجة الخطية أعلاه إلى النموذج القياسي وذلك بإضافة المتغيرات المكملة, أي تحويل المتباينات إلى معادلات كالآتي:

$$\text{Max } Z - X_1 - 3X_2 = 0$$

$$\begin{cases} X_1+ S_1 = 5 \\ X_1+2X_2 + S_2 = 5 \\ X_2 + S_3 = 4 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2/ تكوين الجدول الأساسي(الأولي): يتم تكوين الجدول الأساسي وترتب البيانات حيث تمثل المتغيرات المكملة متغيرات أساسية والمتغيرات القرارية متغيرات غير أساسية كما في الجدول التالي كالآتي:

V.B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
S_1	1	0	1	0	0	5
S_2	1	2	0	1	0	10
S_3	0	1	0	0	1	4
Z	-1	-3	0	0	0	0

3/ تحديد المتغير الداخل: لغرض تحديد المتغير الداخل وما دامت المشكلة هي تعظيم فإننا نبحث عن أكبر قيمة بالسالب (في حالة كون دالة الهدف تقليل فإننا نبحث عن أكبر قيمة موجبة) في صف دالة الهدف ونلاحظ أكبر قيمة بالسالب هي (-3) والتي تمثل معامل X_2, لذلك فإن X_2 سيكون المتغير الداخل وعمود X_2 يسمى بالعمود الداخل.

4/ تحديد المتغير الخارج: يتم تحديد المتغير الخارج بعد قسمة عناصر العمود الثابت (B_i) على العناصر المناظرة له في العمود الداخل X_2 (مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة والصفرية) عدا دالة الهدف كالآتي:

4/1، 10/2، 5/0 يُهمل

إن أقل نسبة هي 4 لذلك فإن الصف S_3 هو المتغير الخارج، وأن العنصر(1) في الصف S_3 هو العنصر المحوري (العنصر المحوري هو المعامل الذي يتقاطع عنده عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج).

5/ إيجاد قيم الصف المحوري: ولغرض إيجاد قيم الصف المحوري، يتم تقسيم قيم الصف للمتغير الخارج على العنصر المحوري. وذلك للحصول على الصف المحوري. وفي مثالنا نقسم قيم الصف

للمتغير الخارج S_3 على العنصر المحوري (1) وذلك للحصول على الصف المحوري X_2, والصف المحوري في هذه الحالة هو:

0 1 0 0 1 4

ثم يتم ترتيب النتائج في الجدول

6/ إيجاد بقية صفوف الجدول: لإيجاد بقية صفوف جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة الآتية:

عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم – (عنصر الصف القديم الواقع في عمود المتغير الداخل) × عناصر الصف المحوري.

نلاحظ أن قيم المتغير S_1 بقيت على حالها وكما هو واضح في الجدول ، وذلك لأن عنصر الصف الواقع في عمود المتغير الداخل مساويا إلى صفر. أما عناصر الصف للمتغير S_2 فيتم إيجادها وذلك بضرب عنصر الصف S_2 والواقع في عمود المتغير الداخل في عناصر الصف المحوري ثم طرحها من عناصر الصف S_2 القديم.

S_2	1	2	0	1	0	10
	0	2	0	0	2	8
	1	0	0	1	-2	2

أما قيم الصف Z فيتم إيجاد قيمها بنفس الطريقة. إذ نقوم بضرب عنصر الصف Z والواقع في عمود المتغير الداخل في عناصر الصف المحوري ثم طرحها من عناصر الصف Z القديمة.

$$\begin{array}{ccccccc} Z & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & -12 \\ \hline & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

V.B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
S_1	1	0	1	0	0	5
S_2	1	0	0	1	–2	2
X_2	0	1	0	0	1	4
Z	–1	0	0	0	3	12

وبما أن قيم دالة الهدف لا تزال تحتوي على قيمة سالبة فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل وبذلك نستمر بالحل بتكرار الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحل الأمثل.

وعليه ومن الجدول نجد أن المتغير الداخل هو X_1. ولتحديد المتغير الخارج نقسم عناصر عمود الثابت (B_i) على العناصر المناظرة له في العمود الداخل X_1 كالآتي:

5/1، 2/1، 4/0 يُهمل

نجد أن أقل نسبة هي 2 لذلك فإن المتغير S_2 هو المتغير الخارج، وأن العنصر (1) هو العنصر المحوري.

نقسم قيم الصف للمتغير الخارج S_2 على العنصر المحوري (1) وذلك للحصول على الصف المحوري X_1، والصف المحوري في هذه الحالة هو:

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \quad 2$$

نلاحظ أن قيم المتغير X_2 بقيت على حالها كما هو واضح في الجدول التالي وذلك لأن عنصر الصف الواقع في عمود المتغير الداخل مساويا إلى صفر. أما عناصر الصف للمتغير S_1 فيتم إيجادها وذلك بضرب عنصر الصف S_1 والواقع في عمود المتغير الداخل في عناصر الصف المحوري ثم طرحها من عناصر الصف S_1 القديم.

S_1	1	0	1	0	0	5
	1	0	0	1	-2	2
	0	0	1	-1	2	3

أما قيم الصف Z فيتم إيجاد قيمها بنفس الطريقة. إذ نقوم بضرب عنصر الصف Z والواقع في عمود المتغير الداخل في عناصر الصف المحوري ثم طرحها من عناصر الصف Z القديمة.

Z	-1	0	0	0	3	12
	-1	0	0	-1	2	2
	0	0	0	1	1	14

نلاحظ أن جميع قيم الصف z أصبحت موجبة و أصفار، أي $Z_j \geq 0$ وكما هو موضح في الجدول، وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

V.B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
S_1	0	0	1	-1	2	3
X_1	1	0	0	1	-2	2
X_2	0	1	0	0	1	4
Z	0	0	0	1	1	14

الحل الأمثل هو: $\mathbf{X_1= 2}$, $\mathbf{X_2= 4}$, $\mathbf{S_1= 3}$, $\mathbf{S_2= 0}$, $\mathbf{Z=14}$

II-3-4. طريقة (م) الكبرى (M) Big:

لاحظنا في المثال السابق استخدام المتغيرات المكملة في حالة كون القيود على شكل متباينات أقل من أو يساوي (≤) ودالة الهدف هي التعظيم. ولكن هناك الكثير من مشاكل البرمجة الخطية التي لا نستطيع باستخدام المتغيرات المكملة إيجاد الحل الأساسي الأولي. إن هذه المشاكل تتضمن على الأقل على قيد يحتوي على إشارة أكبر من أو يساوي (≥) أو إشارة مساواة (=) أو دالة الهدف هي دالة تقليل.في هذه الحالة نضيف إلى القيود التي تحتوي على إشارة مساواة أو أكبر من أو يساوي متغير آخر يسمى المتغير الاصطناعي.

لحل مثل هذه المشاكل نستخدم طريقة (م) الكبرى (M) Big أو طريقة المرحلتين (two phase). لكننا سنركز على الطريقة الأولى باعتبارها الأكثر شيوعاً واستخداماً.

سيتم الاستعانة بالمثال الآتي لشرح هذه الطريقة.

مثـــال:

أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام طريقة (Big (M:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 7X_2$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2 = 50 \\ X_1 \geq 20 \\ X_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

يتم تحويل قيود النموذج إلى النموذج القياسي وذلك بإضافة المتغيرات المكملة ،فبالنسبة للقيد الثالث والذي هو بصيغة (≥) يتم تحويله كالآتي:

$$X_2 + S_2 = 20$$

أما بالنسبة للقيد الثاني والذي هو بصيغة (≤) فيُعالج بطرح المتغير المكمل منه بدلا من إضافته بالشكل التالي:

$$X_1 - S_1 = 20$$

في هذه الحالة يجب الانتباه إلى أحد الشروط الأساسية في مسائل البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. إذ نلاحظ أن معالجة القيد الثاني لا تلبي الشرط المذكور. ففي حالة افتراض أن ($X_1=0$) فإن قيمة($S_1=-20$) وهذا غير منطقي، لذلك وجب معالجة الحالة وذلك بإضافة متغير آخر لكي نحافظ على شرط عدم السلبية. ويطلق على هذا المتغير بالمتغير الاصطناعي وبذلك يصبح القيد الثاني بالشكل:

$$X_1 - S_1 + A_2 = 20$$

أما القيد الأول والذي هو بصيغة مساواة فنستخدم أيضا المتغير الاصطناعي في المعادلة فيصبح:

$X_1+2X_2+A_1=50$

وحتى يكون الحل الأمثل صحيحا يجب إضافة هذه المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف (Min Z) بعد ضربها في قيمة ثابتة m وهي قيمة كبيرة جدا فتصبح دالة الهدف كالآتي:

$$\text{Min } Z = 5X_1+7X2+0S_1+0S_2+MA_1+MA_2$$

وبذلك تصبح صيغة النموذج للبرمجة الخطية كالآتي:

$$\text{Min } Z = 5X_1+7X_2+0S_1+0S_2+MA_1+MA_2$$

$$\begin{cases} X_1+2X_2+A_1 = 50 \\ X_1-S_1+A_2 = 20 \\ X_2+S_2 = 20 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

ولأن A_1، A_2 متغيرات أساسية في القيود يجب أن يكون معاملها في دالة الهدف في الحل الأول يساوي صفرا لذلك يجب التعويض عنها في دالة الهدف من القيدين الأول والثاني حيث:

$$A_1 = 50-X_1-2X_2$$

$$A_2 = 20-X_1+S_1$$

وتصبح دالة الهدف كالآتي:

$$Z = 5X_1+7X_2+0S_1+0S_2+MA_1+MA_2$$

$$Z = 5X_1+7X_2+M(50-X_1-2X_2)+M(20-X_1+S_1)$$

وبعد تبسيط المعادلة نحصل على:

$$Z - (5-2M)X_1-(7-2M)X_2-MS_1=70M$$

و الجدول أدناه يبين الحل الأساسي (الأولي) لهذه المشكلة وكالآتي:

V.B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B_i
A_1	1	2	0	0	1	0	50
A_2	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	1	0	1	0	0	20
Z	$-5+2M$	$-7+2M$	$-M$	0	0	0	70M

وفي مثالنا هذا إن المتغير الداخل هو X_1 لأنه يقابل أكبر قيمة موجبة في الصف Z. أما تحديد المتغير الخارج فنستخدم نفس الأسلوب الذي تم إتباعه في الحل بالطريقة المبسطة وذلك بقسمة عمود الثابت على عناصر العمود الداخل وأن أقل القيم تحدد الصف الذي يمثل المتغير الخارج. وفي مثالنا نلاحظ أن المتغير الخارج هو A_2.

وبالاعتماد على نفس الخطوات الموضحة في الحل بالطريقة المبسطة نحصل على الجدول الآتي:

V. B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B_i
X_2	0	2	0	0	1	0	03
X_1	1	0	-1	0	0	1	20
S_2	0	1	0	1	0	0	20
Z	0	$-7+2M$	$5-M$	0	0	$-5+2M$	$-100-30M$

نلاحظ أن صف Z لا يزال يحتوي على قيم موجبة، لذلك نستمر بالحل ما دامت هناك قيم موجبة في الصف الأخيرZ. وبنفس الطريقة السابقة يتم تحديد المتغير الداخل للجدول السابق وهو X_2, أما المتغير الخارج فهو A_1. وبتطبيق نفس الخطوات السابقة نحصل على الجدول التالي:

V.B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B_i
X_1	0	1	1/2	0	1/2	-1/2	15
S_2	1	0	-1	0	0	1	20
S_3	0	0	-1/2	1	-1/2	1/2	5
Z	0	0	-3/2	0	7/2– M	3/2– M	205

من الجدول نلاحظ أن جميع قيم الصف Z سالبة, إذا نكون قد حصلنا على الحل الأمثل وهو:

X_1=20 , X_2=15 , S_1=0 , S_2=5 , A_1=A_2=0 , Z=205

<u>مسائل اخرى:</u>

تمرين 01:

حل بطريقة السمبلكس مايلي:

$$\mathbf{Max\ Z = 20x_1+25x_2}$$
$$\begin{aligned} &2x_1+3x_2 \leq 40 \\ &x_1+2x_2 \leq 20 \\ &3x_1+x_2 \leq 30 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Max\ Z = x_1+2x_2+3x_3+2x_4}$$
$$\begin{aligned} &2x_1+x_2+2x_3+3x_4 \leq 150 \\ &3x_1+4x_2+2x_3+4x_4 \leq 120 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ &x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Max\ Z = 5x_1-2x_2+8x_3+6x_4+10x_5}$$
$$\begin{aligned} &x_1 \leq 10 \\ &5x_1+5x_2+11x_3 \leq 2000 \\ &5x_4+11x_5 \leq 1500 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ ;\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0\ ;\ x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Min\ Z = -3x_1+5x_2-2x_3}$$
$$\begin{aligned} &x_1+2x_2+x_3 \leq 20 \\ &x_1+x_2+2x_3 \leq 30 \\ &2x_1+4x_2+3x_3 \leq 40 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Min\ Z = 2x_1+3x_2}$$
$$\begin{aligned} &x_1+2x_2 \leq 6 \\ &2x_1+2x_2 \geq 4 \\ &x_1+x_2 = 3 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

تمرين02:

باستخدام طريقة السمبليكس لحل مسألة التعظيم ، وبافتراض انه تم اختيار المتغير الداخل من ضمن المتغيرات غير الأساسية بحيث كان معامل دالة الهدف موجبا، ولكنه ليس أعلى قيمة، فهل يمكن الوصول إلى الحل الأمثل؟ برر إجابتك؟

تمرين03

وضح السبب في كون معامل دالة الهدف للمتغير الاصطناعي في حالة التعظيم M- وفي حالة التدنئة M+؟

تمرين04:

باستخدام طريقة السمبليكس، أوجد حلول جميع المسائل السابقة .

الفصل الرابع :

مســــــــــائل النـــــــقل

- تقليل التكاليف -

مسائل النقل من إحدى المواضيع الهامة المدرجة في بحوث العمليات قسم البرمجة الخطية، باعتبارها م دف أيضا إلى الوصول إلى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية.

وعلى وجه الخصوص تهتم بالبحث عن أقل تكلفة لنقل بضائع شخص طبيعي أو معنوي من مجموعة من المناطق الى مناطق أخرى و في حدود كميات محددة، أو البحث عن أعلى ربح أو عائد من جراء عملية النقل هذه، ل ذا فإما شائعة الاستخدام على مستوى الاقتصاد الجزئي، في المؤسسات الإنتاجية و التجارية وغيرها، و سوف نتطرق في ه ذا الفصل الى حالة تدنية تكاليف النقل.

اولا: عرض المسألة:

تعرض مسائل النقل في حالة التدنية وهي الحالة الشائعة بشكل مشابه للافتراض التالي:

نفترض أن مؤسسة اقتصادية لها ثلاث وحدات إنتاجية متواجدة في أماكن مختلفة، كل وحدة تتيح إمكانيات العرض التالية:

- الوحدة 1 تعرض الكمية a_1
- الوحدة 2 تعرض الكمية a_2
- الوحدة 3 تعرض الكمية a_3

و هذا من السلعة التي تنتجها و يفترض أنا متشابهة.

تكلف هذه المؤسسة من خلال وحداتها الثلاثة بتموين 4 مناطق مختلفة من تلك السلعة، بحيث أن كميات الطلب لكل منطقة هي على الشكل التالي:

المنطقة 1 الكميات التي تطلبها هي b_1

المنطقة 2 الكميات التي تطلبها هي b_2

المنطقة 3 الكميات التي تطلبها هي $b3$

المنطقة 4 الكميات التي تطلبها هي $b4$

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من وحدة الإنتاج i الى المنطقة المرد تموينها j محددة محاسبيا و هي Cij ، وهي معروضة في الدول التالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	C_{11}	C_{12}	$C13$	C_{14}
الوحدة 2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
الوحدة 3	C_{31}	$C32$	C_{33}	C_{34}

يكون المطلوب هو تموين المناطق الأربعة بكل احتياجات خلال الوحدات الثلاث، على أن تتحمل المؤسسة أقل تكاك ممكنة و في حدود طاقات العرض لكل وحدة من وحيان المؤسسة. و بمعنى آخر يكون الهدف هو الإجابة على السؤال التالي: ماهي الكميات التي يجب على كل وحدة أن تمون بها كل منطقة مع ضمان حصول كل منطقة على إحتياجاتا كاملة، و في حدود الطاقة القصوى المتاحة لكل وحدة إنتاجية وهذا بشرط أن تتحمل المؤسسة التي تنتمي اليها هذه الوحدات أقل تكلفة ممكنة؟

فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة i المنطقة j هي زxij فإن الكميات المحتمل توجيهها من كل وحدة إلى كل منطقة هي حسب الجدول التالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
الوحدة 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
الوحدة 3	x_{31}	$x32$	x_{33}	x_{34}

وهو جدول مشابه لحدوث التكاليف، غير أن الفرق هو أن قيم التكاليف من كل وحدة الى كل ملفه معلومة، غير أن في هذا الجدول الكميات عبارة عن متغيرات مجهولة نبحث عنها إشكالية المسألة.

ثانيا: تشكيل جدول مسائل النقل

إن العرض الإنشائي لمسألة المقل حسب المثال الافتراضي السابق يمكن تلخيصه في جدول شامل هو جدول مسألة النقل و يكون على المحو التالي:

إلى / من	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	العرض
الوحدة 1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	C_{14} X_{14}	a_1
الوحدة 2	C_{21} X_{21}	C_{23} X_{22}	C_{23} X_{23}	C_{24} X_{24}	a_2
الوحدة 3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	C_{34} X_{34}	a_3
الطلب	b_1	b_2	b_3	B_4	$\sum ai$ / $\sum bi$

إن هذا الجدول يلخص كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل منطقة في أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة وهي القيم xij المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة و كذا كميات الطلب لكل منطقة.

تسمى الوحدات الإنتاجية **بالمنبع**، كما تسمى المناطق المراد تموينها بالمصب، وعليه فإن القيمة cijنقول عنها بأنها تكلفة الوحدة الواحدة المنقولة من المنبع i الى المصب J وهي قيمة غير سالبة و xij هي الكميات المراد نقلها من المنبع i الى المصب j وهي أيضا قيمة غير سالبة.

ثالثا: الصيغة الرياضية لمسالة النقل:

من الجدول الاخير يمكن صياغة نموذج برمجة خطية لمسألة النقل بالصيغة الآتية:

$$Min\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

S.T

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i \qquad i=1, -----, m$$ (قيود العرض)

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \le b_j \qquad j=1, -----, n$$ (قيود الطلب)

$$X_{ij} \ge 0$$

حيث أن:

n: عدد مواقع الطلب

m: عدد مصادر العرض

قيود العرض توجب بان الكمية المنقولة من أي من مصادر العرض يجب أن لا تتجاوز الموجود في ذلك المصدر من المنتج أما قيود الطلب فتوجب بأن مجموع الكمية المنقولة إلى أي من مواقع الطلب يجب أن تحقق على الأقل الطلب لذلك الموقع من المنتج ومجموع قيود نموذج البرمجة الخطية يساوي عدد المصادر زائد عدد المواقع أي (n+m) وبما أن ألفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هي أن مجموع الطلب يساوي مجموع العرض أي $\sum a_i = \sum b_j$ فهذا يعني أن كل الكميات أو

الوحدات الموجودة في مصادر العرض سوف تنقل لتحقق الطلب على المنتوج وعلى هذا الأساس فإن نموذج البرمجة الخطية يتحول إلى الصيغة الآتية:

$$Min\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$S.T$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}=a_i \qquad i=1, -----, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}=b_j \qquad j=1, -----, n$$

$$X_{ij}\geq 0$$

رابعا: طرق حل مسالة النقل:

تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين:

الاولى: هي مرحلة ايجاد الحل الاساسي الاول وتتم بعدة طرق منها، طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكلفة الدنيا طريقة فوقل .

الثانية: وهي مرحلة اختبار الحل وسيرورة تحسينه، و تتم بأحد الطريقتين ،الاولى تعرف بطريقة التخطي (Stepping- stone) و الثانية تعرف بطريقة التوزيع المعدل(MODI).

1) **طريقة الزاوية الشمالية الغربية:** يقصد بالزاوية الشمالية الغربية أول خانة في الجدول إلى الأعلى و الى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، و يتم ذلك بإتباع منهجية المثال التالي:

مثـــال:

شركة لإنتاج البتروكيمياوات تمتلك مخزنين سعة المخزن الأول 750طن وسعة المخزن الثاني 500 طن، تسوق الشركة منتجاتها إلى ثلاث مراكز استهلاكية بواقع طلب (500،500،250) طن على التوالي، تكاليف نقل الطن الواحد من المخزن الأول إلى المركز الاستهلاكي هي (10،12،8) ألف دينار على التوالي وتكاليف نقل الطن الواحد من المخزن الثاني إلى المراكز الاستهلاكية هي (8،7،10) ألف دينار على التوالي، المطلوب تكوين جدول نقل للمسألة.

المطلوب :

إيجاد الحل الأول لهذه المسألة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لتدنية تكاليف النقل، ثم اوجد الحل الامثل بطريقة التخطي ؟

الحـــل:

جدول النقل يكون وفق الصيغة الآتية بعد أن يتم التخصيص للمتغير X_{11} بحيث:

$$X_{11} = Min(500, 750) = 500$$

إلى / من	1	2	3	العرض
A	10 / 500	12	8	750
B	8	7	10	500
الطلب	500	500	250	1250 / 1250

من الجدول نلاحظ أن الموقع الأول قد استوفي كمية الطلب لذلك يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل مرحليا "والتخصيص الأحق يكون للمتغير X_{12} بحيث:

$$X_{12} = Min(250, 500) = 250$$

من \ إلى	2	3	العرض
A	12 250	8	750
B	7	10	500
الطلب	500	250	450 750

من الجدول نلاحظ أن المعروض في المصدر الأول (A) قد نفذ أما ما معروض في المصدر الثاني (B) فيوزع بصورة متساوية بين الموقعين الثاني والثالث، ولذلك فإن الحل الأول لمسألة النقل يكون كالأتي:

من \ إلى	1	2	3	العرض
A	10 500	12 250	8	750
B	8	7 250	10 250	500
الطلب	500	500	250	1250 1250

قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 500(10) + 250(12) + 250(7) + 250(10) = 12250$$

أي تكاليف نقل البتروكيمياويات من المخازن إلى المركز الاستهلاكية هي 12250ألف دينار في حال نقل 500 طن من المخزن الأول إلى المركز الاستهلاكي الأول 250طن من المخزن الأول إلى المركز الثاني و 250 طن من المخزن الثاني إلى المركز الثاني و 250 طن من المخزن الثاني إلى المركز الثالث.

2) سيرورة الحل الامثل:

إن الحل المتوصل إليه هو حل أساسي، لكننا لا نعلم اذا كان حلا امثلا ام هو حل غير امثل، لمعرفة ذلك فان هماك طريقتين مستعملتين كما أشير الى ذلك سابقا ، الأولى هي طريقة التخطي أما الثانية فهي طريقة التوزيع المعدل وسنتطرق إلى الطريقة الأولى.

خطوات إيجاد الحل الأمثل هي كالآتي:

1. تكوين مسار مغلق يبدأ بالخلية ألفارغة (متغير غير أساسي) ويتحرك أفقيا أو عموديا وينتهي بنفس الخلية على أن تكون زوايا المسار تمثل متغيرات أساسية أي خلايا غير فارغة.
2. نخصص الإشارة (+) والإشارة (−) لكل زاوية من زوايا المسار والتي تمثل خلية من خلايا مبتدئين بإشارة (+) للخلية ألفارغة ومن ثم الإشارة (−) للخلية اللاحقة وهكذا بالتناوب.
3. تحديد الزيادة أو النقصان في مجموع تكاليف النقل الناتج من التخصيص للخلية ألفارغة من خلال جمع تكاليف زوايا (خلايا) المسار المغلق بحيث تكون إشارة تكاليف الخلية هي نفس الإشارة المخصصة لها في الخطوة (2).
4. إذا كانت القيمة التي تم الحصول عليها في الخطوة (3) موجبة فهذا يعني أن التخصيص للخلية ألفارغة سوف يزيد من مجموع تكاليف النقل (والذي يمثل معامل التكاليف النسبية للمتغير غير الأساسي) أما إذا كانت سالبة فهذا أن التخصيص يقلل من مجموع النقل.
5. تطبق الخطوات السابقة على كل الخلايا ألفارغة (متغيرات غير أساسية) في الجدول ويتم اختيار القيمة الأكثر سالبية الناتجة من (3) لكي يتم التخصيص لها أما في حال كون كل القيم غير سالبة فهذا يعني أن الحل الأولي هو حل امثل.

6 عدد الوحدات التي تخصص إلى الخلية ألفارغة يمثل عدد الوحدات الأقل المخصص للخلايا التي تحمل إشارة (−).

7 يعاد تكرار الخطوات السابقة بعد كل تخصيص إلى احد المتغيرات غير الأساسية إلى أن تكون كل القيم التي يتم الحصول عليها من الخطوة (3) غير سالبة.

8 عدد الوحدات المخصص في الخطوة (6) يجب أن يرافقه طرح هذا العدد من قيم خلايا المسار ذات الإشارة السالبة وجمعه مع المسار ذات الإشارة الموجبة.

والان سنقوم بايجاد الحل الامثل للمثال السابق بطريقة التخطي:

إلى / من	1	2	3	العرض
A	10 − 500	12 250-	8 +	750
B	8	7 -250+	10 -250	500
الطلب	500	500	250	1250 / 1250

من الجدول تتضح المسارات المغلقة للمتغيرين غير الأساسين X_{21}, X_{13} حساب التغير في مجموع تكاليف النقل والمتمثل بالخطوة (3) يكون كالآتي:

$$\bar{C}_{13} = C_{12} + C_{22} - C_{23} = 8 - 12 + 7 - 10 = -7$$
$$\bar{C}_{21} = C_{21} + C_{22} - C_{12} = 8 - 7 + 12 - 10 = 3$$

التخصيص سوف يكون للمتغير X_{13} لأن زيادة وحدة واحدة في هذا المتغير تؤدي أن نقصان في مجموع تكاليف النقل مقداره (7) بحيث:

$$X_{13} = Min(250, 250) = 250$$

من \ إلى	1	2	3	العرض
A	10 500	12	8 250	750
B	8	7 500	10	500
الطلب	500	500	250	1250 \ 1250

من الجدول يتضح أن الحل هو عبارة عن حل منحل لأن عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا غير الفارغة) أقل من $m+n-1=4$ ولتطبيق طريقة المسار المتعرج لمعرفة هل أن الجدول هو أمثل أم لا فيجب أن يكون عدد المتغيرات الأساسية يساوي (4) لكي نتمكن من تكوين مسار مغلق لذلك تخصص قيمة تدعى الايبسلون (ε) لأحد المتغيرات غير الأساسية ذو التكاليف الأقل على أن لا يشكل مسار مغلق مع المتغيرات الأساسية بحيث (ε) هي قيمة صغيرة جدا بحيث إن حاصل طرحها من أي عدد أو جمعها مع أي عدد يمثل العدد نفسه وكما هو موضح بالجدول التالي:

إلى / من	1	2	3	العرض
A	10 − 500	12 250− +	8 +	750
B	8 + ε −	7 250+ −	10 −250	500
الطلب	500	500	250	1250 / 1250

$$\bar{C}_{12} = 12 - 10 + 8 - 7 = 3$$
$$\bar{C}_{23} = 10 - 8 + 10 - 8 = 4$$

بما أن معاملات التكاليف النسبية غير سالبة لذلك فإن الجدول الاخير يمثل الحل الأمثل بمجموع تكاليف نقل:

$$Z = 500(10) + 250(8) + 500(7) + \varepsilon(8)$$
$$=5000+2000+3500+0=10500$$

مسائل اخرى:

تمرين01:

تقوم المؤسسة الوطنية للمياه المعدنية بالجزائر بتموين المناطق الشمالية للوطن . منتوجاتها من المياه المعدنية عن طريق وحداتها الثلاث الأكثر شهرة وهي:

- وحدة موزاية ، تنتج قارورات المياه المسماة "موزاية" بطاقة قصوى هي $55 .10^3$ قارورة شهريا.
- وحده سعيدة، تنتج قارورات المياة المسماة " سعيدة بطاقة قصوى هي $45. 10^3$ قارورة شهريا.
- وحده باتنة، تنتج قارورات المياة المسماة "باتنة بطاقة قصوى هي $20 . 10^3$ قارورة شهريا.

يتم التسويق في اتجاه النواحي الشمالية الثلاث وهي:

- الناحية الغربية مقرها وهران، تقدر كميات طلبها بـــ $50 .10^3$ قارورة شهريا.
- الناحية الشرقية مقرها قسنطينة، تقدر كميات طلبها ب $30 .10^3$ قارورة شهريا.
- الناحية الوسطى مقرها البليدة، تقدر كميات طلبها بـــ $40 .10^3$ قارورة شهريا.

دراسات المحاسبة التحليلية بينت أن تكلفة القارورة الواحدة المنقولة من ك ل وحدة إنتاج إلى كل مقر ناحية من النواحي هي بالدينار كما يلي:

الغرب	الشرق	الوسط	مصب / منبع
5	4	1	موزاية
3	7	5	سعيدة
9	8	10	باتنة

المطلوب: اوجد الحل الاساسي والحل الامثل للمسألة.

تمرين02:

يقوم الديوان الوطني للتمور بتسويق دقلة نور انطلاقا من 3 موانئ رئيسية الى 3 دول، حيث ان الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

- ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 80 طن.
- ميناء وهران: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 40 طن.
- ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 60 طن.

اما كميات الطلب لكل دولة فهي:

- الولايات المتحدة الامريكية: حجم الطلب هو 70 طن.
- كندا : حجم الطلب هو 70 طن.
- استراليا: حجم الطلب هو 40 طن.

تكلفة نقل القنطار الواحد من التمور بالدولار الامريكي من كل ميناء الى كل دولة مستوردة موضحة بالجدول التالي:

	و.م .امريكية	كندا	استراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء عنابة	13	12	8

اذا كان الديوان الوطني هو الذي يتولى نقل المنتوج الى الدول المستوردة ، وهدفه هو تصدير منتوجاته باقل تكلفة ممكنة.

المطلوب:

- اكتب البرنامج الرياضي؟
- اوجد الحل الاساسي والحل الامثل للمسألة؟

قائمة المراجع

قائمة المراجع المعتمدة:

1) ابو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر،2009.
2) دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات ، دار اليازوري، الاردن ، 2008.
3) عبد القادر مطاليس، ياسين العايب، بحوث العمليات، النشر الجامعي الجديد، الجزائر،2017.
4) محمد راتول، بحوث العمليات،ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2011.
5) مكيد علي، بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.