Exercices résolus sur le module de Méthodes Numériques (2Inf 2021/2022)

Exercice 01: Soit $x = \frac{17}{21} = 0.80952380952381......$ et $x_1^* = 0.80943$.
Trouver tous les chiffres significatifs exacts de x_1^*.
Solution
$\triangle x_1 = |x - x_1^*| = 9.380952380955154 \times 10^{-5}$.
$\triangle x_1 = 9.380952380955154 \times 10^{-5} > 0.5 \times 10^{-5}$, alors le chiffre 3 de x_1^* n'est pas exact.
$\triangle x_1 = 9.380952380955154 \times 10^{-5} = 0.9380952380955154 \times 10^{-4} > 0.5 \times 10^{-4}$, alors le chiffre 4 de x_1^* n'est pas exact.
$\triangle x_1 = 9.380952380955154 \times 10^{-5} = 0.09380952380955154 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-1} \leq 0.5 \times 10^{0}$, donc tous les chiffres soulignés sont exacts $\underline{0.809}43$.
Exercice 02: On considère le système suivant:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -2 \\ 4x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{cases}.$$

1) Ecrire le système précédent sous une forme matricielle $AX = B$.
2) Trouver le déterminant de A $(\det(A))$.
3) Résoudre le système $AX = B$ par la méthode de Gauss.
Solution
1) la forme matricielle $AX = B$ est comme suit

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\det(A) = -26 \neq 0$, alors le système possède une solution unique.
3) La méthode de Gauss

$$\overset{(1)}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \overset{(2)}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \overset{(3)}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}},$$

donc $x_3 = \frac{\left(\frac{-9}{7}\right)}{\left(\frac{13}{7}\right)} = -\frac{9}{13}$, $x_2 = \frac{10}{13}$, $x_1 = -\frac{27}{26}$.
Exercice 03: On considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver le déterminant de A $(\det(A))$.
2) Décomposer A en LU.
3) Résoudre le système $AX = B$ par la méthode de décomposition en LU, où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Solution

1) On a $\det(A) = 8 \neq 0$.

2) Pour trouver U, il faut utiliser la méthode de Gauss pour A,

$$\overset{(1)}{\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \to \overset{(2)}{\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}} \to \overset{(3)}{\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}},$$

donc, $U = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}$ où $l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$.

$l_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $l_{3,1} = \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{-1}{4}$, $l_{3,2} = \frac{a_{3,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} = \frac{\left(\frac{-1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) $AX = B \Leftrightarrow LUX = B \Leftrightarrow \begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$, on résout d'abord le système $LY = B$,

$$\begin{cases} y_1 & = & 2 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 & = & 4 \end{cases},$$

on obtient: $y_1 = 2, y_2 = -\frac{1}{2}y_1 = -1, y_3 = 4 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 4$. On résout aussi, le système $UX = Y$

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 & = & -1 \\ 4x_3 & = & 4 \end{cases},$$

donc: $x_3 = 1, x_2 = -8, x_1 = -18$.

Exercice 04: Soit le système suivant:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 & = & -1 \\ 4x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases}.$$

1) Déterminer quelles sont les conditions initiales pour qu'on peut appliquer la méthode itérative de Jacobi de résolution le système $AX = B$?

2) Ecrire la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de Jacobi.

Solution

1) Les conditions initiales sont $\det(A) \neq 0$ et $a_{i,i} \neq 0, \forall i = 1, ..., 3$.

En fait, $a_{1,1} = 1, a_{2,2} = 1, a_{3,3} = 1$ et $\det(A) = -31$, donc le système vérifie les conditions initiales.

2) La suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ s'écrit comme:

$$\left\{\begin{array}{c} X^{(0)} \text{ quelconque,} \\ X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta \end{array}\right. ,$$

où $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.