2018/2019

فيزياء-1-
ميكانيك النقطة

لطلبة السنة الأولى ليسانس

ميدان علوم المادة

د: عزالدين بقاص

قسم الفيزياء – كلية العلوم الدقيقة

جامعة الوادي

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued

معلومات على المقرر:

مقرر الفيزياء-1- (ميكانيك النقطة)، موجه لطلبة سنة أولى ليسانس جذع مشترك علوم المادة. يدرس في السداسي الأول بحجم ساعي اسبوعي 3 ساعات أي محاضرتين أسبوعيا.

أهداف تدريس المقياس:

يسمح تدريس هذا المقياس للطالب بـ:

- معرفة المقادير الشعاعية وكيفية التعامل معها.
- اكتساب المفاهيم الأساسية للميكانيك الكلاسيكي المتعلقة بالنقطة المادية، من خلال علم الحركة وعلم التحريك (الديناميك).
- استيعاب مفاهيم العمل والطاقة.

المعرفة السابقة الموصي بها:

يوصى بإتقان العلوم الفيزيائية للمرحلة الثانوية وبصفة خاصة برنامج البكالوريا.

محتوى المقياس:

1. تذكرة رياضية (الأشعة، التحليل البعدي)
2. حركيات النقطة
3. الحركة النسبية
4. ديناميك النقطة (تحريك النقطة)
5. العمل والطاقة

الفصل الاول

الأشعـــــة

مقدمــــــة:

لفهم وتفسير الظواهر الفيزيائية من الضروري ان نتعامل مع: مقادير فيزيائية (الكتلة -الطول -السرعة -الزمن -درجة الحرارة ...) وعلاقات رياضية.

تصنف المقادير الفيزيائية الى ثلاثة اقسام: سلمية (عددية) وشعاعية ومؤثرات.

- **المقادير الفيزيائية السلمية:** هي مقادير فيزيائية يعبر عنها بقيمة عددية واحدة فقط في الوحدة المناسبة. فعندما نقول ان الزمن المستغرق للانتقال من نقطة الى أخرى هو 60s فلا نحتاج الى أي إضافة لان المعنى تحدد تماما. من هذه المقادير نذكر (الكتلة -الطول -الزمن- درجة الحرارة ...). ان العمليات التي تديرها هي العمليات التي تتحكم وتدير الاعداد الحقيقية من جمع وطرح وضرب وتقسيم، فيما يعرف بالحساب أو جبر الاعداد. فمثلا إذا كان لدينا ساقان معدنيان طولهما هو: $L_2 = 5m,\ L_1 = 4m$

فان: $L_2/L_1 = 5/4\,,\ L_2 + L_1 = 5 + 4 = 9m,\ L_2 - L_1 = 5 - 4 = 1m$

- **المقادير الفيزيائية الشعاعية:** نذكر منها السرعة -الحقل الكهربائي-الدفع الخطي ... وهي المقادير الفيزيائية التي يلزم لتحديدها معرفة مقدارها واتجاهها (تحدد بعددين او ثلاثة اعداد). فمثلا يسمح الوصف الشعاعي للحركة بتحديد اتجاه الانتقال والسرعة والتسارع، كما أن طول الشعاع يعبرعن قيمة المقدار الشعاعي المعتبر. والعمليات التي تديرها هي العمليات التي تتحكم وتدير الاشعة.

- المؤثرات: لا نتطرق لموضوع المؤثرات في هذا المقياس.

نعرض في الفقرة الموالية الأشعة، في المستوي وفي الفضاء، والعمليات الممكنة عليها مثل الجمع والطرح والجداء السلمي والجداء الشعاعي.

1.1 تعريف الشعاع:

هو قطعة مستقيمة موجهة يتعين بعددين ويستعمل الرمز $\vec{A}$ للدلالة عليه مقدارا واتجاها.

يرمز لطوله او مقاسه أي القيمة العددية (الطويلة – الشدة) بالرمز: $A = |\vec{A}| = \|\ \vec{A}\ \|$، وهو أحد العددين المحددين له ويتضمن وحدته.

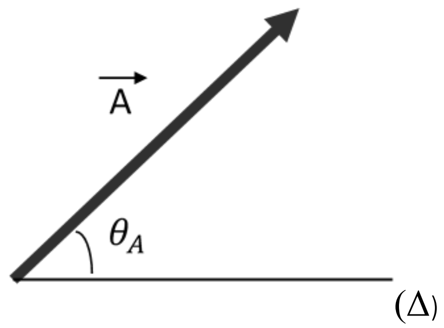
أما العدد الثاني الذي يحدده فهي الزاوية θ_A التي يصنعها هذا الشعاع بعكس جهة دو ا رن عقارب الساعة مع محور مرجعي (Δ) محدد مسبقا وتسمى هذه الزاوية عمدة الشعاع. وبالتالي فإن الشعاع يتعين بمعرفة كل من طويلته وعمدته.

نحتاج غالبا، عوضا عن تمثيل الشعاع هندسيا الشكل (1.1)، إلى وصف الشعاع عدديا العلاقة (1.1)، ولذلك نصف شعاع ما عدديا بإعطاء قيمتين عدديتين احداهما لطوله والأخرى لعمدته.

يكتب الشعاع هندسيا كالتالي:

$$\vec{A}=(|\vec{A}|,\theta_A)=(A,\theta_A) \qquad (1.1)$$

يمثل الشعاع هندسيا كالتالي:



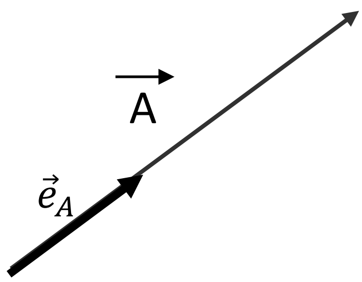
الشكل (1.1): تمثيل الشعاع $\vec{A}$ هندسيا

ملاحظة: الشعاع لا يتغير إذا نقلناه من مكانه شريطة المحافظة على طوليته وعمدته.

2.1 شعاع الوحدة:

شعاع وحدة الاشعة هو شعاع طويلته تساوي الواحد (بدون وحدة). سوف يرمز له فيما سيأتي بالرمز$\vec{e}$. ان أشعة الوحدة تعين الاتجاهات في الفضاء. يمكن التعبير عن شعاع مواز لشعاع الوحدة بالعلاقة (2.1)، وتمثيلا هندسيا بالشكل (2.1):

$$\vec{A}=|\vec{A}|\ \vec{e}_A= A\ \vec{e}_A \qquad (2.1)$$

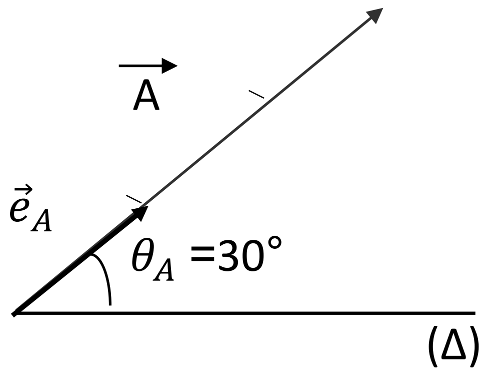


الشكل (2.1): التمثيل الهندسي للشعاع $\vec{A}$ وشعاع وحدته

من العلاقة (2.1)، نلاحظ بان شعاع الوحدة يمكن ان يكتب بالشكل: $\vec{e}_A=\frac{\vec{A}}{A}$

مثال: مثل الشعاع $\vec{A}=(3, 30°)$، مع اظهار شعاع الوحدة $\vec{e}_A$ وفقه، ثم اكتب الشكل الهندسي لشعاع الوحدة؟

الحل: الشكل (3.1) يظهر التمثيل البياني للشعاع $\vec{A}$ ووفقه شعاع وحدته $\vec{e}_A$.



الشكل (3.1): الشعاع $\vec{A}$ وشعاع وحدته

الشعاع $\vec{A}$ وفق شعاع الوحدة $\vec{e}_A$ يمكن ان يكتب على الشكل: $\vec{A}=3\,\vec{e}_A$

ملاحظة: الصورة الهندسية للشعاع الوحدة في مثالنا هذا هي:

$$\vec{e}_A=(1,30°)$$

حيث بالنسبة لشعاع الوحدة $|\vec{e}_A|= e_A =1$

3.1 العمليات التي تدير الاشعة:

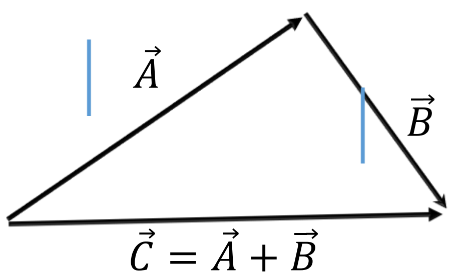
تتطلب الحسابات على الأشعة مجموعة من العمليات، مثل الجمع والطرح الشعاعيين، وضرب شعاع بمقدار سلمي والجداء السلمي والجداء الشعاعي.

4.1 جمع الأشعة:

ليكن الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من جنس واحد نرفق لهما شعاعا $\vec{C}$ بواسطة عملية الجمع الهندسي كالتالي:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \qquad (3.1)$$

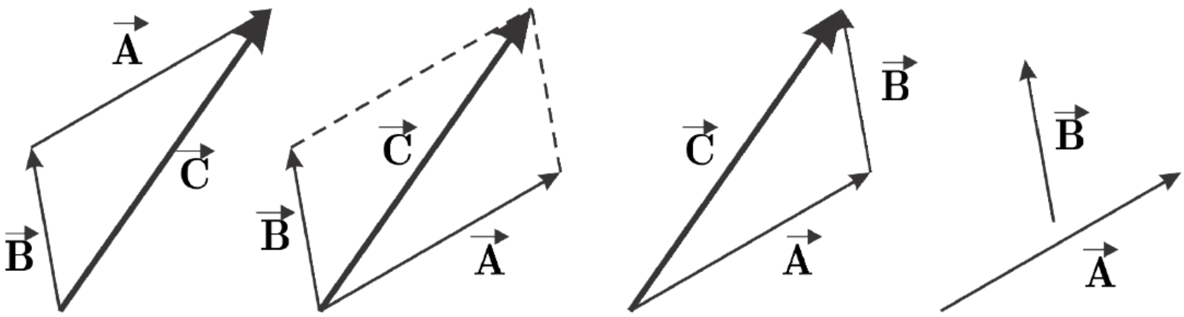
يدعى مجموع شعاعين غالبا بمحصلة هذين الشعاعين، لذا فإن الشعاع $\vec{C}$ هو محصلة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.



الشكل(4.1):محصلة شعاعين

إن طريقة إجراء الجمع الشعاعي هندسيا تتم على الشكل التالي:

ليكن الشعاعان $\vec{A}$ و$\vec{B}$ كما في الشكل (5.1) نحصل على محصلة هذين الشعاعين بإعادة رسم الشعاع $\vec{B}$ وذلك بوضع بدايتة عند نهاية الشعاع $\vec{A}$ محافظين على طوله واتجاهه دون تغيير، ان المحصلة $\vec{C}$ تبدأ من بداية الشعاع $\vec{A}$ وتنتهي عند نهاية الشعاع $\vec{B}$. يمكننا أيضا الحصول على هذه المحصلة برسم الشعاع $\vec{B}$ انطلاقاً من بداية الشعاع $\vec{A}$ ثم نرسم متوازي الأضلاع الناشئ عن هذين الشعاعين، فتكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع المنطلق من بدايتي الشعاعين، كما هو موضح على الشكل (5.1).



الشكل (5.1): طريقة إجراء جمع شعاعين هندسيا

عملية الجمع الشعاعي هي عملية تبديلية:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (4.1)$$

نستطيع تعيين الشعاع $\vec{C}$ مباشرة من الشكل بقياس طوله وعمدته بواسطة المسطرة والمنقلة ثم تتم كتابته على الصورة الهندسية بالشكل التالي:

$\vec{C}=|\vec{A}+\vec{B}|$ حيث $\vec{C}=(|\vec{C}|,\theta_c)=(C,\theta_c)$

عندما نريد جمع أكثر من شعاعين معاً، مثلا الجمع الشعاعي لثلاثة أشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ حيث:

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \qquad (5.1)$$

في هذه الحالة نقوم برسم الأشعة الثلاثة على التتالي، بحيث تكون بداية كل شعاع عند نهاية الشعاع الذي قبله. ويكون الشعاع المحصلة هو الشعاع الذي تكون بدايته بداية الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الأخير. يمكن أيضا ان نقوم بجمع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فنحصل على الشعاع $\vec{D}$ ثم نجمع $\vec{D}$ و $\vec{C}$ لنحصل على الشعاع المحصلة $\vec{R}$:

$$\vec{R}=\overrightarrow{(A+B)}+\vec{C}=\vec{D}+\vec{C} \qquad (6\ .1)$$

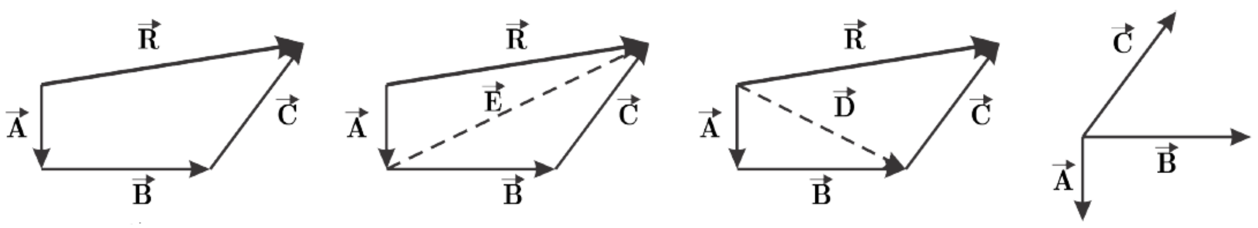
أو

$$\vec{R}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}+\vec{E} \qquad (7\ .1)$$

وهذا يعني أن عملية جمع الأشعة هي عملية تجميعية.

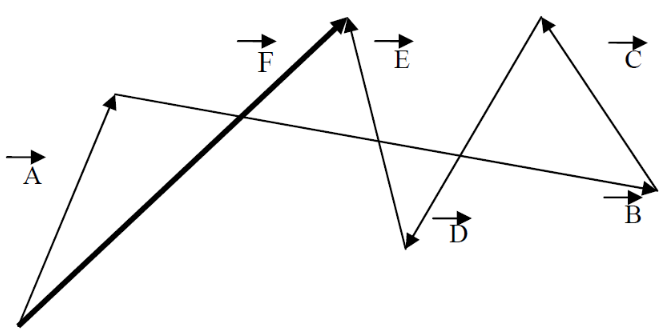
نذكر، بناء على خواص الجمع الهندسي للأشعة، أن عملية جمع الأشعة تؤخذ بأي ترتيب، وفي حالة خاصة، يمكن استبدال أي جزء منها بمحصلته دون أن يتغير الناتج كما يوضح ذلك الشكل (6.1).

الشكل (6.1) يوضح الجمع الشعاعي لثلاثة أشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بطرق مختلفة.



الشكل (6.1): الجمع الشعاعي لثلاثة أشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بطرق مختلفة

- جمع عدة أشعة: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{F}=\vec{F}$



التمثيل الهندسي لجمع عدة أشعة: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{F}=\vec{F}$

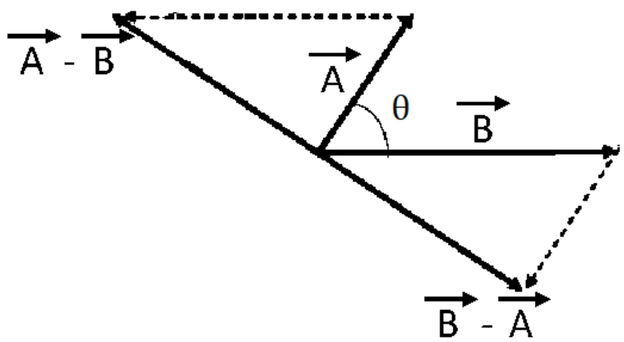
5.1 الفرق بين الأشعة:

ان عملية طرح الاشعة تعتبر حالة خاصة من عملية الجمع لأنه يمكن كتابة:

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (8.1)$$

نعرف عكس الشعاع $\vec{B}$ ونرمز له بالرمز $(-\vec{B})$، بأنه شعاع له طول الشعاع نفسه و يعاكسه في الاتجاه $(\theta_{-B}=\theta_B+180°\ ,\ |\vec{B}|=|-\vec{B}|)$.

نعرف الفرق الشعاعي $(\vec{A}-\vec{B})$ بانه محصلة الشعاعين $(\vec{A})$ و$(-\vec{B})$ كما هو موضح في الشكل (1. 7).



الشكل (7.1): يمثل محصلة الشعاعين $(\vec{A})$ و$(-\vec{B})$، $(-\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

نلاحظ أنّ عملية طرح الاشعة ليست تبديلية:

$$\vec{A}-\vec{B}\neq\vec{B}-\vec{A} \qquad (9.1)$$

1 . 6 جداء شعاع في مقدار سلمي:

إن حاصل جداء الشعاع غير المعدوم $\vec{A}$ بالعدد الحقيقي n هو شعاع جديد $\vec{B}$ يوازي الشعاع $\vec{A}$.

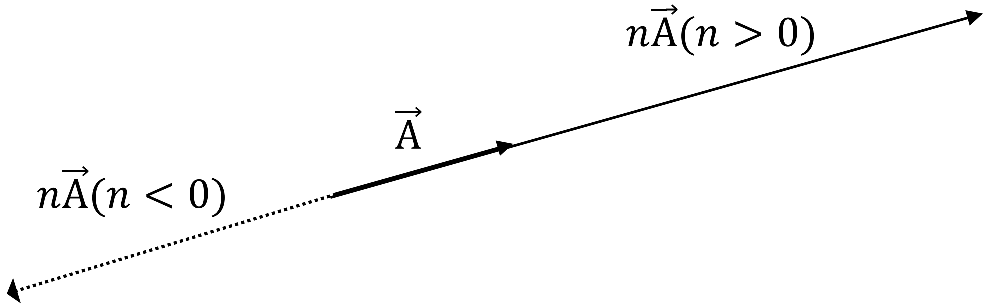
$$\vec{B}\ //\ \vec{A} \quad ; \quad \vec{B}=n\vec{A}$$

طويلة الشعاع $\vec{B}$ تساوي القيمة المطلقة للعدد n مضروبة بطويلة الشعاع $\vec{A}$.

$$|\vec{B}|=B=|n||\vec{A}|=|n|A \qquad (10.1)$$

اتجاه الشعاع $\vec{B}$ يتعلق بإشارة العدد (n) حيث:

له اتجاه الشعاع $\vec{A}$ نفسه إذا كان العدد n موجباً $(n>0)$، ويعاكسه بالاتجاه إذا كان العدد n سالباً $(n<0)$ الشكل (1. 8).

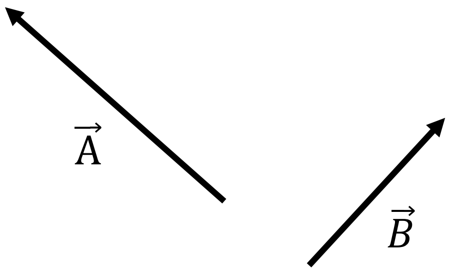


الشكل (1. 8): جداء الشعاع بعدد حقيقي

ملاحظة: إذا ضربنا الشعاع $\vec{A}$ بمقلوب طويلته ($\frac{1}{A}$) فإننا نحصل على شعاع الوحدة ($\vec{e}_A$) المحمول //على $\vec{A}$ ويكون لدينا: $\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ ، أي أن $\vec{A} = A\,\vec{e}_A$.

مثال:

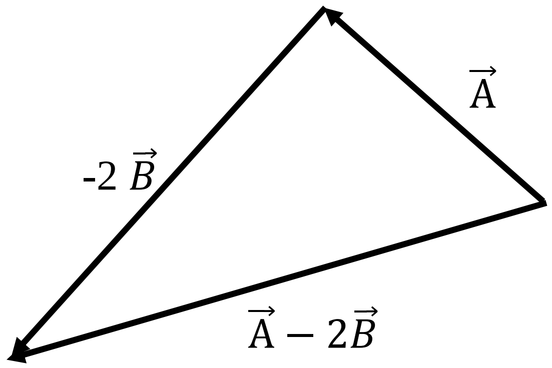
ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعين كما في الشكل أدناه أوجد $(\vec{A} - 2\vec{B})$.



الشكل (1. 9)

الحل:

نقوم برسم الشعاع $\vec{A}$ ثم من نهايته نقوم برسم الشعاع ($-2\vec{B}$) الذي بدايته نهاية الشعاع $\vec{A}$، ويوازي الشعاع $\vec{B}$ لكن في الاتجاه المعاكس وبضعف طوله، ثم نقوم برسم المحصلة التي تكون بدايتها بداية الشعاع $\vec{A}$ ونهايتها نهاية الشعاع ($-2\vec{B}$) كما يوضحه الشكل (1. 10).



الشكل (1. 10)

ملاحظة: يمكن الحصول على طول المحصلة $\vec{C}$ لأي شعاعين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ من العلاقة الرياضية التي سنأتي على برهانها لاحقا فنكتب:

$$C=\sqrt{A^2\ +B^2+2ABcos\theta_{AB}} \qquad (11.1)$$

حيث θ_{AB} هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و$\vec{B}$.

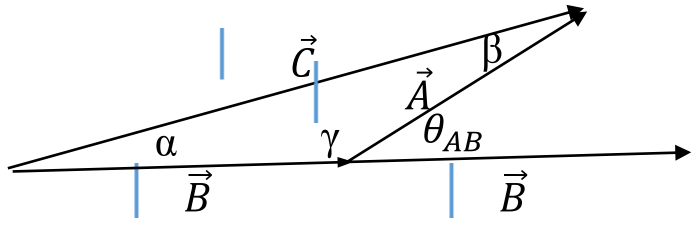
كما نحصل على اتجاه المحصلة $\vec{C}$ بحساب الزاوية بينها وبين $\vec{A}$ أو$\vec{B}$ من العلاقة:

$$\frac{A}{sin\alpha}=\frac{B}{sin\beta}=\frac{C}{sin\gamma} \qquad (12.1)$$

حيث تعرف الزوايا α، β و γ كما هو موضح في الشكل أدناه:

حيث α هي الزاوية المحصورة بين $\vec{C}$ و $\vec{B}$

β هي الزاوية المحصورة بين $\vec{C}$ و $\vec{A}$



الشكل (1. 11)

1 . 7 الجداء السلمي

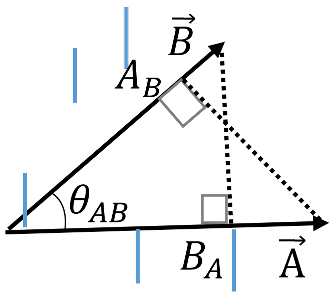
من العمليات التي تدير الأشعة هي عملية الجداء السلمي لشعاعين.

إذا كان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعين (ليس شرطا ان يكونا من جنس واحد)، فإن الجداء السلمي لهذين الشعاعين الذي يرمز له بالرمز ($\vec{A}.\vec{B}$) هو مقدار سلمي يساوي جداء طويلتيهما مضروبا بجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما، أي أن:

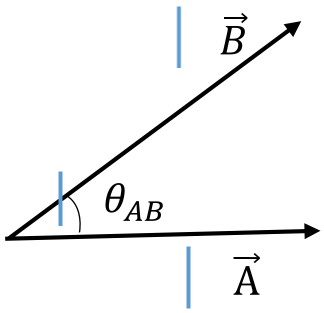
$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\theta_{AB} \qquad (13.1)$$

θ_{AB} أصغر زاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$، حيث ان: $0 < \theta_{AB} < \pi$. الشكل (1. 12)

يمكن النظر للجداء السلمي لشعاعين على أنه ناتج ضرب طول أحدهما بمسقط الآخر عليه الشكل (13.1)، يمكن كتابة الجداء السلمي على أحد الصور المبينة في العلاقة (14.1):



الشكل (1. 13)



الشكل (1. 12)

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.cos\theta_{AB} = A_B.B = A.B_A \qquad (14.1)$$

نسمي المقدار: $B_A = B.\cos\theta_{Ab}$ مركبة او مسقط الشعاع $\vec{B}$ وفق الشعاع $\vec{A}$

نسمي المقدار: $A_B = A.\cos\theta_{Ab}$ مركبة او مسقط الشعاع $\vec{A}$ وفق الشعاع $\vec{B}$

مثال: عين الجداء السلمي للشعاعين: $\vec{A}(3, 60°)$ و $\vec{B}(2, -10°)$

وكذا مسقط كل منهما على الآخر؟

الحل:

الجداء السلمي للشعاعين بحسب العلاقة (13.1) هو:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\theta_{AB} = 2x3.\cos(70) = 6x0.342 = 2.052$$

مسقط الشعاع $\vec{A}$ وفق الشعاع $\vec{B}$ يحسب كالتالي:

$$A_B = \text{A.}\cos\theta_{Ab} = 3\text{x}0.342 = 1.026$$

مسقط الشعاع $\vec{B}$ وفق الشعاع $\vec{A}$ يحسب كالتالي:

$$B_A = \text{B.}\cos\theta_{Ab} = 2\text{x}0.342 = 0.684$$

للجداء السلمي الخواص التالية:

1-الجداء السلمي تبديلي:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\theta_{AB} = |\vec{B}|.|\vec{A}|\cos(-\theta_{AB}) = \vec{B}.\vec{A} \qquad (15.1)$$

2-الجداء السلمي توزيعي على اليمين واليسار على الجمع الشعاعي، أي إن:

$$\vec{\text{A}}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \qquad (16.1)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C} \qquad (17.1)$$

3-الجداء السلمي لشعاع ما في نفسه يساوي مربع طول ذلك الشعاع:

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A.cos0 = A^2 \qquad (18.1)$$

من هذه العلاقة نستنتج قاعدة لحساب طول الشعاع $\vec{A}$ كالتالي:

$$A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}} \Leftarrow \vec{A}.\vec{A} = A^2 \qquad (19.1)$$

4-ينعدم الجداء السلمي لشعاعين إذا كان أحد الشعاعين شعاعا معدوما أو إذا كان الشعاعان متعامدين:

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad (20.1)$$

ومنه نستنتج القاعدة:

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B} \qquad (21.1)$$

ومنه هذه القاعدة مناسبة لاختبار تعامد الاشعة.

5-الجداء السلمي $(\vec{\text{A}}.\vec{e}_A)$ يعبر عن مسقط أو (مركبة) الشعاع $\vec{\text{A}}$ وفق المحور Δ، حيث $\vec{e}_A$ شعاع توجيهه ونكتب:

$$A_{\Delta} = \vec{A}.\ \vec{e}_A = |\vec{A}|.|\ \vec{e}_A|.cos\theta_{\Delta A} = Acos\theta_{\Delta A} \quad (22.1)$$

6-إذا كان الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ على استقامة واحدة فإن:

$$\vec{A}.\vec{B} = \pm|\vec{A}|.|\vec{B}| \quad (23.1)$$

حيث أن الإشارة تكون موجبة إذا كانا بالاتجاه نفسه وتكون سالبة إذا كانا في اتجاهين متعاكسين.

مثال

عين طويلة الشعاع $\vec{C}$ محصلة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الحل:

لدينا: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ومنه فان: $|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}|$

وبحسب الخاصية الثالثة والثانية فان:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} + \vec{B})} = \sqrt{\vec{A}.\vec{A} + \vec{B}.\vec{B} + 2\vec{A}.\vec{B}}$$

ومنه:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\theta_{AB}}$$

وهي العلاقة المعروفة بعلاقة التجب والتي ذكرت آنفا (11.1).

1 . 8 الجداء الشعاعي

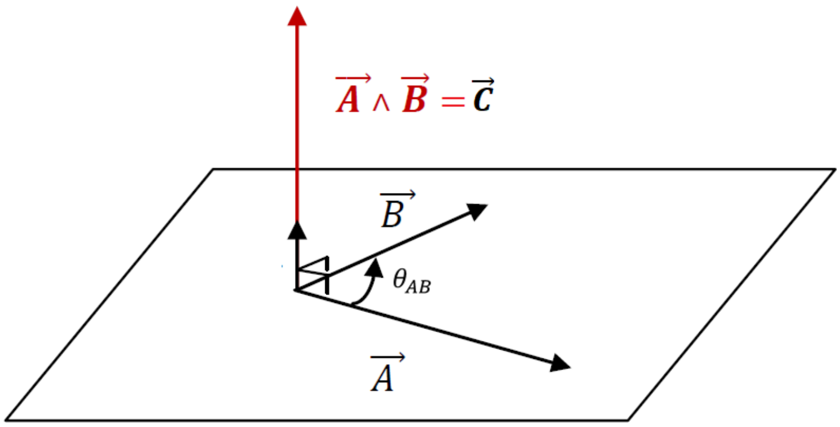
الجداء الشعاعي يمثل مقدارا شعاعيا بعكس الجداء السلمي الذي يمثل مقدارا سلميا. نرمز للجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A}\wedge\vec{B}$ أو الرمز $\vec{A} \times \vec{B}$، وهو شعاع $\vec{C}$ يعطى بالعلاقة:

$$\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = (ABsin\theta_{AB})\ \vec{e}_C \quad (24.1)$$

حيث: $\vec{e}_C$ شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{C}$، و θ_{AB} هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$. الشعاع $\vec{C}$ عمودي على المستوي المحدد بالشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وبحيث تكون الثلاثية الطردية المرتبة ($\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$) مباشرة، الشكل (14.1).

المقصود بالثلاثية الطردية هو ان يكون الانتقال من $\vec{A}$ الى $\vec{B}$ الى $\vec{C}$ بالترتيب من اليمين الى اليسار في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة واتجاه $\vec{C}$ يحدد بقاعدة أصابع اليد اليمنى،

قاعدة أصابع اليد اليمنى هو أننا اذا وضعنا الابهام باتجاه الشعاع $\vec{A}$ والوسطى باتجاه الشعاع $\vec{B}$ فيكون اتجاه الشعاع $\vec{C}$ في اتجاه السبابة.



الشكل (14.1): الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

للجداء الشعاعي الخواص التالية:

1-الجداء الشعاعي عملية غير تبديلية:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \neq \vec{B} \wedge \vec{A}$$

لكن يكون لدينا:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

2-الجداء الشعاعي توزيعي على اليمين واليسار على الجمع الشعاعي، أي إن:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C} \qquad (25.1)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B} \wedge \vec{C} \qquad (26.1)$$

3-إذا كان الشعاع $\vec{A}$ موازياً للشعاع $\vec{B}$ فإن جدائهما الشعاعي معدوم، فنكتب:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \parallel \vec{B} \qquad (27.1)$$

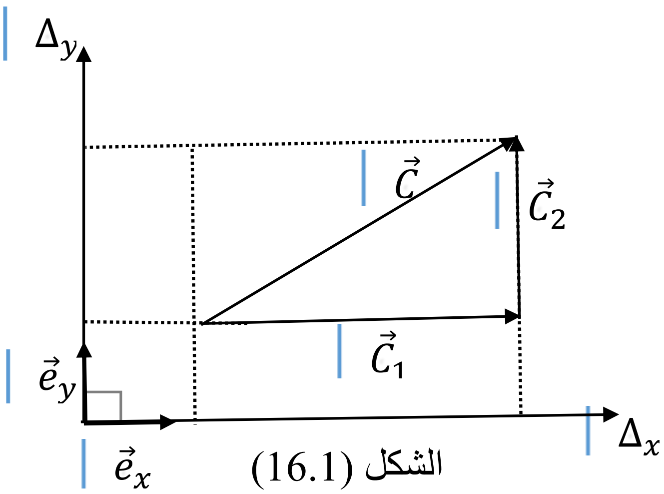
ومنه هذه القاعدة مناسبة لاختبار توازي الاشعة.

1 . 9 تحليل الأشعة

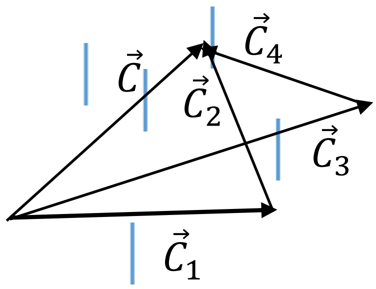
إضافة إلى أن عملية طرح الأشعة هي العملية المعاكسة لعملية جمع الأشعة، توجد عملية أخرى معاكسة لعملية جمع (تركيب) الأشعة هي عملية تحليل الشعاع الواحد لعدة أشعة، أي

استبدال الشعاع الواحد بمجموعة من الأشعة تكون محصلتها تساوي الشعاع المفروض. بما أن عملية التحليل تكافئ هندسيا إنشاء مضلع أشعة يكون فيه الشعاع المفروض هو الشعاع الذي يغلق المضلع، فإن عملية التحليل يمكن إجراؤها بعدد لا نهائي من الأشكال أو الطرائق الشكل (15.1). أي أنه ليس لهذه المسألة بشكلها الحالي حل وحيد، وبالتالي لا بد من إضافة شروط أخرى على عملية التحليل كي تصبح وحيدة الحل وكمثال على ذلك المركبات المتعامدة الشكل (16.1) حيث مركبتا الشعاع $\vec{C}$ هما $\vec{C}_1$ و $\vec{C}_2$ موازيان لكل من Δ_x و Δ_y على الترتيب.

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 = \vec{C}_3 + \vec{C}_4 \qquad (28.1)$$



الشكل (16.1)



الشكل (15.1)

عادة تستعمل المركبات المتعامدة، فاذا وجهنا المحورين Δ_x و Δ_y بالشعاعين $\vec{e}_x$ و $\vec{e}_y$ فان $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ يكتبان بالشكل التالي:

$$\vec{C}_x = C_1.\vec{e}_x = C_x.\vec{e}_x \qquad (29.1)$$

$$\vec{C}_y = C_2.\vec{e}_y = C_y.\vec{e}_y \qquad (30.1)$$

نسمي كل من C_x و C_y مركبتا الشعاع $\vec{C}$ وفق المحورين المتعامدين Δ_x و Δ_y، يمكن ان نكتب:

$$\vec{C}=C_x.\vec{e}_x + C_y.\vec{e}_y \qquad (31.1)$$

يمكن حساب مركبتي الشعاع $\vec{C}$ باستعمال الجداء السلمي للشعاعين $\vec{C}$ و $\vec{e}_x$ وللشعاعين $\vec{C}$ و $\vec{e}_y$ كالتالي:

$$C_x = \vec{e}_x.\vec{C} \quad \text{و} \quad C_y = \vec{e}_y.\vec{C} \qquad (32.1)$$

حيث Δ_x ، Δ_y هي أساس أو مرجع خصائصه:

- خاصية تجانس الأساس:

$$\vec{e}_x.\vec{e}_x = \vec{e}_y.\vec{e}_y = \vec{e}_z.\vec{e}_z = 1 \qquad (33.1)$$

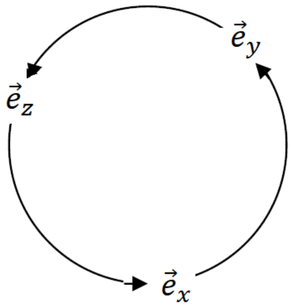
- خاصية التعامد:

$$\vec{e}_x.\vec{e}_y = \vec{e}_x.\vec{e}_z = \vec{e}_y.\vec{e}_z = 0 \qquad (34.1)$$

- الخاصية الطردية للأساس:

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \;,\; \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \;, \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \qquad (35.1)$$

ملاحظة: نقول عن المتجهات $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ في هذه الحالة أنها تشكل أساسا متعامدا ومباشرا. تحفظ العلاقات (35.1) بسهولة بالاستعانة بالقاعدة التالية: على محيط دائرة نكتب الاشعة $\{\vec{e}_z, \vec{e}_y, \vec{e}_x\}$ بهذا الترتيب في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.



- عندما تدور في هذا الاتجاه أي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة يكون الجداء الشعاعي لأي متجهين متتاليين يساوي المتجه الثالث.
وعندما تدور في الاتجاه المعاكس لهذا الاتجاه أي في اتجاه دوران عقارب الساعة يكون الجداء الشعاعي لأي متجهين متتاليين يساوي عكس المتجه الثالث

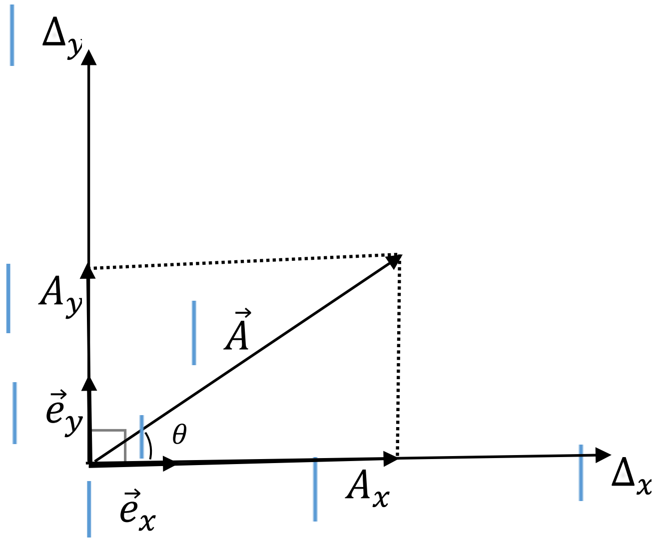
ملاحظة: يرمز للأساس أحادي البعد بالرمز $\{\vec{e}_x\}$ وللأساس ثنائي البعد بالرمز $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ وثلاثي البعد بالرمز $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

مثال:

حلل الشعاع $\vec{A} = (3,30°)$ على الأساس ثنائي البعد (الأساس المستوي).

الحل

بصفة عامة الشعاع $\vec{A}$ في المستوي المحدد بالمحورين OX وOY ويصنع زاوية θ مع المحور OX ، كما يوضحه الشكل (17.1).



الشكل (17.1): تمثيل الشعاع ومركبتيه في مستوي

كل شعاع يحلل على الأساس المستوي على الصورة الوحيدة:

$$\vec{A}=A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y \qquad (36.1)$$

حيث A_x و A_y هما مركبتا الشعاع على المحورين OX و OY على الترتيب ونكتب:

$$A_x = \vec{e}_x.\vec{A} = Acos\theta$$

$$A_y = \vec{e}_y.\vec{A} = Asin\theta$$

بالتعويض في هذه الحالة نجد:

$$A_x = \vec{e}_x.\vec{A} = 3cos30 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

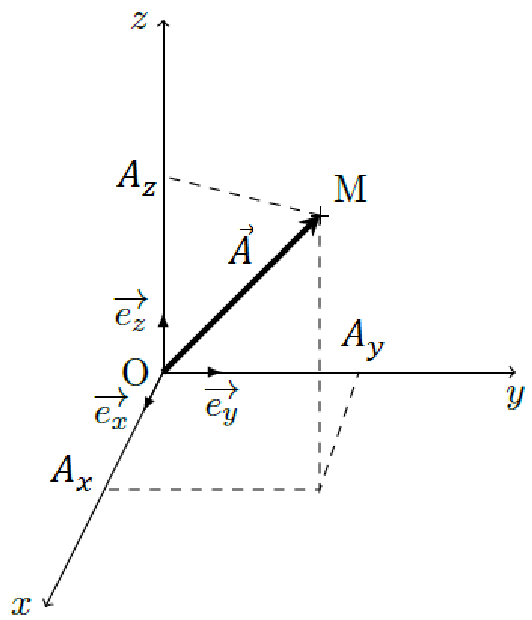
$$A_y = \vec{e}_y.\vec{A} = 3sin30 = 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ومنه يكتب الشعاع على الشكل

$$\vec{A} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{3}{2}\vec{e}_y$$

بصورة عامة يحلل الشعاع $\vec{A}$ على الأساس المتعامد والمتجانس في الفضاء الثلاثي الأبعاد، الشكل (18.1)، ثلاثَ مركّبات على ثلاثة محاور على الشكل:

$$\vec{A} = A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z \qquad (37.1)$$



الشكل (18.1): تمثيل الشعاع ومركبتيه في الفضاء

يمكن ان يمثل الشعاع $\vec{A}$ بمصفوفة بالشكل:

$$\vec{A}=(A_x, A_y, A_z) \qquad (38.1)$$

أو بالشكل:

$$\vec{A} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \qquad (39.1)$$

وتعطى طويلة الشعاع بالعلاقة:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (40.1)$$

10.1 العمليات على الأشعة المعطاة تحليليا

ا-تساوي شعاعين:

ليكن لدينا الشعاعان:

$$\vec{B} = B_x.\vec{e}_x + B_y.\vec{e}_y + B_z.\vec{e}_z \quad و \quad \vec{A} = A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z$$

نقول عن الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ إنهما متساويان إذا تساوت مركباتهما المتناظرة على المحاور الإحداثية، وبالعكس أي أن:

$$(41.1) \qquad \vec{A} = \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad A_x = B_x\,, A_y = B_y\,, A_z = B_z$$

ب-الصورة التحليلية لجمع الأشعة:

إذا كان الشعاع $\vec{C}$ هو مجموع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

فإن:

$$(42.1) \qquad C_x = A_x + B_x\,, \qquad C_y = A_y + B_y\,, \qquad C_z = A_z + B_z$$

العلاقة (42.1) تعطينا مركبات الشعاع $\vec{C}$ بدلالة مركبات الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

مثال: أوجد $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ و $\vec{B} - \vec{A}$ إذا كان:

$$\vec{A}(2,0,-1), \vec{B}(4,5,0), \vec{C}(1,2,-2)$$

الحل:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (2 + 4 + 1, 0 + 5 + 2, -1 + 0 - 2) = (7,7,-3)$$

$$\vec{B} - \vec{A} = (4 - 2, 5 - 0, 0 - (-1)) = (2,5,1)$$

ج-الصورة التحليلية للجداء السلمي:

ليكن الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نرفق لهما عددا سلميا بواسطة الجداء السلمي على الشكل:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z\right).\left(B_x.\vec{e}_x + B_y.\vec{e}_y + B_z.\vec{e}_z\right)$$

$$(43.1) \qquad \vec{A}.\vec{B} = \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right)$$

وهي الصورة التحليلية للجداء السلمي

مثال: عين الجداء السلمي للشعاعين:

$$\vec{B} = 3\vec{e}_x - \vec{e}_y - 2\vec{e}_z \quad و \quad \vec{A} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + \vec{e}_z$$

ثم أوجد أصغر زاوية محصورة بينهما.

الحل: بحسب العلاقة (43.1) لدينا الصورة التحليلية:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) = 2 \times 3 + (-1)(-3) + (-2)(1) = 7$$

ولدينا الصورة الهندسية بحسب العلاقة (14.1):

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.cos\theta_{AB}$$

حساب طويلة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باستعمال العبارة (40.1):

$$A = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

$$B = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

ومنه فان:

$$cos\theta_{AB} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B} = \frac{7}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$cos\theta_{AB} = \frac{1}{2}\,, \qquad 0 \leqslant \theta_{AB} \leqslant \pi \qquad\qquad \theta_{AB} = \frac{\pi}{3}$$

د-الصورة التحليلية للجداء الشعاعي:

الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يعطي الشعاع $\vec{C}$ بحيث نكتب:

$$\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right)\wedge\left(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z\right)$$

بتبسيط العبارة السابقة وذلك باستعمال الخاصية (2) (25.1) والخاصية الطردية للأساس (35.1)، نجد العلاقة بين مركبات الشعاع $\vec{C}$ من جهة والشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من جهة أخرى وهي كالتالي:

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \qquad (44.1)$$

$$C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad (45.1)$$

$$C_z = A_xB_y - A_yB_x \qquad (46.1)$$

وبشكل مختصر يمكن أن نكتب الجداء الشعاعي على شكل محدد:

$$\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{e}_z$$

مثال:

عين الجداء الشعاعي للشعاعين:

$$\vec{A}(2,1,-1), \vec{B}(1,0,-2)$$

ثم استنتج مقدار الزاوية بينهما؟

الحل:

إيجاد الجداء الشعاعي:

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\vec{e}_x + (3)\vec{e}_y + (-1)\vec{e}_z$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = -2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$$

مقدار الزاوية:

حساب طويلة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و$\vec{A}\wedge\vec{B}$ باستعمال العبارة (40.1):

$$A = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$B = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

ولدينا من الصورة الهندسية للجداء الشعاعي:

$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right| = ABsin\theta_{AB}$$

ومنه:

$$sin\theta_{AB} = \frac{\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|}{AB} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}.\sqrt{5}} = 0.68$$

وبالتالي نجد ان: θ_{AB} =43°

11.1 الجداء الثلاثي (الجداء المختلط):

في عملية الجداء السلمي أو شعاعي يمكن أن يكون أحد الشعاعين هو نفسه جداء شعاعي لشعاعين.

- خاصية الجداء الثلاثي السلمي:

هو بالتعريف الجداء السلمي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}\wedge\vec{C}$ ونكتب:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$$

إذا كان:

$$\vec{A} = A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x.\vec{e}_x + B_y.\vec{e}_y + B_z.\vec{e}_z$$

$$\vec{C} = C_x.\vec{e}_x + C_y.\vec{e}_y + C_z.\vec{e}_z$$

فان:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = (A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z).\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = A_x\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + A_y\begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + A_z\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

نلاحظ انه إذا تغيرت مواضع الأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ بشكل دائري، أي إذا حل الشعاع $\vec{A}$ محل الشعاع $\vec{B}$ وحل الشعاع $\vec{B}$ محل الشعاع $\vec{C}$ والشعاع $\vec{C}$ محل الشعاع $\vec{A}$ ، فإن قيمة الجداء الثلاثي السلمي لا تتغير. أي أن:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right) \qquad (41.1)$$

-خاصية الجداء الثلاثي الشعاعي:

هو بالتعريف الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}\wedge\vec{C}$ ونكتب: $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

ويكون لدينا:

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = (\vec{A}.\vec{C}).\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C} \qquad (42.1)$$

12.1 التدرج – التباعد – الدوران:

- نقول عن الدالة f(x, y, z) حقلا سلميا اذا كانت الدالة f(x, y, z) سلمية.

- نقول عن الدالة $\vec{V}$(x, y, z) حقلا شعاعيا اذا كانت الدالة $\vec{V}$(x, y, z) شعاعية.

- في الرياضيات، المؤثر نبلا هو دالة تقوم بإنجاز نوع من العمليات على الدوال السلمية أو الشعاعية الأخرى.

يعرف المؤثر الشعاعي التفاضلي نبلا (nabla) والذي يرمز له بالرمز ($\vec{\nabla}$) كالتالي:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (43.1)$$

($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$) هي المشتقات الجزئية بالنسبة للموضع.

ا.التدرج: تدرج الدالة السلمية

أن التدرج يؤثر على الحقول السلمية وينتج حقولا شعاعية أي يعبر عن تغيرات الحقل السلمي ، ويكسبه صفة شعاعية تساعد على تحديد جهة تلك التغيرات وأنه تفاضل الدالة بالنسبة للأبعاد الثلاثة (x , y , z) ، فإذا كانت f(x, y, z) دالة سلمية فان تدرجها مقدار شعاعي مركباته مشتقاتها الجزئية وهو معرف كالتالي:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (44.1)$$

مثال:

أحسب تدرج الدالة: $f(x, y, z) = 4x^3y^2z$

الحل:

حساب تدرج الدالة باستعمال العلاقة (44.1) فنجد:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = 12x^2y^2z.\vec{e}_x + 8x^3yz.\vec{e}_y + 4x^3y^2.\vec{e}_z$$

ب.التباعد: (التفرق)

التباعد أو ما يعرف بالتفرق يؤثر على الحقول الشعاعية وينتج عنه حقول سلمية وهو الجداء السلمي للمؤثر نبلا في دالّة شعاعية قابلة للاشتقاق والصورة التحليلية لتباعد الشعاع هي:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (45.1)$$

مثال: أحسب تباعد الشعاع:

$$\vec{V}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = 3xz\vec{e}_x + 2xy^2z\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

الحل:

حساب تباعد الشعاع باستعمال العلاقة (45.1) فنجد:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = 3z + 4xyz + y$$

ج.الدوران:

إذا كان لدينا الشعاع: $\vec{V} = \left(V_x,\ V_y,\ V_z\right)$ فان الصورة التحليلية لدوران هذا الشعاع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \qquad (46.1)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

مثال:

عين دوران الشعاع:

$$\vec{V}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = 4xy\vec{e}_x - 6yz^2\vec{e}_y + 18xy^3\vec{e}_z$$

الحل:

لحساب دوران الشعاع نستعمل العلاقة (46.1) فنجد:

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) = (54xy^2 + 12yz)\vec{e}_x - (18y^3 - 0)\vec{e}_y + (0 - 4x)\vec{e}_z$$

ومنه:

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) = (54xy^2 + 12yz)\vec{e}_x - (18y^3)\vec{e}_y + (4x)\vec{e}_z$$

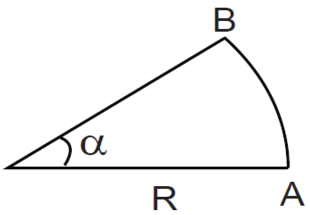
التحليل البعدي:

أدرجنا هذه الفقرة لما لها من أهمية في الاستدلال العلمي ونشر النتائج، ينبغي توظيفها للتحقق من تجانس العلاقات الفيزيائية وكذا البحث عن علاقات فيزيائية أخرى.

1-مفهوم البعد:

- بعد مقدار ما (G) هو الطبيعه الفيزيائية لهذا المقدار، ويرمز لبعد المقدار بـ $[G]$.
مثال: اذا كان (G) طولا مثلا، فإننا نكتب $[G]$=L.
- العلاقة $[G]$=L تمثل معادلة الابعاد للمقدار (G).
- كتابة معادلة ابعاد مقدار لا تتطلب اختيار نظام معين للوحدات.
مثال: السمك e له بعد الطول ومنه $[e]$=L، مهما كانت الوحدة المستعملة.
- مقدار بعده يساوي 1 أي $([G]=1)$ هو مقدار بدون بعد.
مثال: تعبير معامل انكسار وسط شفاف متجانس هو: $n=\frac{C}{V}$، ومنه:

$n=\frac{[C]}{[V]}=\frac{L/T}{L/T}=1$، إذن، معامل الانكسار لا بعد له.



- يمكن أن يكون مقدار بدون بعد ولكن له وحدة، مثال:
عندما نعبر عن زاوية بالراديان، فإن قياسها يساوي حاصل قسمة طول القوس على الشعاع (نصف القطر)، ونكتب:

$$\alpha=\frac{\widehat{AB}}{R} \Longrightarrow [\alpha]=\frac{[L]}{[L]}=1$$

يعني أن الزاوية لا بعد لها، ورغم ذلك لها وحدة (*grad, degré, rad*).
- تكون معادلة متجانسة إذا كان لطرفيها نفس البعد.

2. المقادير الأساسية:

يلخص الجدول أسفله المقادير السبعة الأساسية، ووحداتها في النظام العالمي للوحدات، والأبعاد الموافقة لها.

المقدار	اسم الوحدة	رمز الوحدة	رمز البعد
الطول	المتر	M	L
شدة التيار	الامبير	A	I
الكتلة	الكيلوغرام	kg	M
الزمن	الثانية	s	T
درجة الحرارة	الكلفن	K	θ
كمية المادة	المول	Mol	N
شدة الاضاءة	الكانديلا	Cd	J

ملحوظة: لا يتعلق رمز البعد بنظام الوحدات المستعمل.

3. قوانين التحليل البعدي:

لإنجاز التحليل البعدي لعلاقة ما، نعوض كل مقدار في هذه العلاقة ببعده.

- لا يمكن ان تجمع أو تطرح إلا المقادير التي لها البعد نفسه.

مثال :المعادلة الزمنية لحركة مستقيميه منتظمة هي: $x = vt + x_0$

$$[vt] = [x] = L$$

- بعد جداء مقدارين يساوي جداء بعدي المقدارين: $[A.B] = [A].[B]$.

مثال: التعبير عن ثقل جسم $[P] = [m].[g]$

- بعد قسمة مقدارين يساوي قسمة بعدي المقدارين.

مثال: التعبير عن السرعة المتوسطة: $v = \frac{x}{t} \Longrightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T}$

- بعد مقدار أسي A^x حيث x ليس بعدا: $[A^x] = [A]^x$

4. استعمال التحليل البعدي:

يسمح التحليل البعدي، عند كتابة معادلة او عبارة، بالتحقق من تجانسها، وحسب الحالة بتصحيحها، اذ لا يمكن ان تكون عبارة غير متجانسة صحيحة. بعبارة أخرى يمكن ان نقول: كل معادلة متجانسة يمكن أن تكون صحيحة، بينما كل معادلة غير متجانسة خاطئة.

- التحقق من تجانس قيمة:

مثال: التحقق من تجانس عبارة الدور لنواس بسيط: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

بعد الطرف الأول للمساواة: $[T_0] = T$

بعد الطرف الثاني: $\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \frac{[\sqrt{l}]}{[\sqrt{g}]} = [l]^{1/2}.[g]^{-1/2}$

نعلم ان (g) عبارة عن تسارع ومنه نكتب : $[g] = [a] = LT^{-2}$

بالتعويض نجد:

$$\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \frac{[\sqrt{l}]}{[\sqrt{g}]} = [l]^{1/2}.[g]^{-1/2} = L^{1/2}.(LT^{-2})^{-1/2} = L^{1/2}L^{-1/2}.T = T$$

المقدار متجانس لان طرفي المعادلة لهما نفس البعد، الذي هو الزمن.

الفصل الثاني

حركيات النقطة المادية

علم الحركة او حركيات النقطة المادية، هو ذلك الجزء من الميكانيك الذي يهتم بدراسة وتوصيف الحركة وتغيراتها بدلالة الزمن بصرف النظر عن مسبباتها كالقوى مثلا والتي تسمى تحريك النقطة المادية.

ان معرفة تغير موقع نقطة مادية ما بدلالة الزمن تقدم لنا وصفا كاملا لحركة تلك النقطة.

نهتم هنا بالمقادير التي تصف حركة الجسم وهي: موضع الجسم ومساره وسرعته وتسارعه، والتي نعينها بإحداثيات مختلفة.

1. تعاريف:

- النقطة المادية: لكل نقاط الجسم المتماسك المتحرك نفس الحركة، وهذا ما يدعونا الى القيام بدراسة حركة أحد نقاطه المميزة له مثل مركز كتلته. فتكون هذه النقطة ممثلة للجسم من حيث حركته وكتلته. ويطلق على هذه النقطـة أحيانا اسم المتحرك.
- الحركة والسكون مفهومان نسبيان فقد يكون الجسم ساكنا بالنسبة لجملة مقارنة ومتحركا بالنسبة لمرجع آخر، ولهذا عند دراسة أي حركة يجب تعيين نظام مرجعي (معلم) الذي تسند اليه الحركة، وتتم هذه الدراسة وفق أحد الشكلين:

- **شعاعي:** باستخدام أشعة الموضع والسرعة والتسارع.

- **جبري:** باستخدام معادلة الحركة وفق مسار معين.

➢ **المتحرك:** يقال عن جسم أنه متحرك إذا كان في مكانين مختلفين في زمنين مختلفين، أو بعبارة أخرى تغيرت مواضعه بمرور الزمن.

2. موضع المتحرك:

➢ **شعاع الموضع:** هو شعاع يدلنا على موضع المتحرك عند كل لحظة t، وبالتالي فهو الشعاع المنطلق من مركز المعلم O الى النقطة M موضع المتحرك. نرمز لشعاع الموضع غالباً بالرمز $\vec{r}$، في معلم ديكارتي $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ يكتب شعاع الموضع للنقطة M(x, y, z) في الفضاء بالشكل :

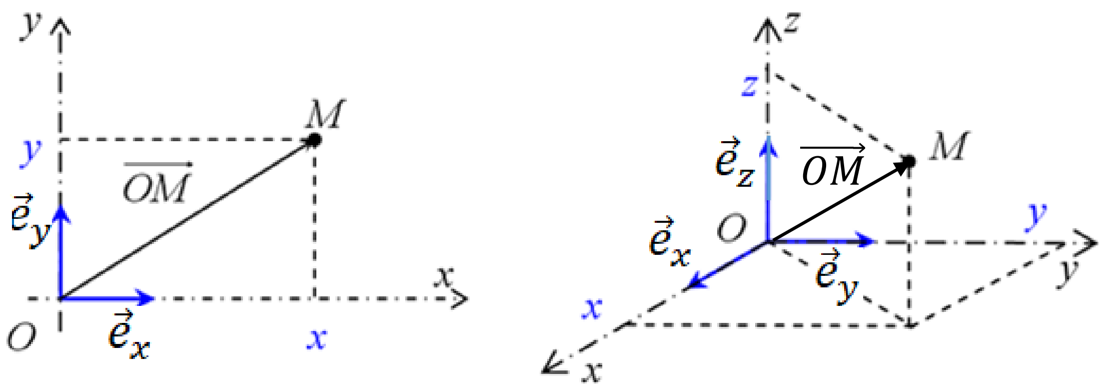
$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y+z(t)\vec{e}_z \qquad (1.2)$$

حيث:

(Ox, Oy, Oz) أشعة الوحدة وفق المحاور $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

شعاع الموضع في المستوي يكتب بالشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \qquad (2.2)$$



(ب) (أ)

الشكل (1.2): شعاع الموضع (أ) في المستوي (ب) في الفضاء

3.المعادلات الزمنية للحركة:

تكون النقطة M في حالة سكون اذا كانت الاحداثيات (x, y, z) مستقلة عن الزمن، وتكون في حالة حركة اذا كانت هذه الاحداثيات توابع للزمن x(t), y(t), z(t) .

تسمى هذه الدوال المعادلات الزمنية للحركة ونكتب:

$$x(t) = f(t), y(t) = h(t), z(t) = g(t) \qquad (3.2)$$

نعرف **مسار النقطة المادية** بأنه المحل الهندسي للنّقاط التي تمر بها النقطة المادية أثناء الحركة. ونلاحظ أن الحركة تكون في المستوي Oxy عندما (z = 0) دوما، ويكون المسار عندئذ منحنيا في المستوي Oxy. نستطيع، في بعض حالات الحركة المستوية، الحصول على معادلة هذا المسار في المستوي، بحذف الزمن (t) ما بين المعادلتين الزمنيتين للحركة x(t) و y(t) .

مثال:

تتحرك نقطة مادية في مستو افقي، تعطى معادلاتها الزمنية للحركة كالتالي:

$$x = 5t, \qquad y = -t^2 + 2$$

- أكتب عبارة شعاع الموضع؟ ثم أوجد معادلة المسار.

الحل:

نكتب شعاع الموضع كما في العلاقة (2.2):

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = (5t)\vec{e}_x + (-t^2 + 2)\vec{e}_y$$

نلاحظ ان شعاع الموضع متغير مع الزمن، فطوله ليس ثابتا وكذلك اتجاهه.

نستطيع الحصول على معادلة المسار في المستوي، بحذف الزمن (t) ما بين المعادلتين الزمنيتين للحركة x(t) و y(t).

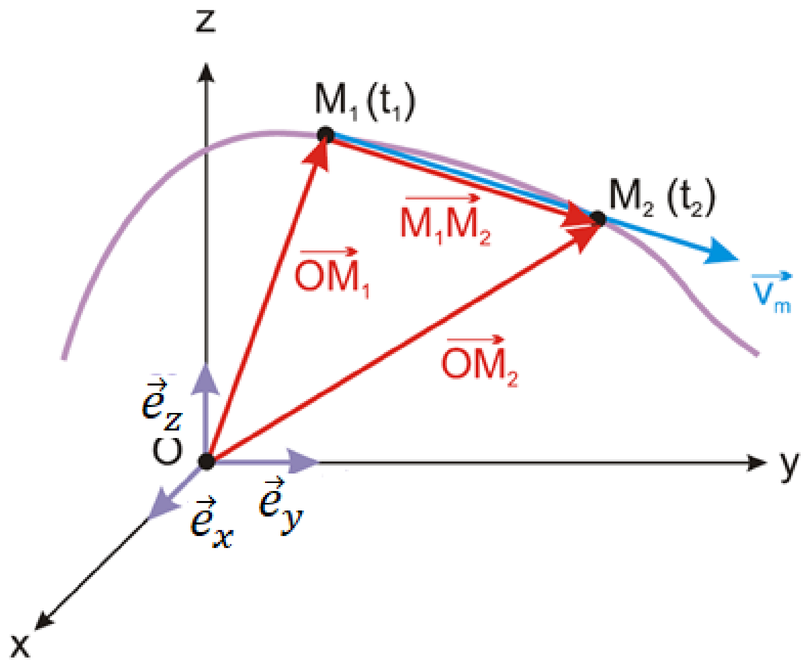
نلاحظ من عبارة x(t) ان: t = x/5 بالتعويض في عبارة y(t) نجد:

$$y(t) = -\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 2 = -\frac{x^2}{25} + 2$$

المسار عبارة عن جزء من قطع مكافئ.

4. شعاع الانتقال أو الإزاحة:

يشغل المتحرك مواضع مختلفة خلال حركته، فإذا كان موضعه في اللحظة t_1 هو $M_1(x_1, y_1)$ المحدد بشعاع الموضع $\vec{r}_1$ ثم انتقل في اللحظة t_2 إلى الموضع $M_2(x_2, y_2)$ الموافق لشعاع الموضع $\vec{r}_2$، فإن الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ يسمى شعاع الانتقال أو شعاع الإزاحة الشكل (2.2).



الشكل (2.2): شعاع الانتقال بين الموضعين t_1 و t_2.

من الشكل (2.2) نلاحظ ان:

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} \qquad (4.2)$$

ومنه نكتب شعاع الانتقال كالتالي:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r} \qquad (5.2)$$

المسافة المنحنية والتي تمثل الطول الفعلي للمسار الذي يسلكه المتحرك من النقطة M_1 الى النقطة M_2 هو طول القوس $\widehat{M_1M_2}$.

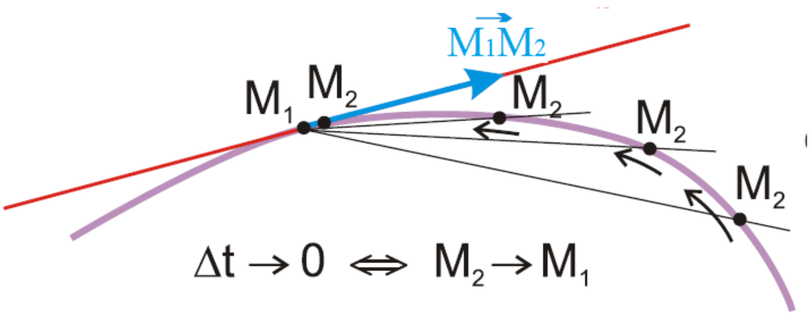
شعاع الانتقال مستقل عن مبدأ الاحداثيات حيث انه إذا اعتبرنا ان احداثيي النقطتين M_1 و M_2 هما على الترتيب (x_1, y_1) و (x_2, y_2) فان شعاع الموضع يكتب بالشكل التالي:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y \qquad (6.2)$$

5. شعاع الانتقال العنصري:

عندما تقترب جدا النقطة M_1 من النقطة M_2 أي أن t_2 تقترب جدا من t_1 ، يمكن ان نعبر عن ذلك بالعبارة $(\Delta t = (t_2 - t_1) = 0)$ وتكون عندها الإزاحة صغيرة جدا و شعاع الانتقال يسعى إلى الصفر ويصبح مماسا للمسار عند النقطة M_1 ويسمى شعاع الانتقال العنصري أو الإزاحة العنصرية ويعبر عنه بالمقدار $d\vec{r}$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{M_1M_2} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r} = d\vec{r} \qquad (7.2)$$



الشكل (3.2): شعاع الانتقال عندما $\vec{M}_2$ تؤول الى $\vec{M}_1$

6. شعاع السرعة:

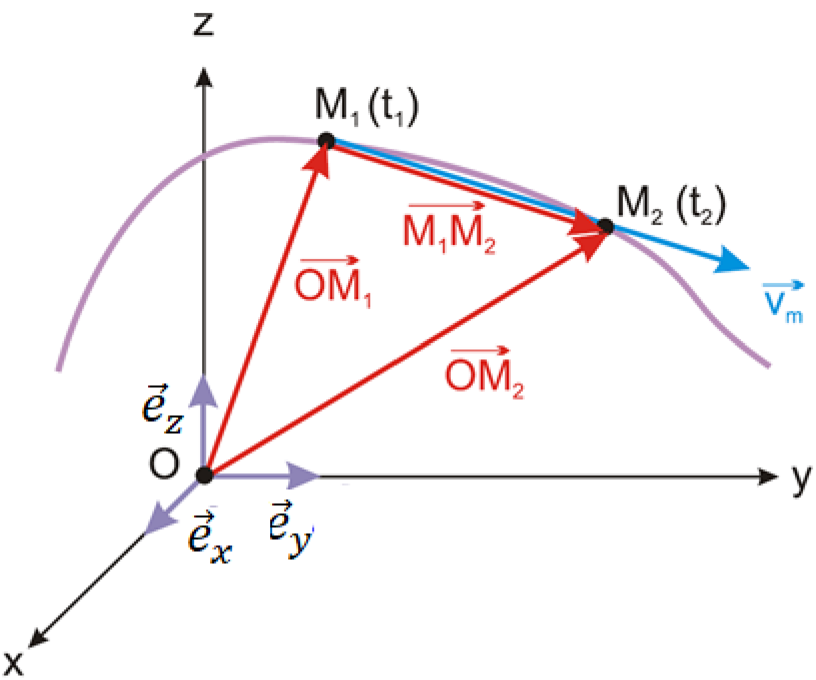
السرعة هي معدل تغير شعاع الموضع بالنسبة للزمن (أي: معدل التغير في موقعه)؛ وهي كمية فيزيائية متجهة. أي أنها تقاس بالمقدار والاتجاه. لأن حركة النقطة تتميز بالقيمة والاتجاه.

يمكننا تعريف عبارتين للسرعة:

6.1. السرعة المتوسطة:

السرعة المتوسطة للنقطة M هي نسبة انتقالها $\Delta\vec{r}$ الى المدة الزمنية Δt التي حصل فيها هذا الانتقال، ويرمز لها بالرمز $\vec{V}_m$ الشكل (4.2) ونكتب:

$$(8.2) \quad \vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$



الشكل (4.2) شعاع السرعة المتوسطة

السرعة المتوسطة لنقطة M ثابتة خلال زمن انتقالها $\Delta t = (t_2 - t_1)$ ، وتكون موازية لشعاع الانتقال $\overrightarrow{M_1M_2}$ ولا تتعلق بالمسار المتبع من قبل المتحرك خلال المدة $\Delta t = (t_2 - t_1)$ ، الشكل (4.2) .

ملاحظة:

يمكننا أن ندرس حركة النقطة المادية في المستوي باعتبارها مركبة من حركتين مستقيمتين. لذلك سيكون للسرعة الوسطية مركبتين، إحداهما V_{xm} على المحورOx والأخرى V_{ym} على المحور Oy. نعرف هاتين المركبتين بالعلاقتين التاليتين:

$$V_{xm} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad V_{ym} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \qquad (9.2)$$

وبالتالي كتابة شعاع السرعة المتوسطة بالشكل التالي:

$$\vec{V}_m = \vec{V}_{xm} + \vec{V}_{ym} = V_{xm}\vec{e}_x + V_{ym}\vec{e}_y \qquad (10.2)$$

أو بالشكل:

$$\vec{V}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{e}_x + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\vec{e}_y = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{U}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{e}_y \qquad (11.2)$$

طويلة شعاع السرعة المتوسطة تحسب بالعلاقة:

$$V_m = \sqrt{{V_{xm}}^2 + {V_{ym}}^2} = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right)^2} \qquad (12.2)$$

6.2.السرعة اللحظية:

ان السرعة الحقيقية للنقطة M هي سرعتها في اللحظة t وليست سرعتها في المدة الزمنية Δt .

عندما نجعل Δt تتناهى إلى الصفر، يصبح حامل شعاع الانتقال $\overrightarrow{M_1M_2}$ مماسا للمسار في النقطة $M_1(x_1, y_1)$. يتناهى، عندئذ، شعاع السرعة الوسطية إلى شعاع السرعة اللحظية، على حين تتناهى المركبتان $(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t})$ إلى مشتقيهما بالنسبة للزمن $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ على الترتيب ونكتب:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (13.2)$$

شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية M (لمركز عطالة جسم) في لحظة ما t هو مشتق شعاع الموضع اللحظي للنقطة المادية M (لمركز عطالة الجسم) بالنسبة للزمن.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad (14.2)$$

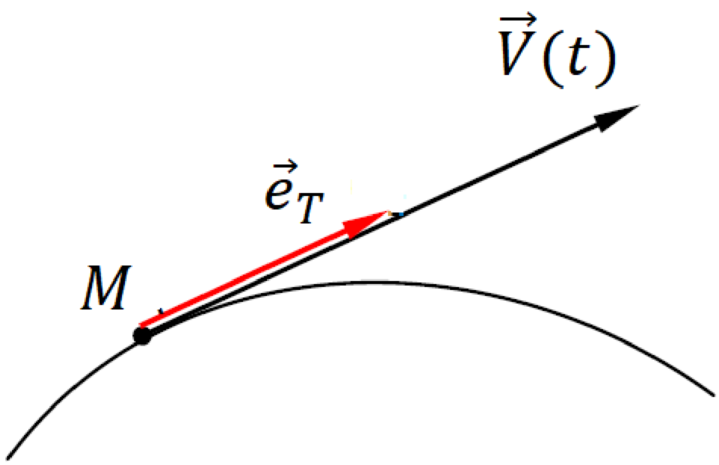
وحدته في جملة الوحدات الدولية (m/s) أو (ms^{-1}).

- شعاع السرعة اللحظية في لحظة ما t هو شعاع محمول على المماس لمسار الحركة في تلك اللحظة الشكل (5.2)، واتجاهه يكون وفق اتجاه الحركة دوما.

ومنه يمكن ان نكتب شعاع السرعة اللحظية بالعبارة التالية:

$$\vec{V}(t) = V(t)\vec{e}_T \qquad (15.2)$$

حيث $\vec{e}_T$ ما هو إلا شعاع الوحدة المحمول على المماس للمسار في تلك اللحظة الشكل (5.2)، و $V(t)$.تمثل طويلة شعاع السرعة اللحظية.



الشكل (5.2) شعاع السرعة اللحظية

لشعاع السرعة اللحظية مركبتان، V_x و V_y وفق المحورين (Oy, Ox) على الترتيب الشكل (6.2). مركبتا شعاع السرعة اللحظية وفق المحورين (Oy, Ox) اختصارا يرمز لهما بالرمز ($\dot{y}, \dot{x}$) على الترتيب، نعبر على هذا الاختصار كالتالي:

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt}$$

يمكن أن نكتب هذا الشعاع باستعمال هذا الاختصار بالشكل التالي:

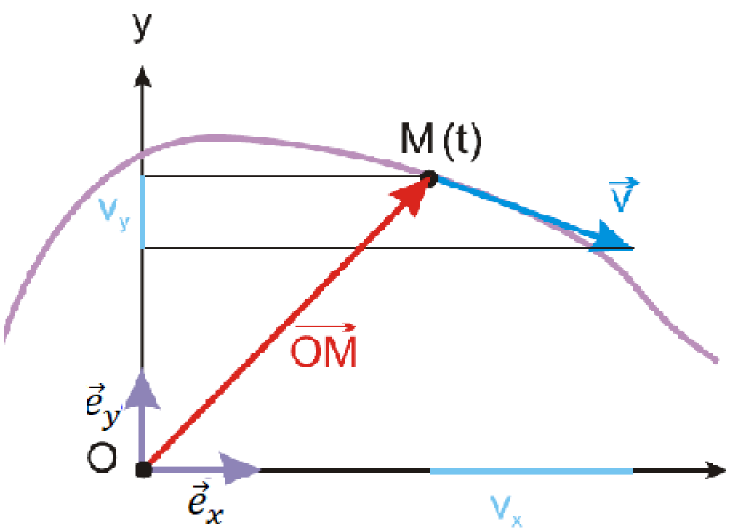
$$(16.2) \qquad \vec{V}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y$$

يمثل طول هذا الشعاع، في لحظة معينة t طويلة شعاع السرعة اللحظية أي قيمة السرعة والذي رمزنا له بالرمز V ويحسب بالعلاقة:

$$(17.2) \qquad V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

في الفضاء تعطى طويلة شعاع السرعة اللحظية بالعبارة التالية:

$$(18.2) \qquad V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$



الشكل (6.2): شعاع السرعة اللحظية ومركبتاه وفق المحورين (Oy, Ox)

مثال:

شعاع الموضع لنقطة مادية بدلالة الزمن يعطى بالعبارة التالية:

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{e}_x + (t^2 - 4)\vec{e}_y$$

1) جد عبارة شعاع سرعتها اللحظية ثم عين طويلته؟

2) جد شعاع سرعتها اللحظية عند اللحظات $t_1 = 1s, t_2 = 3s,$

الحل:

1) يمكن إيجاد عبارة شعاع السرعة اللحظية باستعمال العلاقة (14.2) وذلك باشتقاق شعاع الموضع أو باستعمال العلاقة (16.2) وذلك باشتقاق مركبات شعاع الموضع x وy .

- باشتقاق شعاع الموضع:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y$$

باشتقاق مركبات شعاع الموضع x وy :

المركبة V_x:

$$x(t) = 2t \implies \dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt} = 2$$

المركبة V_y:

$$y(t) = (t^2 - 4) \Longrightarrow \dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt} = 2t$$

ومنه عبارة شعاع السرعة اللحظية يكتب:

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y = 2\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y$$

طويلة شعاع السرعة في اللحظة t:

$$V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

2) شعاع سرعتها اللحظية عند اللحظات : $t_1 = 1s, t_2 = 3s,$

$$\vec{V}(1) = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y \Longrightarrow V(1) = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

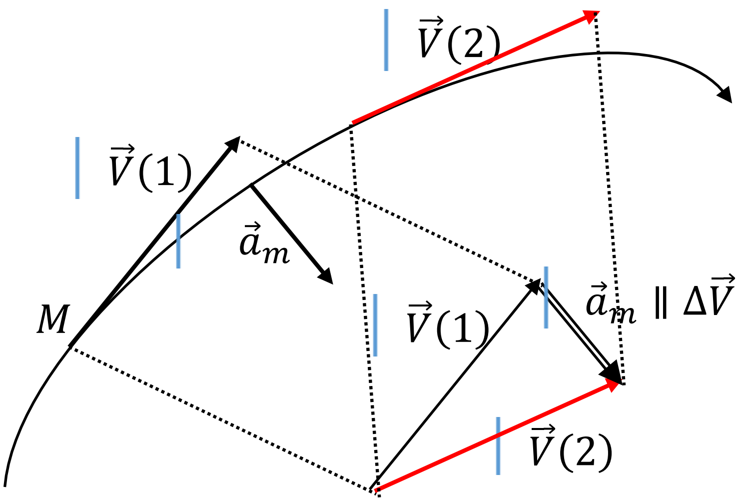
$$\vec{V}(3) = 2\vec{e}_x + 6\vec{e}_y \Longrightarrow V(3) = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

7. شعاع التسارع:

7.1. شعاع التسارع المتوسط:

شعاع التسارع المتوسط يعبر عن مقدار تغير شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن، فإذا كانت النقطة المادية M تملك سرعة $\vec{V}(1)$ عند اللحظة t_1 وعند اللحظة t_2 أصبحت سرعتها $\vec{V}(2)$. نقول بأن النقطة المادية M تخضع لتسارع وذلك بسبب تغير سرعتها، نعرف شعاع التسارع المتوسط للنقطة المادية بين اللحظتين t_2, t_1 بالعلاقة:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{V}(2) - \vec{V}(1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad (19.2)$$



الشكل (7.2) شعاع التسارع المتوسط

شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ يوازي $\Delta\vec{V}$ ويتجه نحو تقعر المسار.

شعاع التسارع المتوسط للنقطة المادية يمكن ان يعبر عنه بالمركبتين a_{xm} وa_{ym} كالتالي:

$$\vec{a}_m = a_{xm}\vec{e}_x + a_{ym}\vec{e}_y \qquad (20.2)$$

حيث

$$a_{xm} = \frac{\vec{V}_x(2) - \vec{V}_x(1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}_x}{\Delta t} \qquad (21.2)$$

$$a_{ym} = \frac{\vec{V}_y(2) - \vec{V}_y(1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}_y}{\Delta t} \qquad (22.2)$$

7 .2. شعاع التسارع اللحظي:

شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}(t)$ للنقطة M هو نهاية شعاع التسارع المتوسط بين اللحظتين t_1 و t_2 عندما تتناهى t_2 الى t_1 أي أن $(\Delta t = t_2 - t_1)$ تتناهى إلى الصفر، على حين تتناهى المركبتان $\frac{\Delta \vec{V}_x}{\Delta t}$ و $\frac{\Delta \vec{V}_y}{\Delta t}$ إلى مشتقيهما بالنسبة للزمن $\frac{d\vec{V}_x}{dt}$ و $\frac{d\vec{V}_y}{dt}$ على الترتيب:

$$(23.2) \qquad \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dV_y}{dt}\vec{e}_y$$

شعاع التسارع اللحظي للنقطة M هو مشتق شعاع السرعة اللحظية للنقطة M بالنسبة للزمن، وحدته في جملة الوحدات الدولية (m/s^2) أو (ms^{-2})، ويمكن أن يكتب على الشكل:

$$(24.2) \qquad \vec{a}(t) = \dot{V}_x\vec{e}_x + \dot{V}_y\vec{e}_y = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$

ومنه فان لشعاع التسارع اللحظي مركبتان، a_x و a_y وفق المحورين Ox و Oy على الترتيب هما:

$$(25.2) \qquad a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \qquad a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

ملاحظة: بما أن شعاع السرعة هو مشتق شعاع الموضع إذن شعاع التسارع هو المشتق الثاني لشعاع الموضع وعليه يمكن أن نكتب:

$$(26.2) \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

طول شعاع التسارع في لحظة معينة t يمثل قيمة التسارع في تلك اللحظة ويعبر عنه بالعبارة

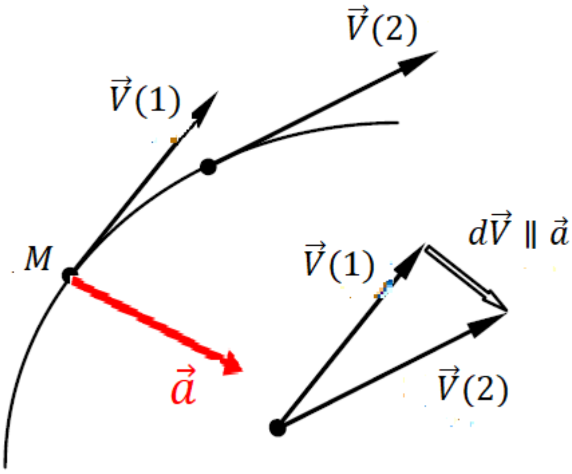
$$(27.2) \qquad a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$$

يكون اتجاه شعاع التسارع دوماً نحو تقعر مسار الحركة (أي داخل الانحناء) الشكل (8.2).

ملاحظة: في فضاء ثلاثي الأبعاد يكون لشعاع التسارع اللحظي العبارة التالية:

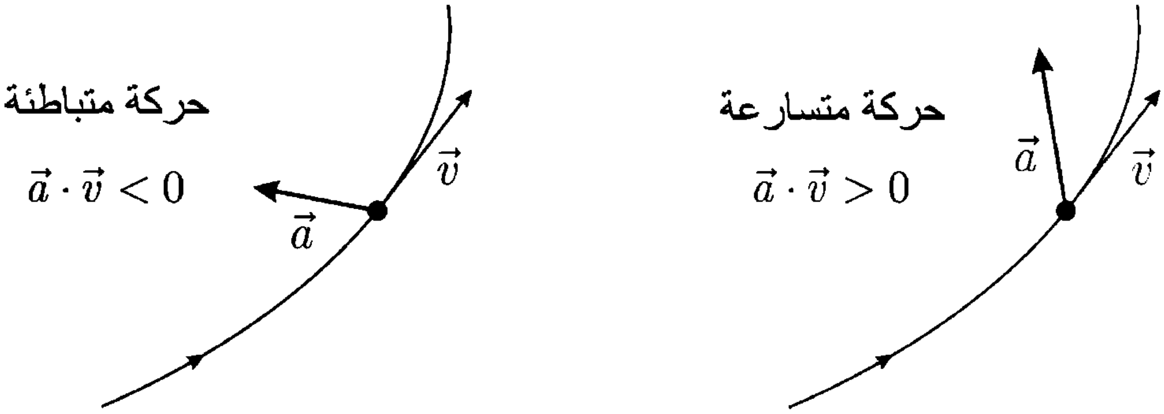
$$(28.2) \qquad a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

حيث: a_z: هي مركبة شعاع التسارع اللحظي وفق المحور Oz.



الشكل (8.2): شعاع التسارع اللحظي ($\vec{a}$)

ملاحظة: تكون الحركة متسارعة اذا كان $\vec{a}.\vec{V} > 0$ ، وتكون متباطئة اذا كان $\vec{a}.\vec{V} < 0$.
اما الاتجاه فيدل عليه اتجاه شعاع السرعة.



الشكل (9.2): الحركة المتسارعة والحركة المتباطئة.

8. أنماط الحركة:

يمكن ان نميز الحركات التالية بحسب التسارع:

8.1. الحركة المنتظمة:

إذا كان تسارع متحرك معدوم فان حركته يطلق عليها حركة منتظمة وتتميز بـ:

التسارع معدوم: $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{0} \qquad (29.2)$$

السرعة ثابته: $$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{V}(0) \quad (30.2)$$

الموضع: $$\vec{r}(t) = \vec{V}(0)t + \vec{r}(0) \quad (31.2)$$

$\vec{V}(0), \vec{r}(0)$ موضع وسرعة المتحرك عند بداية الحركة (بداية الزمن)

مسار الحركة مستقيم وشعاع السرعة محمولا عليه.

8.2. الحركة المتغيرة بانتظام:

إذا كان تسارع متحرك ثابت بمرور الزمان فنقول عن حركته أنها حركة متغيرة بانتظام

تسارعه في كل لحظة: $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{a}(0) = Cte \quad (32.2)$$

سرعته في كل لحظة : $$\vec{V}(t) = \vec{a}(0)t + \vec{V}(0) \quad (33.2)$$

موضعه في كل لحظة : $$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}(0)t^2 + \vec{V}(0)t + \vec{r}(0) \quad (34.2)$$

8.3. حركة القذائف:

يتميز مجال الجاذبية الارضية بشعاع حقل الجاذبية الارضية الموجه نحو مركز الأرض.
هذا الحقل ليس منتظما ولكن يمكن اعتباره كذلك في منطقة محدودة من الفضاء أي في مجال حركة القذيفة.

الدراسة الديناميكية:

الجملة المدروسة هي قذيفة نقطية M كتلتها m. ندرس حركة هذه القذيفة في مرجع أرضي الذي نعتبره غاليليا. بإهمال قوى الاحتكاك مع الهواء ودافعة أرخميدس، اذن فالقوة الوحيدة التي تخضع لها هذه القذيفة هي ثقلها $\vec{P} = m\vec{g}$.

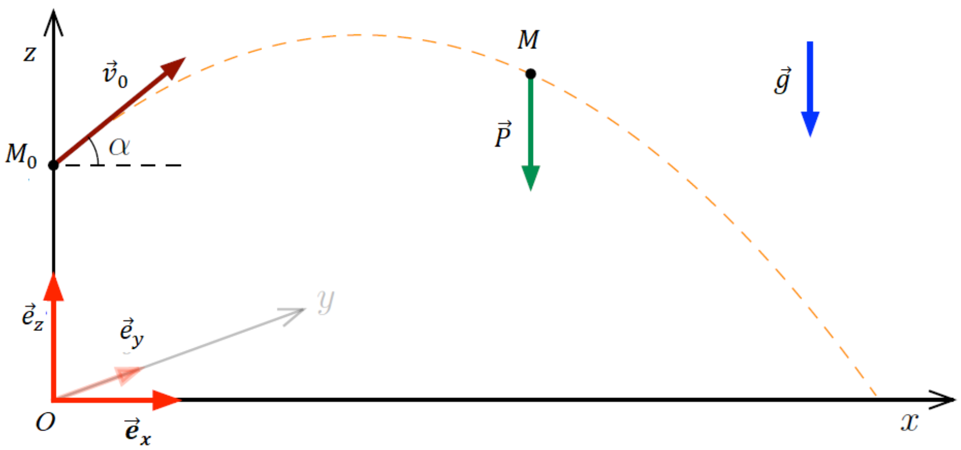
في مرجع أرضي الذي نعتبره مرجعا غاليليا، نطبق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \quad (35.2)$$

نلاحظ من خلال هذه النتيجة أن شعاع تسارع القذيفة يساوي شعاع الجاذبية الأرضية. كما أنه إذا اعتبرنا أن حقل الجاذبية الأرضية يكون منتظما في مجال حركة القذيفة، فإن شعاع التسارع يكون هو أيضا منتظما.

الدراسة الحركية:

لدراسة هذه الحركة نختار معلما كارتيزيا وهو المعلم المناسب لهذه الحركة الشكل (10.2).
- موضوع القذيفة M_0 عند اللحظة $t = 0$ يقع على المحور Oz .
- المحور Oz هو محور شاقولي وموجه نحو الأعلى.
– شعاع السرعة $\vec{v}_0$ للقذيفة عند اللحظة $t = 0$، يصنع زاوية α مع المحور الافقي Ox، ويقع في المستوي Oxz أي ان الحركة تتم في المستوي Oxz وبالتالي فان الحركة مستوية.
- المستوي Oxy هو مستوي أفقي.

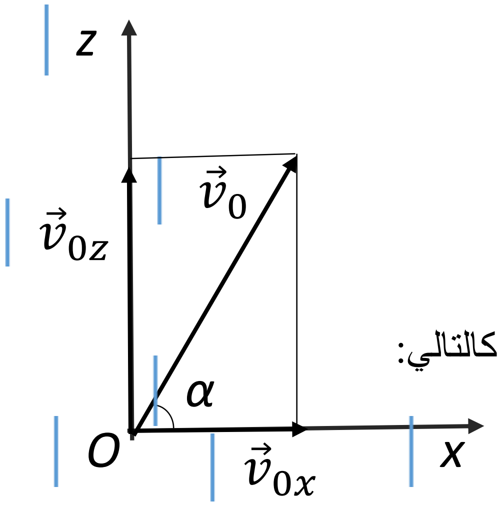


الشكل (10.2): الشروط الابتدائية.

بإسقاط العلاقة (35.2) على المحورين Ox و Oy و Oz فنحصل على مركبات شعاع التسارع في المعلم الديكارتي، وبمكاملة شعاع التسارع بالنسبة للزمن نحصل على مركبات شعاع السرعة كما توضح ذلك العلاقة أدناه (36.2):

$$(36.2)\ \vec{P}\begin{cases} P_x = 0 \\ P_x = 0 \\ P_y = -mg \end{cases} \Longrightarrow \vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_w = -gt + C_3 \end{cases}$$

الثوابت C_1، C_2، C_3 هي ثوابت التكاملات، تحدد هذه الثوابت بالشروط الابتدائية، حيث مركبات شعاع السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ عند اللحظة $t = 0$ هي:



من الشكل المقابل لدينا:

$$\cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \Longrightarrow v_{0x} = v_0\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{v_{0z}}{v_0} \Longrightarrow v_{0z} = v_0\sin\alpha$$

ومنه نكتب شعاعي السرعة الابتدائية والسرعة اللحظية كالتالي:

$$(37.2)\quad \vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha = C_1 \\ v_{0y} = 0 = C_2 \\ v_{0z} = v_0\sin\alpha = C_3 \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

بمكاملة السرعة بالنسبة للزمن يحدد موضع المتحرك بما يسمى المعادلات الزمنية للحركة:

$$(38.2)\quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha t + C_4 \\ y = C_5 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t + C_6 \end{cases}$$

ثوابت التكامل يمكن تحديدها من الشروط الابتدائية وهي كالتالي:

$$(39.2)\quad \overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{OM_0}\begin{cases} C_4 = 0 = x_0 \\ C_5 = 0 = y_0 \\ C_6 = z_0 \end{cases}$$

وأخيرا نحصل على المعادلات الزمنية للحركة وهي كالتالي:

$$(40.2)\quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t + z_0 \end{cases}$$

ملاحظات:

- مسقط الحركة وفق المحور Ox هي حركة منتظمة.

- لا توجد حركة وفق المحور Oy، والحركة تتم في المستوي Oxz.

- مسقط الحركة وفق المحور Oz هي حركة متغيرة بانتظام.

معادلة المسار:

معادلة المسار او المعادلة الديكارتية للمسار نحصل عليها بحذف عامل الزمن بين العلاقتين $x(t)$ و $z(t)$. من العلاقة (40.2) نكتب:

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha} \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 cos\alpha})^2 + v_0 sin\alpha(\frac{x}{v_0 cos\alpha}) + z_0$$

وأخيرا نكتب:

$$z(t) = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_0 cos\alpha})^2 + v_0 sin\alpha(\frac{x}{v_0 cos\alpha}) + z_0$$

$$(41.2) \qquad z(t) =) = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 cos\alpha)^2}x^2 + tan\alpha\ x + z_0$$

المسار عبارة عن قطع مكافئ موجود في المستوي Oxz، الذي يشمل شعاع السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$.

الذروة: وهي أعلى نقطة تصلها القذيفة، تتميز نقطة الذروة بكون شعاع السرعة المماس للمسار يكون عندها أفقيا، أي ان المركبة الشاقولية معدومة، يمكن إيجاد إحداثيات نقطة الذروة اعتمادا على هذه الميزة كالتالي:

$$v_z = 0 \Rightarrow -gt + v_0 sin\alpha = 0 \Rightarrow t_{zmax} = v_0 sin\alpha\ /\ g$$

ونحصل على الارتفاع الأعظمي بتعويض t_{zmax} في العلاقة (40.2) فنجد:

$$(42.2) \qquad z_{max} = z(t_{zmax}) = z_0 + \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}$$

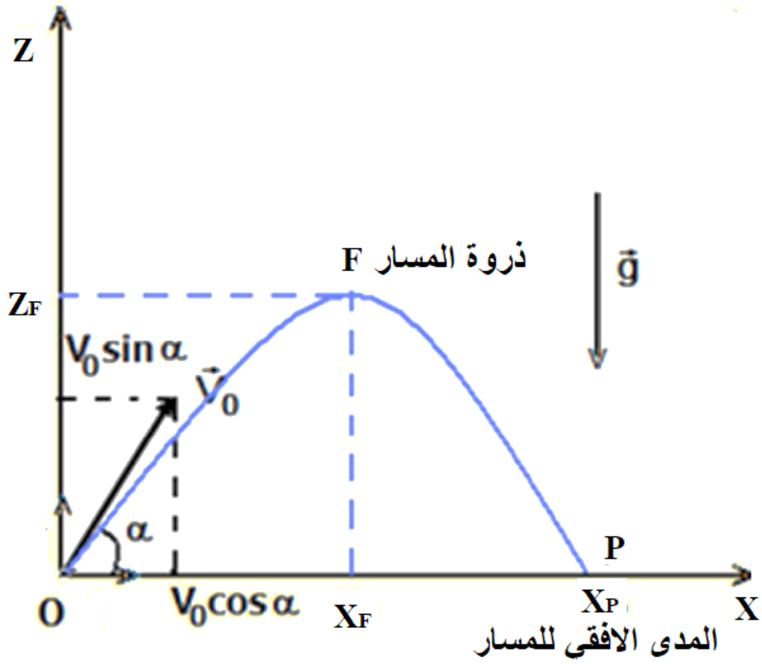
المدى الافقي:

هو البعد الافقي بين نقطة القذف و النقطة التي تعود فيها القذيفة الى نفس المستوي الذي قذفت منه.

نقطة المدى=Portée

$$z_0 = z_{portée}$$

ومنه بالتعويض في معادلة المسار(41.2) نجد:



$$z(t_{portée}) = z_0 =)z_0 = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 cos\alpha)^2}x^2 + tan\alpha\ x + z_0$$

ومنه نجد:

$$0 = x(-\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 cos\alpha)^2}x + tan\alpha)$$

حلول هذه المعادلة هي: $x = 0$: يوافق فاصلة نقطة القذف M_0. والحل الثاني يوافق نقطة المدى وهو:

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 cos\alpha)^2}x_P + tan\alpha = 0 \Longrightarrow x_{Portée} = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}$$

ملاحظة: إذا كانت نقطة القذف هي المبدأ O فان $z_0 = 0$.

ملاحظة: يكون المدى الافقي أعظميا اذا كان $sin2\alpha = 1$، أي أن $\alpha = 45^\circ$

9- دراسة حركة نقطة مادية بإحداثيات غير كارتيزية:

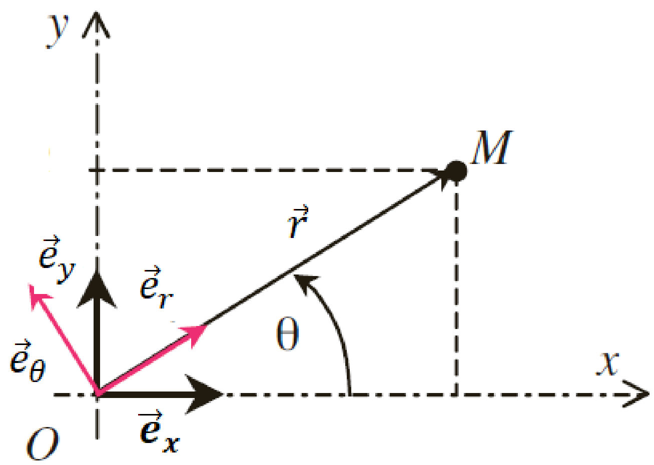
نجد في الميكانيك، وفي ميادين أخرى من الفيزياء، كالكهرطيسة . . .، حالات،

يصعب فيها التعامل مع الظاهرة المدروسة في جملة الإحداثيات الديكارتية $Oxyz$ فنلجأ،

لدراسة الظاهرة باستخدام إحداثيات أخرى لتبسيط الحساب. لذلك نتطرق إلى بعض نظم الإحداثيات الأكثر استعمالا في الميكانيك كالإحداثيات القطبية أو الإحداثيات الأسطوانية أو الكروية والذاتية... في هذه الفقرة سندرس حركيات نقطة مادية بدلالة مختلف الاحداثيات المذكورة آنفا.

9-1- دراسة الحركة في الاحداثيات القطبية :

عندما تتم الحركة في مستوي، فإن تعيين موضع المتحرك في الإحداثيات الكارتيزية يستدعي بعدين x(t) و y(t) . لكن في بعض الحالات ولتبسيط الحساب يفضل استعمال المعلم القطبي وهو معلم إحداثياته r(t) و $\theta\ (t)$ و تُدعى الإحداثيات القطبية، الأولى تمثل بعد النقطة M عن المبدأ O أي طويلة شعاع الموضع، والثانية هي الزاوية θ المحصورة بين المحور Ox وشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$. أشعة الوحدة في الجملة القطبية $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. حيث الشعاع $\vec{e}_r$ محمول على شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ وموجه من O الى M . أما $\vec{e}_\theta$ فهو الشعاع العمودي على $\vec{e}_r$ في الاتجاه المباشر الشكل (11.2).



الشكل (11.2): المعلم القطبي

- شعاع موضع بالإحداثيات القطبية:

شعاع الموضع $\vec{r}(t)$ في الإحداثيات القطبية يكتب على الشكل:

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) \qquad (43.2)$$

حيث: $r(t)$ يمثل طويلة شعاع الموضع، $r(t) = \|\ \overrightarrow{OM}\ \|$

- شعاع السرعة بالإحداثيات القطبية:

ونحصل، باشتقاق هذا الشعاع، بسهولة على شعاع السرعة كالتالي:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d[r(t)\vec{e}_r(t)]}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{e}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} \qquad (44.2)$$

يمكننا تحليل الشعاعين $\vec{e}_r(t)$ و $\vec{e}_\theta(t)$ على الاساس الديكارتي $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ كالتالي:

$$\vec{e}_r(t) = \vec{e}_x cos\theta(t) + \vec{e}_y sin\theta(t)$$

$$\vec{e}_\theta(t) = -\vec{e}_x sin\theta(t) + \vec{e}_y cos\theta(t)$$

ومنه فان:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_x cos\theta(t) + \vec{e}_y sin\theta(t)\right) \\ = -\vec{e}_x\dot{\theta} sin\theta(t) + \vec{e}_y\dot{\theta} cos\theta(t) \\ = \dot{\theta}\left(-\vec{e}_x sin\theta(t) + \vec{e}_y cos\theta(t)\right) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta(t)\end{aligned}$$

ان مشتق شعاع طوله ثابت هو شعاع عمودي عليه في اتجاه تزايد الزاوية وطوله يتعلق بسرعة الدوران.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} = -\vec{e}_x\dot{\theta} cos\theta(t) - \vec{e}_y\dot{\theta} sin\theta(t) \\ = -\dot{\theta}\left(\vec{e}_x cos\theta(t) + \vec{e}_y sin\theta(t)\right) = -\dot{\theta}\vec{e}_r(t)\end{aligned}$$

وبالتالي فان شعاع السرعة بالإحداثيات القطبية يكتب كالتالي:

$$\vec{V}(t) = \dot{r}\vec{e}_r(t) + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t) \qquad (45.2)$$

شعاع السرعة في الإحداثيات القطبية له مركبتان:

$$\vec{V}(t) = V_r\vec{e}_r(t) + V_\theta\vec{e}_\theta(t) \qquad (46.2)$$

بحيث: $V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt}$

V_r تسمى السرعة القطرية و V_θ تسمى السرعة المماسية.

وطويلة شعاع السرعة هي:

$$V(t) = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \qquad (47.2)$$

ملاحظة: لا يتغير طول الشعاع بتغير المعلم المختار.

ـ شعاع التسارع بالإحداثيات القطبية:

وكذلك، نحصل على شعاع التسارع، باشتقاق شعاع السرعة، ونكتب:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r(t) + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t)\right)}{dt} \qquad (48.2)$$

$$= \frac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r(t)\right)}{dt} + \frac{d\left(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t)\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\dot{r}(t)\right)}{dt}\vec{e}_r(t) + \dot{r}\frac{d\left(\vec{e}_r(t)\right)}{dt} + \frac{d\left(r(t)\right)}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t)$$

$$+ r\frac{d\left(\dot{\theta}(t)\right)}{dt}\vec{e}_\theta(t) + r\dot{\theta}\frac{d\left(\vec{e}_\theta(t)\right)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r(t) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta(t) + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta(t) - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r(t)$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r(t) + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta(t) = \vec{a}_r(t) + \vec{a}_\theta(t)$$

$$= a_r\vec{e}_r(t) + a_\theta\vec{e}_\theta(t)$$

شعاع التسارع في الإحداثيات القطبية له مركبتان:

$$\vec{a}_r(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r(t) = a_r\vec{e}_r(t) \qquad (49.2)$$

$$\vec{a}_\theta(t) = \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta(t) = a_\theta\vec{e}_\theta(t) \qquad (50.2)$$

طويلة شعاع التسارع في لحظة t يعطى بالعلاقة التالية:

$$a(t) = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2} \qquad (51.2)$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

ملاحظة: لا يتغير طول الشعاع بتغير المعلم المختار.

a_r يسمى التسارع القطري و a_θ يسمى التسارع المماسي.

حالة خاصة:

نلاحظ من العلاقة (48.2) أنه إذا تحركت نقطة مادية بحيث يبقى بعدها r عن مبدأ الاحداثيات ثابتا أي أن:

$$r = R = \text{ثابت} \iff \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

فتصبح عبارة السرعة بالتعويض في العلاقة (46.2)

$$\vec{V}(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_{\theta}(t)$$

السرعة مماسية وهي عمودية على شعاع الموضع، وطويلة شعاع السرعة تعطى بالعبارة:

$$V = V_{\theta} = R\dot{\theta} = Rw$$

حيث w تمثل السرعة الزاوية وهي تمثل أيضا سرعة دوران جملة المحاور القطبية حول المحور oz وحدتها في جملة الوحدات الدولية هي (rd/s).

ويكون التسارع القطري في هذه الحالة الخاصة كالتالي:

$$\vec{a}_r(t) = \left(-R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r$$

يطلق عليه في هذه الحالة اسم التسارع المركزي، الإشارة السالبة تعني أنه موجه نحو المركز (عكس اتجاه شعاع الموضع). يتحرك الجسم في هذه الحالة على دائرة نصف قطرها (R) بسرعة مماسية (Rw) ونقول عن الحركة انها حركة دائرية.

أنماط الحركة الدائرية لنقطة:

تعرف الحركة الدائرية بأنها حركة نقطة على محيط دائرة وتكون على نوعين إما منتظمة أو غير منتظمة.

يمكننا استنتاج عبارتي التسارعين a_r و a_{θ} لحركة دائرية باعتبار نصف القطر ثابت ونكتب:

$$a_r = \left(-R\dot{\theta}^2\right) = -Rw^2 = -\frac{V^2}{R} \qquad (52.2)$$

التسارع الناظمي الذي يحمله الناظم هو مؤشر لتغير حامل السرعة.

$$a_{\theta} = \left(R\ddot{\theta}\right) = R\alpha = R\frac{dw}{dt} = \frac{dRw}{dt} = \frac{dV}{dt} \qquad (53.2)$$

حيث: $(\alpha = dw/dt)$ يمثل التسارع الزاوي.

التسارع المماسي الذي حامله المماس للمسار هو مؤشر لتغير شدة السرعة.

2-9-الحركة الدائرية المنتظمة:

تحصل هذه الحركة عندما يقطع الجسم أقواس متساوية خلال فواصل زمنية متساوية ويتحقق ذلك إذا كان تسارعها الزاوي معدوم ويكون لدينا:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = 0 \qquad (54.2)$$

وسرعتها الزاوية تعطى بالعلاقة:

$$w(t) = \frac{d\theta}{dt} = w(0) = \text{ثابت} \qquad (55.2)$$

الفاصلة الزاوية (الاحداثي القطبي) تعطى بالعلاقة:

$$\theta(t) = w(0)t + \theta(0) \qquad (56.2)$$

$w(0)$ ، $\theta(0)$ يمثلان كل من السرعة الابتدائية والفاصلة الزاوية الابتدائية.

3-9-الحركة الدائرية غير المنتظمة:

تحصل هذه الحركة عندما يقطع الجسم أقواس غير متساوية في أزمان متساوية، ويتحقق ذلك إذا كان تسارعها الزاوي ثابت ويكون لدينا:

التسارع الزاوي يعطى بالعلاقة:

$$\alpha(t) = \frac{dw}{dt} = \alpha(0) = \text{ثابت} \qquad (57.2)$$

والسرعة الزاوية تعطى بالعلاقة:

$$w(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha(0)t + w(0) = \text{ثابت} \qquad (58.2)$$

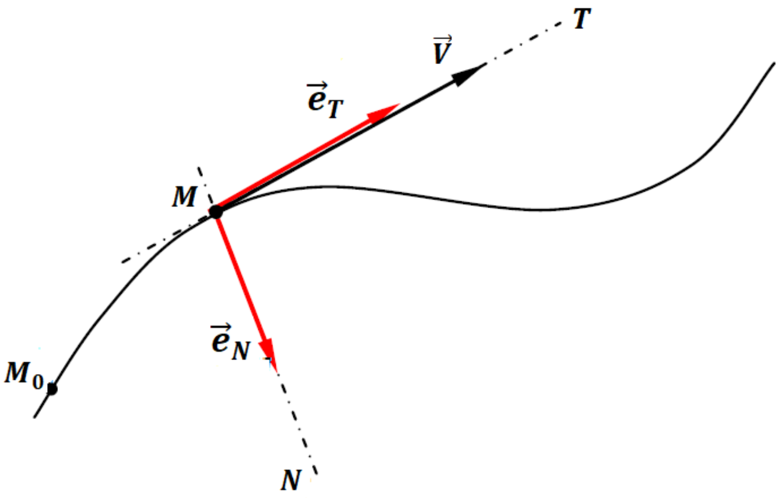
الفاصلة الزاوية (الاحداثي القطبي) تعطى بالعلاقة:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha(0)t^2 + w(0)t + \theta(0) \qquad (59.2)$$

$\alpha(0)$ ، $w(0)$ ، $\theta(0)$ ثوابت الحركة تحددها الشروط الابتدائية.

4.9. دراسة الحركة في الاحداثيات المنحنية (معلم فرينيه):

تتمثل الإحداثيات المنحنية في معلم متعامد مرتبط بالمتحرك أي أن مبدؤه هو النقطة M *موضع المتحرك*، أحد محاوره موازي لشعاع السرعة وفق اتجاه الحركة وهو المحور المماسي وشعاع وحدته $\vec{e}_T$. والآخر عمودي عليه وموجه داخل الانحناء (تقعر المسار) وشعاع وحدته $\vec{e}_N$ الشكل (11.2).



الشكل (11.2): أشعّة الوحدّة في جملة الاحداثيات المنحنية (جملة فرينيه)

ـ شعاع السرعة بالإحداثيات المنحنية:

نعلم أن شعاع الموضع في جملة الاحداثيات المنحنية معدوم تعريفا، ونعلم أن شعاع السرعة مماسا للمسار وطويلته مشتق الفاصلة المنحنية بالنسبة للزمن.

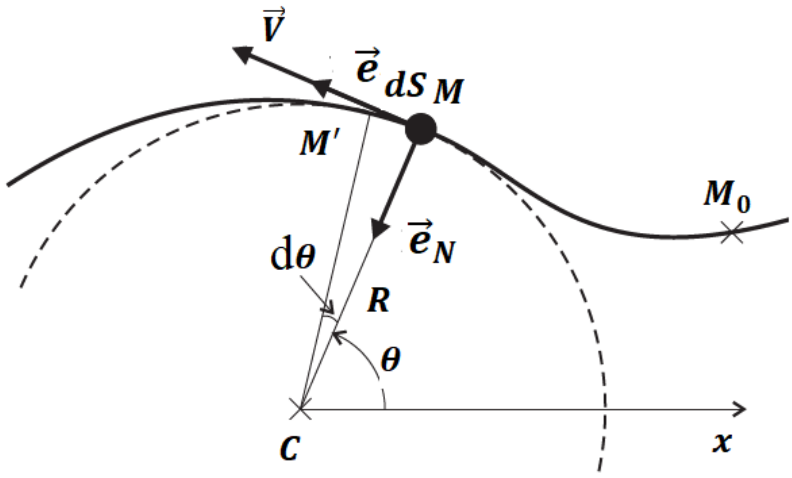
موضع المتحرك M بالنسبة للنقطة الثابتة M_0 يعطى كقياس جبري بالتابع السلمي $S(t)$ الذي يمثل المعادلة الزمنية للمسار:

$$s = \widehat{M_0M} = s(t)$$

ويعطى شعاع الانتقال أو الازاحة الشكل (12.2) بالعبارة: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl} = ds\vec{e}_T$

$$V(t) = \frac{ds}{dt}, \quad \vec{V}(t) = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{ds\vec{e}_T}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_T = V(t)\vec{e}_T \qquad (60.2)$$

وهي عبارة شعاع السرعة في جملة فرينيه.



الشكل (12.2)

ـ شعاع التسارع بالإحداثيات المنحنية:

وباشتقاق عبارة السرعة بالنسبة للزّمن، نحصل على شعاع التسارع:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\left(V\vec{e}_T(t)\right)}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{e}_T(t) + V\frac{d\vec{e}_T(t)}{dt} \qquad (61.2)$$

ولدينا من العلاقات السابقة والشكل (12.2):

$$\frac{d\vec{e}_T(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}.\frac{d\vec{e}_T(t)}{ds} = V.\frac{d\vec{e}_T(t)}{ds} = V.\frac{d\theta}{ds}\frac{d\vec{e}_T(t)}{d\theta} = V\frac{1}{R}\vec{e}_N(t)$$

ومنه فان شعاع التسارع يكتب بالشكل:

$$\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt}\vec{e}_T(t) + \frac{V^2}{R}\vec{e}_N(t)$$

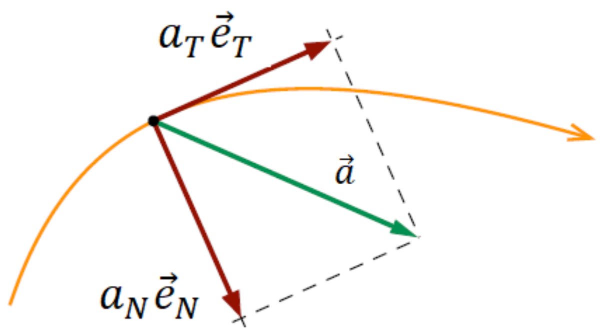
مركبتا شعاع التسارع (المماسية والناظمية) الشكل (12.2) في جملة فرينيه هما:

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \dot{V} \qquad (62.2)$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} \qquad (63.2)$$

طويلة شعاع التسارع هي:

$$(64.2)\quad a(t)=\sqrt{a_T^2+a_N^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

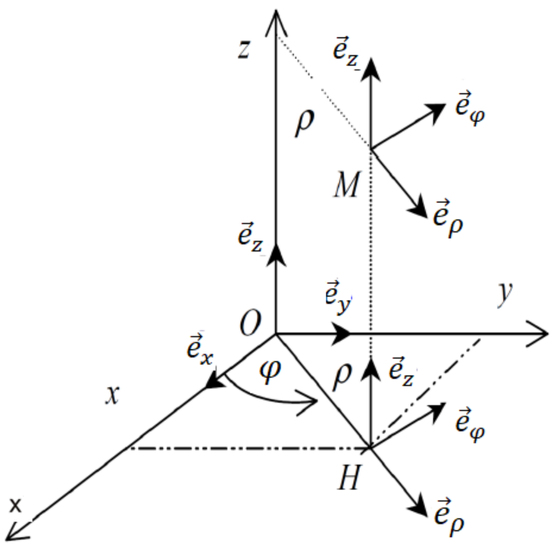


الشكل (13.2): تمثيل لشعاعي التسارع المماسي والناظمي في جملة فرينيه.

التسارع المماسي يعبرعن كيفية تغير قيمة السرعة، بينما التسارع الناظمي فيعبرعن تغير اتجاه الحركة.

5.9. دراسة الحركة في الاحداثيات الاسطوانية :

يحدد موضع النقطة المادية M في الفضاء باستخدام الإحداثيات الأسطوانية بالتوابع السلمية $(\rho(t),\varphi(t),z(t))$ وتكتب المقادير الشعاعية في هذه الإحداثيات وفق اتجاهات أشعة الوحدة $(\vec{e}_{\rho,}\ \vec{e}_{\varphi},\vec{e}_z)$، الشكل (14.2)، وهي أشعة متعامدة مباشرة.



الشكل(14.2): الإحداثيات الأسطوانية $(\rho(t),\varphi(t),z(t))$.

نلاحظ أن:

$\rho = OH$ يمثل البعد بين المبدأ O وH، حيث H يمثل المسقط العمودي لـ M على المستوي Oxy.

$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OH})$ هي الزاوية المحصورة بين المحور Ox والشعاع $\overrightarrow{OH}$، وهي زاوية الدوران حول المحور Oz. وتعتبر موجبة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

Z هي المركبة الديكارتية نفسها لـ M *على المحور* Oz، أي أنها مقدار الارتفاع عن المستوى Oxy. يمكن أن تكون موجبة أو سالبة.

يمكننا الانتقال من الإحداثيات الأسطوانية إلى الديكارتية باستخدام العلاقات التالية:

$$x = \rho cos\varphi, \quad y = \rho sin\varphi, \quad z = z \tag{65.2}$$

وبالمقابل، نستطيع الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الأسطوانية بتطبيق العلاقات:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \left(sin\varphi = \frac{x}{\rho}, cos\varphi = \frac{y}{\rho}\right), \qquad z = z \tag{66.2}$$

ـ شعاع الموضع:

شعاع الموضع في الإحداثيات الأسطوانية يعطى بالعلاقة:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \tag{67.2}$$

$$\vec{r} = \vec{e}_x \rho cos\varphi + \vec{e}_y \rho sin\varphi + z\vec{e}_z \tag{68.2}$$

ـ شعاع السرعة:

نحصل على شعاع السرعة باشتقاق شعاع الموضع بالنسبة للزمن فنجد:

$$\vec{V} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \tag{69.2}$$

لشعاع السرعة في الإحداثيات الاسطوانية ثلاث مركبات وهي:

$$V_\rho = \dot{\rho}, \qquad V_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \qquad V_z = \dot{z} \tag{70.2}$$

وطويلة شعاع السرعة تعطى بالشكل:

$$V = \sqrt{{V_\rho}^2 + {V_\varphi}^2 + {V_z}^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2} \tag{71.2}$$

ـ *شعاع* التسارع في الإحداثيات الأسطوانية :

نحصل على شعاع التسارع في الإحداثيات الأسطوانية وذلك باشتقاق العلاقة (69.2) وبإجراء بعض الحسابات نجد:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z)}{dt} \qquad (72.2)$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

فمركّبات شعاع التسارع في الإحداثيات الأسطوانة هي:

$$a_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2), a_\varphi = (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}), a_z = \ddot{z} \qquad (73.2)$$

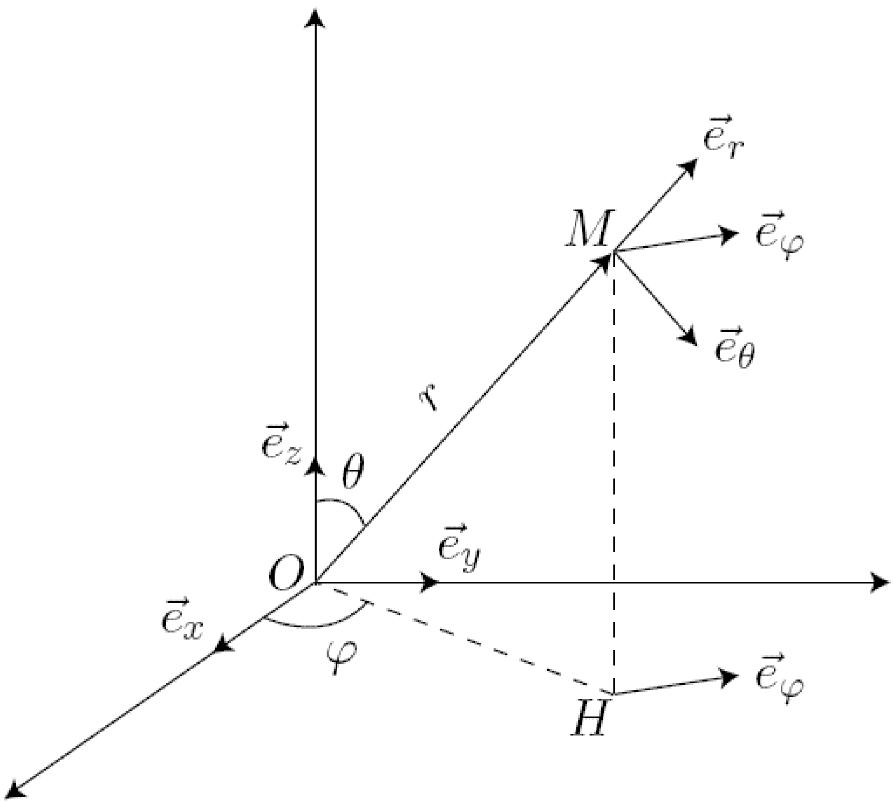
طويلة شعاع التسارع تعطى بالعبارة:

$$a = \sqrt{{a_\rho}^2 + {a_\varphi}^2 + {a_z}^2}$$

5.9. دراسة الحركة في جملة الإحداثيات الكروية :

يحدد موضع نقطة مادية ما M في جملة الإحداثيات الكروية بالتوابع السلمية (r, θ, φ) وتكتب المقادير الشعاعية الموافقة وفق اتجاهات أشعة الوحدة التالية $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ وهي أشعة متعامدة مباشرة، وهي متعلقة بالزمن، والممثلة على الشكل (15.2).

r: نصف القطر القطبي، θ تسمى زاوية السمت، و φ تسمى زاوية تمام العرض.



الشكل (15.2): الاحداثيات الكروية

من الشكل (15.2) نستنتج أن:

$r = \|\overrightarrow{OM}\|$ يمثل بعد موضع النقطة M عن المدأ O وهو مقدار كوجب دوما.

$\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ تمثل الزاوية التي يصنعها شعاع الموضع مع المحور Oz، وتأخذ قيمها في المجال $[0, \pi]$.

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$ وهي الزاوية المحصورة بين المحورOx والشعاع $\overrightarrow{OH}$، حيث H هي المسقط العمودي للنقطة Mعلى المستوي Oxy. وهي زاوية الدوران حول المحورOz. وتعتبر موجبة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة في المستوي Oxy.

للانتقال من الاحداثيات الكروية الى الاحداثيات الديكارتية تستعمل العلاقات التالية:

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases} \qquad (74.2)$$

وبالمقابل للانتقال من الاحداثيات الديكارتية الى الاحداثيات الكروية تستعمل العلاقات

التالية:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

ملاحظة: لتغطية كل الفراغ بالإحداثيات الكروية نقبل تغير:

r من 0 الى ∞

θ من 0 الى π

ϕ من 0 الى 2π

- شعاع الموضع:

شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية يكتب بالشكل:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) \qquad (75.2)$$

رأينا سابقا أن أشعة الوحدة مرتبطة بالزمن، تتغير أثناء تحرك النقطة المادية نقوم هنا بإعطاء مشتقات هذه الاشعة بالنسبة للزمن ونترك للطالب برهنتها.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi \qquad (76.2)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{e}_\varphi \qquad (77.2)$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_r - \dot{\varphi}cos\theta\vec{e}_\theta \qquad (78.2)$$

- شعاع السرعة في الإحداثيات الكروية:

شعاع السرعة نحصل عليه باشتقاق شعاع الموضع بالنسبة للزمن ويكون كالتالي:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \qquad (79.2)$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi \qquad (80.2)$$

وهي عبارة السرعة في الاحداثيات الكروية، وبالتالي فان مركبات شعاع السرعة في هذه الإحداثيات هي:

$$(81.2) \qquad V_r = \dot{r}, \qquad V_\theta = r\dot{\theta}, \qquad V_\varphi = r\dot{\varphi}sin\theta$$

- طويلة شعاع السرعة:

طويلة شعاع السرعة تعطى بالعلاقة:

$$(82.2) \qquad V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2}$$

- شعاع التسارع في الإحداثيات الأسطوانية:

شعاع التسارع يساوي مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن. لذا نقوم باشتقاق المعادلة (80.2) فنحصل على شعاع التسارع:

$$(83.2) \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{e}_\varphi)$$

وبإجراء الحسابات اللازمة نحصل على مركبات شعاع التسارع في الاحداثيات الكروية وهي كالتالي:

$$(84.2) \qquad a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta)$$

$$(85.2) \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta$$

$$(86.2) \qquad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta)$$

الفصل الثالث

الحركة النسبية

الحركة والسكون مفهومان نسبيان. يختلف الموضع والمسار والسرعة والتسارع لنفس المتحرك بحسب المعلم المختار من قبل المراقب. بصفة عامة يتعلق وصف حركة نقطة مادية بالجملة المرجعية المعتمدة لدراسة هذه الحركة.

مثال.1: حركة قذيفة ترمي من طائرة تحلق أفقيا بسرعة ثابته، فان المسار الذي تتبعه القذيفة بالنسبة لمراقب مرتبط بالطائرة هو المستقيم الشاقولي. بينما بالنسبة لمراقب ثابت مرتبط بالأرض ترسم هذه القذيفة قطعا مكافئا.

مثال.2: حركة شخص داخل حافلة، فهذا الشخص في الحقيقة يقوم بحركتين، أولهما حركة هذا الشخص داخل الحافلة والثانية حركته بالنسبة لمراقب موجود بالمحطة.
تركيب حركة نقطة مادية يعني أن هذه النقطة المادية تقوم بحركتين أو أكثر في آن واحد.

في هذا الفصل سنتطرق الى كيفية وصف الحركة عندما ننتقل من جملة مرجعية ما إلى أخرى، ونشتق فيه علاقاتي تركيب السرعات والتسارعات، لكن قبل ذلك نعطي بعض المفاهيم الأساسية.

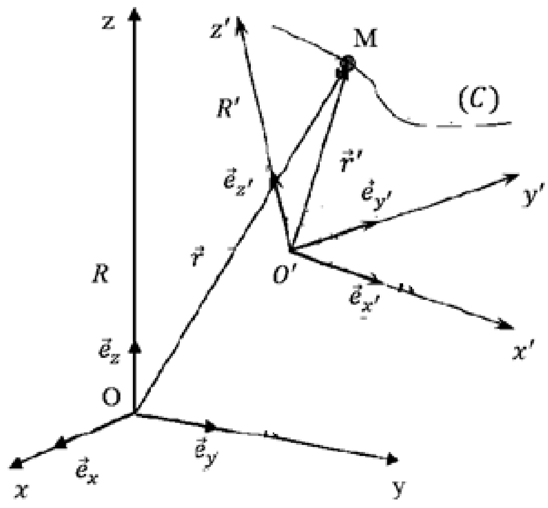
1.3. تعاريف أساسية:

لتكن M نقطة مادية تتحرك في الفضاء، وليكن المرجعين R وR'، المرجع R ثابت والمرجع R' يكون متحركا بالنسبة للمرجع R، وهذا المرجع الاخير ندعوه المرجع الأساسي.
يعرف كل مرجع بأشعة وحدته ومبدؤه كالتالي: $R(O,x,y,z), R'(O',x',y',z')$.

تدعى حركة النقطة المادية بالنسبة للجملة المتحركة R' **بالحركة النسبية**، مثل هذه الحركة يراها مراقب مرتبط بجملة الإحداثيات هذه ويتحرك معها، مسار النقطة M بالنسبة للمرجع المتحرك R' يسمى بالمسار النسبي وسرعتها بالسرعة النسبية ورمزها $\vec{V}_r$ أو $\vec{V}(M/R')$ وتسارعها بالتسارع النسبي ويرمز له بالرمز $\vec{a}_r$ أو $\vec{a}(M/R')$.

حركة النقطة M بالنسبة للمرجع R الثابت تسمى **بالحركة المطلقة** وسرعتها بالسرعة المطلقة ونرمز لها بالرمز $\vec{V}_a$ أو $\vec{V}(M/R)$ وتسارعها بالتسارع المطلق ويرمز له بالرمز $\vec{a}_a$ أو $\vec{a}(M/R)$.

الحركة التي تقوم بها الجملة المتحركة بالنسبة للجملة الثابتة تدعى بالحركة الجرية وسرعتها السرعة الجرية $\vec{V}_e$ وتسارعها بالتسارع الجري$\vec{a}_e$. قد تكون حركةR' بالنسبة لـ R انسحابية أو دورانية أو انسحابية ودورانية معا.



الشكل (1.3): المعلم النسبي والمعلم المطلق

كل ملاحظ يدون ملاحظاته كالتالي:

الملاحظ	في المعلم R $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ثابته في R	في المعلم R' $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ ثابته في R ومتغيرة فيR'
الموضع	$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$	$\vec{r}' = \overrightarrow{OM}'$
السرعة	$\vec{V}_a = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{V}_r = \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$
التسارع	$\vec{a}_a = \dfrac{d\vec{V}_a}{dt}$	$\vec{a}_r = \dfrac{d\vec{V}_r}{dt}$

2.3. العلاقة بين الموضعين:

لدينا شعاع الموضع للنقطة M في المعلم المطلق (الثابت) يكتب كالتالي:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad (1.3)$$

ولدينا شعاع الموضع للنقطة M في المعلم النسبي (المتحرك) يكتب كالتالي:

$$(2.3) \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

العلاقة بين الموضعين هي كالتالي:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

يمكن أن نعبر عن هذه العلاقة باستعمال الاحداثيات ونكتب:

$$(3.3) \quad x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x_{O'}\vec{e}_x + y_{O'}\vec{e}_y + z_{O'}\vec{e}_z + x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

حيث: $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ احداثيات النقطة O' (مبدأ المعلم المتحرك) في المعلم المطلق R.

3.3. العلاقة بين السرعتين النسبية والمطلقة:

باشتقاق العلاقة التي تربط بين الموضعين بالنسبة للزمن في المرجع الثابت R ونكتب:

$$(4.3) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

باستعمال الاحداثيات كما في العلاقة (3.3) فنجد:

$$(5.3) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- السرعة المطلقة، أي سرعة M بالنسبة للمعلم الثابت R تكتب بالشكل التالي:

$$(6.3) \quad \vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

- السرعة النسبية، أي سرعة M بالنسبة للمعلم المتحرك R' تكتب بالشكل التالي:

$$(7.3) \quad \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- سرعة الجر، أي سرعة المعلم المتحرك R' بالنسبة للمعلم الثابت R تكتب بالشكل التالي:

$$(8.3) \quad \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}$$

ومنه العلاقة التي تربط السرعات الثلاثة والتي تسمى قانون تركيب السرعات:

$$(9.3) \qquad \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

نظرية تركيب السرعات: تنص على أن السرعة المطلقة لنقطة مادية تساوي المجموع الهندسي لسرعة الجر والسرعة النسبية.

4.3. العلاقة بين التسارعات:

نشتق عبارة السرعة المطلقة بالنسبة للزمن فنحصل على عبارة التسارع المطلق:

- التسارع المطلق، أي تسارع M بالنسبة للمعلم الثابت R يكتب بالشكل التالي:

$$(10.3) \qquad \vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

أما باستعمال العلاقة (5.3) فنجد:

$$\begin{aligned}(11.3) \quad \vec{a}_a &= \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \\ &= \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{e}_{x'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e}_{y'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e}_{z'}}{dt^2}\right] \\ &+ \left[\ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}\right] \\ &+ 2\left[\dot{x}'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right]\end{aligned}$$

العبارتان متكافئتان أي العلاقتين (10.3) والعلاقة (11.3) ونلاحظ أن التسارع المطلق عبارة عن مجموع ثلاث حدود تمثل تسارعات وهي:

- التسارع المطلق، أي تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم الثابت R العلاقة (10.3) التالية:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- التسارع النسبي، أي تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك R' يكتب بالشكل التالي:

$$(12.3) \qquad \vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- تسارع الجر، أي تسارع المعلم المتحرك R' بالنسبة للمعلم الثابت R يكتب بالشكل التالي:

$$(13.3) \qquad \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{e}_{x'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e}_{y'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e}_{z'}}{dt^2}$$

- تسارع كوريوليس، نسبة الى من وضعه (كوريوليس) سنة 1882. يرمز له بالرمز $\vec{a}_c$ وتعطى عبارته كالتالي:

$$(14.3) \qquad \vec{a}_c = 2\left[\dot{x}'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right]$$

وعليه نكتب:

$$(15.3) \qquad \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

ومنه فشعاع التسارع المطلق يساوي مجموع شعاع التسارع النسبي وشعاع تسارع الجر وشعاع تسارع كوريوليس.

5.3. حالات خاصة:

1.5.3. حركة R' انسحابيه بالنسبة لـ R:

اذا كان R' في حركة انسحابيه (سواء منتظمة أم لا) بالنسبة للمعلم R فان اشعة الوحدة وفق محاور المعلم المتحرك $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ ثابته الاتجاه والحامل الشكل (2.3) وبالتالي فان مشتقاتها بالنسبة للزمن معدومة، ومنه فان سرعة الجر $\vec{V}_e$ مستقلة عن النقطة M ويكون لدينا:

$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{0} \implies \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

والسرعة المطلقة تصبح كالتالي:

$$(16.3) \qquad \vec{V}_a = \vec{V}_r + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{V}(O'/R)$$

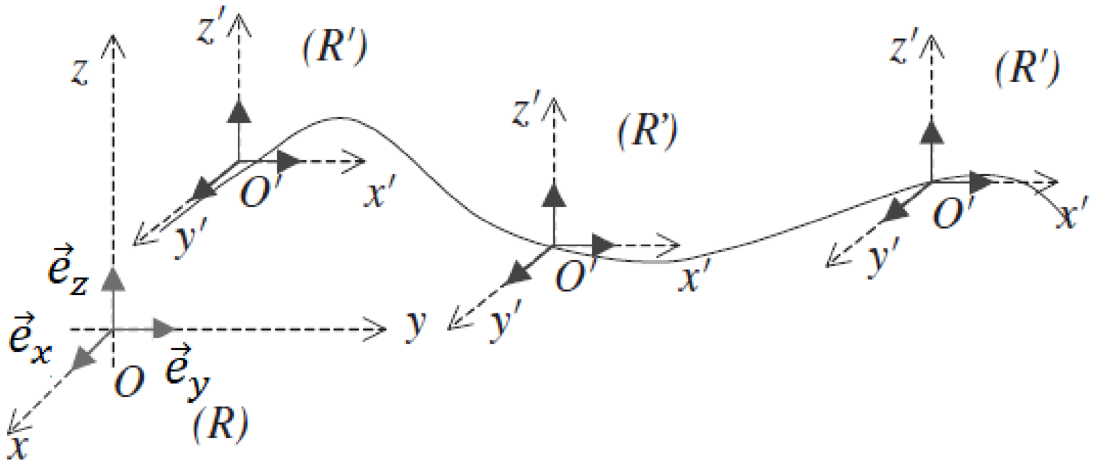
أما بالنسبة للتسارع فان تسارع كوريوليس يكون معدوما.

$$(17.3) \qquad \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

مع: $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$

وبالتالي تصبح عبارة التسارع المطلق كالتالي:

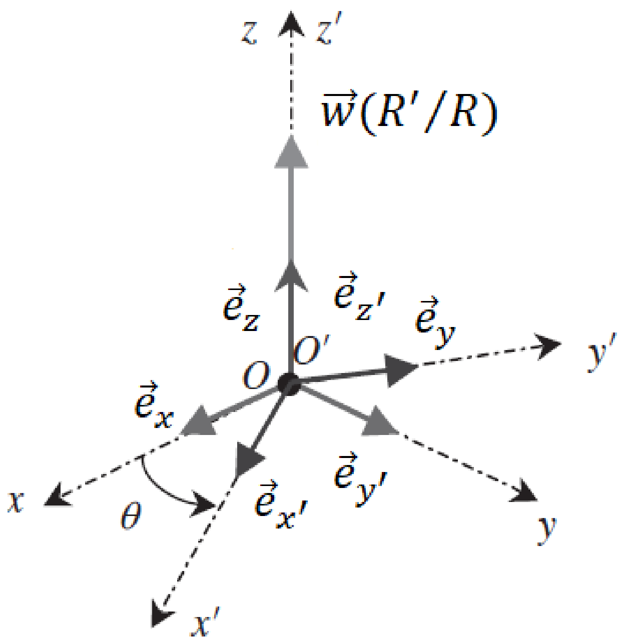
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \qquad (18.3)$$



الشكل (2.3): المعلم النسبي R' في حركة انسحابية كيفية بالنسبة للمعلم المطلق R

2.5.3. حركة R' دورانية بالنسبة لـ R:

ندرس هنا الحالة التي تقوم فيها الجملة R' بحركة دورانية بالنسبة للجملة R ، بحيث يضل مستوياهما Oxy و $O'x'y'$ منطبقين ولهما نفس المبدأ وبالتالي يكون شعاعي موضعهما منطبقين ($\vec{r}' = \vec{r}$)، وتقوم الجملة R بالدوران حول المحور المشترك Oz بسرعة زاوية w(t) ، مثلما هو موضح في الشكل (2.3).



الشكل (2.3): جملة مرجعية R' تتحرك بحركة دورانية بالنسبة للجملة R وذلك حول محور مشترك Oz

ـ العلاقة بين السرعات:

نلاحظ من الشكل (3.3) أن:

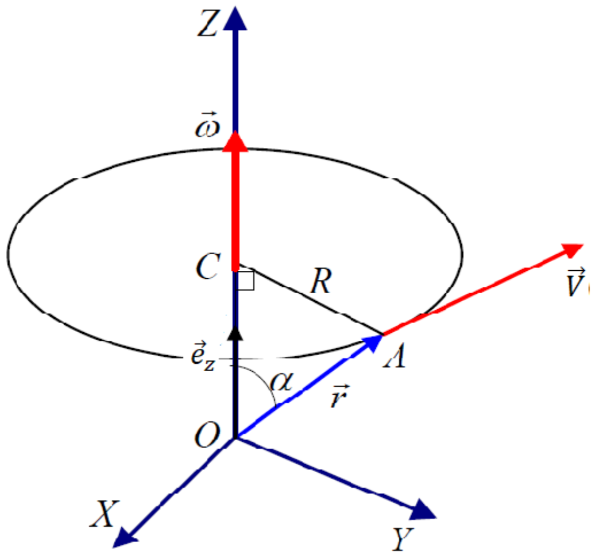
$R = rsin\alpha$ ونعرف أن $V = wR$ ومنه فان :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{r} \iff V = wrsin\alpha \qquad (19.3)$$

لذا يمكن ان نكتب:

$$\vec{w} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$$

وهذا يعني انه بإمكاننا وضع السرعة الزاوية على شكل مقدار شعاعي، بحيث تكون جهته عمودية على مستوي الحركة في اتجاه يحدد باستعمال قاعدة اليد اليمنى التي تستعمل لتحديد اتجاه الشعاع الناتج عن الجداء الشعاعي.



الشكل (3.3): شعاع السرعة الزاوية

المعلم R' في حركة دورانية بالنسبة للجملة الثابتة R وذلك حول المحور Oz، وبالتالي فان شعاع السرعة الزاوية يكون محمولا على المحور Oz، ونكتب:

$$\vec{w} = w\vec{e}_z$$

بالنسبة للملاحظ O المرتبط بالمعلم Oxyz فان سرعة النقطة المادية M تشتق من عبارة شعاع الموضع كالتالي:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \implies \vec{V}_a = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad (20.3)$$

بالنسبة للملاحظ O' المرتبط بالمعلم $O'x'y'z'$ فان سرعة النقطة المادية M تشتق من عبارة شعاع الموضع كالتالي:

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'} \implies \vec{V}_r = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'} \quad (21.3)$$

بالنسبة للملاحظ O المرتبط بالمعلم Oxyz فان المعلم $O'x'y'z'$ يدور وبالتالي فان أشعة الوحدة $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ متغيرة الجهة والحامل بالنسبة له وعليه فانه يمكن أن يكتب بالنسبة لـ R التالي:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'} \quad (22.3)$$

نهايات الأشعة $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ تقوم بحركة دائرية منتظمة بالنسبة للملاحظ O بسرعة زاوية (w)، ولدينا أيضا $(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt})$ الذي يمثل سرعة نقطة تقع على بعد يساوي الواحد وتنتقل بحركة دائرية منتظمة بنفس السرعة الزاوية المذكورة انفا، وبناء على العلاقة (19.3) فانه يمكن أن نكتب التالي:

$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e}_{x'}, \qquad \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e}_{y'}, \qquad \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e}_{z'}$$

ملاحظة: ان الحد المتمم في العلاقة (22.3) $\vec{w} \wedge \vec{e}_{x'}$ ناتج عن تغير اتجاهات أشعة الوحدة في R' ، بسبب دوران R' *بالنسبة لـ* R.

ومنه يمكن ان نكتب:

$$x' \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = x'\vec{w} \wedge \vec{e}_{x'} + y'\vec{w} \wedge \vec{e}_{y'} + z'\vec{w} \wedge \vec{e}_{z'}$$
$$= \vec{w} \wedge \left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}\right) = \vec{w} \wedge \vec{r}$$

هذا المقدار يمثل سرعة الجر في هذه الحالة، بالتعويض في العلاقة (22.3) نحصل على:

$$(23.3) \qquad \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}$$

هذه العبارة تعطي العلاقة بين السرعات في الحالة التي يقوم فيها المعلم R' بحركة دورانية بالنسبة للجملة R.

- العلاقة بين التسارعات:

- تسارع النقطة M كما يراه الملاحظ O (10.3):

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- تسارع النقطة M كما يراه الملاحظ O' (دون الاخذ بعين الاعتبار الدوران) (12.3):

$$\vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- ولدينا باشتقاق العبارة (23.3):

$$(24.3) \quad \vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{r}$$

الحد الأخير معدوم لان السرعة الزاوية ثابته وبالتالي العلاقة (24.3) تكتب بالشكل:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$(25.3) \quad \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \left[\ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}\right] + \left[\dot{x}'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right]$$

الحد الأول في العلاقة (25.3) يمثل التسارع النسبي، بينما الحد الثاني فيمثل $(\vec{w} \wedge \vec{V}_r)$ ونكتب:

$$(26.3) \qquad \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{w} \wedge \vec{V}_r$$

ولدينا العلاقة (23.3):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}$$

ومنه:

$$\vec{w} \wedge \vec{V}_a = \vec{w} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{w} \wedge \left(\vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}\right) = \vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$$

وبالتالي نكتب:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_r + \vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$$
$$= \vec{a}_r + 2\vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$$

وأخيرا نكتب:

$$(27.3) \qquad \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$$

وهي العلاقة التي تربط مختلف التسارعات في حركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ثابته w.

الحد: $2\vec{w} \wedge \vec{V}_r$ يمثل تسارع كوريوليس

الحد: $\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$ يمثل تسارع مركزي.

الحدين الأخيرين ناتجين عن الحركة النسبية لدوران الملاحظين.

الفصل الرابع

تحريك النقطة المادية

درسنا في الفصلين السابقين الحركة، حيث تتلخص دراسة الحركة بتحديد موضع النقطة المادية وسرعتها وتسارعها في كل لحظة زمنية، وعرفنا كيف نصف حركة في جملة مرجعية ما، لكننا لم نهتم أبدا بمسببات تلك الحركة. فما الذي يجعل النقطة المادية تتحرك؟ ان مسببات الحركة تدخل في علم التحريك، وهو علم يختص بدراسة العلاقة بين الحركة ومسبباتها.

1.4. مفهوم القوة:

نقول عن جملتين ماديتين أنهما في تأثير متبادل عندما تؤثر كل منهما على الأخرى، أو يؤدي إحداث تغير ما في إحداهما إلى حدوث تغير في الأخرى. كل التأثيرات المتبادلة بين مختلف الجمل المادية في الطبيعة تتلاشى عندما تصبح المسافة الفاصلة بين الجملتين كبيرة جدا قياسا بأبعاد الجملتين (أي لا نهائية). هذا التأثير المتبادل يوصف بمقدار شعاعي ندعوه القوة، وعليه نعرف القوة بأنها مقدار شعاعي يصف تأثيرا قادرا على احداث حركة أو تغيير الحالة الحركة لنقطة مادية، او أنه قادرا على تشويه جسم مادي.

2.4. الجملة المعزولة:

نقول عن جملة ما أنها جملة معزولة إذا لم تكن خاضعة لأي تأثير خارجي ولا تؤثر هي في هذا الوسط الخارجي. وإذا كانت محصلة جميع القوى الخارجية المؤثرة في الجملة المادية تساوي الصفر أي تتلاشى القوى مع بعضها البعض ففي هذه الحالة نقول إن الجملة شبه معزولة. نشير الى أن الكميات الفيزيائية لجسم معزول أو شبه معزول لا تتغير بمرور الزمن مادام الجسم معزولا أو شبه معزولا.

3.4. مبدأ العطالة (قانون نيوتن الأول):

ينص هذا المبدأ على أن الجسم المعزول يحافظ على عطالته أي على حالته السكونية أو الحركية (أي عجزه عن تغيير حالته الحركية)، فالجسم الساكن يظل ساكنا، والجسم المتحرك بسرعة محددة أي ثابتة وعلى مسار مستقيم يستمر ويبقى في حركته بنفس السرعة وفي الاتجاه نفسه بالنسبة لجملة مرجعية ما لم تؤثر فيه قوة خارجية تجبره على تغيير ذلك، وبالمقابل إذا كان الجسم ساكنا أو في حركة مستقيمة منتظمة فانه لا يخضع لأية قوة أو أن القوى المؤثرة عليه تلغي بعضها بعضا. ان هذا القانون يصف ميل الأجسام للمحافظة على حالتها الحركية وممانعة تغييرها. ويطلق على هذه الظاهرة الخاصية العطالية، ويسمى مبدأ العطالة بقانون نيوتن الأول.

4.4. الجمل الغاليلية أو العطالية:

توجد على الأقل جملة مرجعية متميزة واحدة تكون فيها حركة أية نقطة مادية معزولة حركة مستقيمة منتظمة ندعو هذه الجملة المرجعية عندها جملة غاليلية أو عطالية، أو بعبارة أخرى هو كل مرجع يتحقق فيه مبدأ العطالة. كل مرجع في حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمرجع غاليلي هو أيضا مرجع غاليلي. يمكننا القول وبتقريب جيد، أن الجملة الغاليلية هي كل جملة تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لجملة كوبرنيك (المرجع الهليومركزي). من الناحية العملية يمكن اعتبار المعلم المرتبط بالأرض معلما عطاليا إذا تعلق الأمر بتجارب ذات مدة زمنية قصيرة تجرى في المعلم المخبري بجوار سطح الأرض.

5.4. كمية الحركة (الدفع الخطي):

يعرف شعاع الدفع الخطي $\vec{p}$ لنقطة مادية كتلتها m وسرعتها $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم R كما يلي:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (1.4)$$

كمية الحركة هي مقدار شعاعي لها نفس اتجاه السرعة، وهي مقدار فيزيائي هام لأنها تربط بين عنصرين يميزان الحالة الحركية للجسم وهما كتلته وهي مقدار سلمي تحريكي، وسرعته وهي مقدار شعاعي حركي. كمية الحركة لجسم معزول ثابته.

شعاع كمية الحركة يتعلق بالجملة المرجعية المعتمدة لدراسة الحركة.

6.4. انحفاظ كمية الحركة:

نفترض وجود نقطتين ماديين غير خاضعين الا للتأثيرات المتبادلة بينهما وبالتالي فهما معزولان عن باقي الكون ويكون لدينا:

عند اللحظة t $\qquad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

عند اللحظة t' $\qquad \vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$

كمية الحركة الكلية لجملة مكونة من جسمين (أو عدة أجسام) خاضعين لتأثيرهما المتبادل فقط تبقى ثابته بحسب مبدأ العطالة وعليه:

$$\vec{p} = \vec{p}' \Longrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Longrightarrow \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2$$

ومنه فان:

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

كمية الحركة الكلية تبقى ثابته ما يفقده الجسم الأول من كمية حركة يكتسبه الجسم الثاني والعكس بالعكس.

7.4. نص المبدأ الأساسي في التحريك (قانون نيوتن الثاني):

في أية جملة مرجعية غاليلية R، تكون محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية مساوية إلى مشتق كمية الحركة لهذه النقطة المادية بالنسبة للزمن في تلك الجملة ونكتب:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (2.4)$$

العلاقة (2.4) تمثل المبدأ الأساسي في التحريك في مرجع غاليلي.

نلاحظ في هذه العلاقة أنها تربط بين مقدارين و هما السرعة والقوة، أي أنها تربط الحركة بمسبباتها.

- إذا كانت الكتلة ثابتة فإن علاقة المبدأ الأساسي للتحريك في مرجع غاليلي تكتب بالشكل:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (3.4)$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

في هذه الصيغة لقانون نيوتن الثاني يتناسب تسارع الجسم والذي يكتسبه نتيجة لقوة دفع ما، تناسباً طرديا مع مجموع القوى المؤثرة فيه ويكون في اتجاهها، ويوضح هذا القانون ماهية العلاقة بين القوة المؤثرة في جسم معين ومقدار التغير في الحالة الحركية له (تسارعه).

8.4. صلاحية القانون الثاني للحركة:

- القانون الثاني لنيوتن لا يصلح إلا في معلم عطالي.

- عند تطبيق هذا القانون على الأجسام المادية يجب اعتبارها نقاطا مادية لا أبعاد لها.

- يصلح هذا القانون ويعطي نتائج جيدة فقط على الأجسام التي لها سرعة صغيرة قياسا بسرعة الضوء.

9.4. الخطوات العامة لتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

- تحديد الجملة المدروسة.

- رسم تخطيطي للجملة مع توضيح الأشياء الخارجية المؤثرة عليها.

- تحديد القوى المؤثرة على الجملة المدروسة، مع توضيح هذه القوى على الشكل.

- اختيار معلم مناسب مثلا $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ إذا لم يكن مفروض في المسألة.

- كتابة العلاقة الشعاعية للقانون الثاني لنيوتن.

- إسقاط هذه العلاقة على المحاور للتخلص من الأشعة وتحديد المعادلات التي تضبط المسألة

- وفي النهاية حساب المجاهيل المطلوبة.

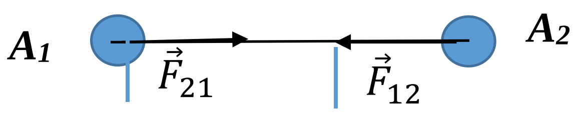
➢ إذا كانت كتلة النقطة المادية متغيرة مع الزمن فنكتب:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \qquad (4.4)$$

10.4. قانون نيوتن الثالث (مبدا الفعل ورد الفعل):

قانون نيوتن الثالث ينص على أن لكل فعل رد فعل مساويا له في المقدار ومعاكسا له في الاتجاه، ويؤثران في جسمين مختلفين ويعملان على الخط نفسه. أي إنه إذا أثر جسم A_1على جسم آخر A_2 بقوة معينة $\vec{F}_{12}$ تسمى قوة الفعل، فإن الجسم A_2 بدوره يؤثر على الجسم A_1 بقوة تسمى قوة رد الفعل $\vec{F}_{21}$تساوي قوة الفعل في المقدار، وتعاكسها في الاتجاه ونكتب:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (5.4)$$



الشكل (1.4) تمثيل الفعل ورد الفعل.

11.4. القوى الأساسية:

يتطلب تطبيق قوانين الميكانيكا تحديد دقيق للقوى التي تؤثر على الجملة، يعني عدم نسيان قوة أو عدم إضافة قوة. لهذا الغرض، يجب تعريف الجملة بوضوح حتى نتمكن بعد ذلك من تحديد مختلف القوى التي يطبقها الوسط الخارجي على الجملة. يوجد نوعان من القوى:

➢ قوى التأثير عن بعد (الاجسام في هذه الحالة ليست على تلامس): أمثلة: قوى الجاذبية، القوى الكهرومغناطيسية، قوى التماسك النووية.

➢ قوى تلامسيه: أمثلة: قوى الاحتكاك والتوترات.

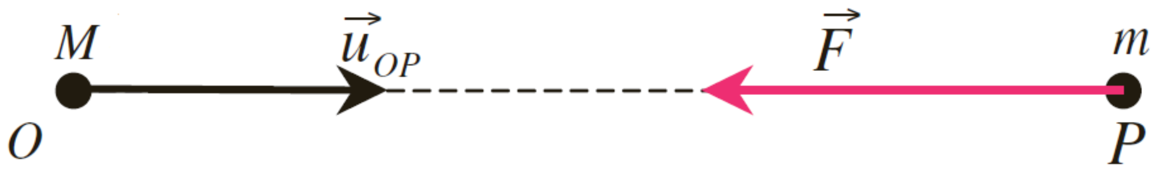
12.4. ثقل جسم - القوة الكتلية:

أعلن إسحاق نيوتن سنة 1686أن قوة التجاذب الكتلية بين كتلتين M و m تتناسب طردا مع جداء الكتلتين وعكسا مع مربع البعد بينهما.

القوة $\vec{F}$ التي تطبقها الكتلة M (النقطية في O) على الكتلة m (النقطية في P) حيث: $OP=r$ تعطى بالعبارة:

$$(5.4) \qquad \vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{U}_{OP}$$

$\vec{U}_{OP}$ شعاع وحدة محمول على OP وموجه وفقه، وثابت التجاذب الكتلي قيمته في النظام الدولي هي: $G=6.67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}$.



الشكل (2.4) تمثيل قوة التجاذب.

بحسب قانون نيوتن الثالث (مبدأ الفعل ورد الفعل)، فان الكتلة m (النقطية في P) تطبق القوة $\vec{F}'$ على الكتلة M (النقطية في O) حيث:

$$(6.4) \qquad \vec{F}' = -G\frac{mM}{r^2}\vec{U}_{PO} = G\frac{mM}{r^2}\vec{U}_{OP} = -\vec{F}$$

قوة الجذب التي تطبقها الكتلة M في O على كتلة m تقع في أي نقطة P من الفضاء تكتب:

$$(7.4) \qquad \vec{F} = m\vec{G}(P) = -G\frac{mM}{r^2}\vec{U}_{OP}$$

حقل الجاذبية الناتج عن الكتلة النقطية M في نقطة P من الفضاء هو المقدار: $\vec{G}(P)$ والذي يعطى بالعبارة:

$$(8.4) \qquad \vec{G}(P) = -G\frac{M}{r^2}\vec{U}_{OP}$$

يتضح أنه بالنسبة لجسم صلب كروي، الذي له توزيع كتلي متناظر كرويا، فإن حقل الجاذبية الذي أوجده هذا الجسم في نقطة خارجه هو نفسه الذي سيتم إنشاؤه بواسطة نقطة مادية كتلتها مساوية لكتلة الجسم الصلب وتقع في مركزه، هذا هو الحال بالنسبة لنجوم الكون وخاصة بالنسبة للأرض.

13.4. حقل الجاذبية الأرضي:

ان حقل الجاذبية الأرضي هو نفسه حقل الجاذبية الناتج عن جسم نقطي له كتلة الأرض M وموجود في مركز الأرض O، نستنتج من ذلك أن حقل الجاذبية الأرضي المتولد في

نقطة P في الفضاء:

$$(9.4) \qquad \vec{G}(P) = -G\frac{M}{r^2}\vec{U}_{OP} = -G\frac{M}{(R_T+z)^2}\vec{U}_{OP}$$

- M: كتلة الأرض $M = 5,98 \cdot 10^{24}\ kg$.
- R_T: نصف قطر الأرض $R_T = 6,37 \cdot 10^{6}\ m$.
- r: بعد النقطة Pعن مركز الأرض O.
- z: بعد النقطة Pعن سطح الأرض.

-عبارة قيمة حقل الجاذبية الأرضي على سطح الأرض ($z=0$) تعطى بالعبارة:

$$(10.4) \qquad \vec{G}_0 = -G\frac{M}{{R_T}^2}\vec{U}_{OP} = \vec{g}_0$$

$$(11.4) \qquad G_0 = G\frac{M}{{R_T}^2} = 9.81\ m.s^{-2} = g_0$$

يمكن ان نعتبر ان G_0 توافق g_0.

-على ارتفاع z من سطح الأرض يعطى بالعبارة:

$$(12.4) \qquad G(z) = G\frac{M}{(R_T+z)^2} = G\frac{M}{{R_T}^2}(1+\frac{z}{R_T})^{-2} = G_0(1+\frac{z}{R_T})^{-2}$$

من أجل ارتفاعات صغيرة جدا بالنسبة لنصف قطر الأرض نجد أن شدة حقل الجاذبية الأرضية:

$$(12.4) \quad G(z) = G_0\left(1-\frac{2z}{R_T}\right) = g$$

14.4. حقل الجاذبية وثقل جسم:

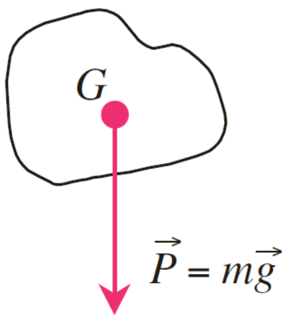
الثقل $\vec{P}$ لجسم كتلته m هو عبارة عن قوة جذب الأرض لهذا الجسم ونكتب:

$$(13.4) \qquad \vec{P} = m\vec{g}$$

$\vec{g}$ شعاع موجه وفق شاقول النقطة نحو مركز الأرض، ويعتبر منتظما في منطقة محدودة من الفضاء.

ميزات الثقل:

الجهة: من أعلى نحو الأسفل (نحو مركز الأرض).
المنحى: دائما شاقولي
القيمة: كل جسم لديه قيمة ثابتة على سطح الأرض
العلاقة بين الثقل و الكتلة: $P=mg$
حيث: $g=9.81ms^{-2}$.



الشكل (3.4) تمثيل قوة الثقل

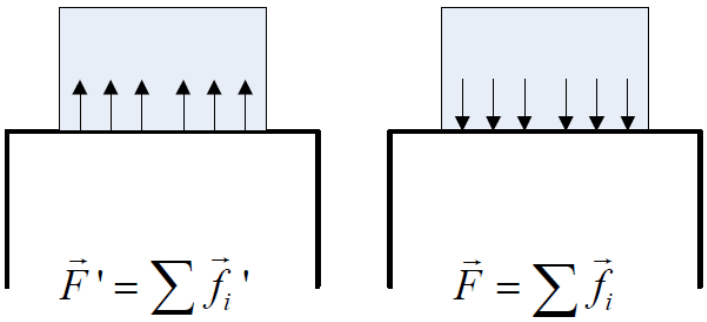
14.4. قوى التلامس أو قوى الترابط:

1.14.4. رد فعل حامل:

جسم في حالة توازن فوق طاولة:

$\vec{F}$ هي محصلة كل تجاذبات جزيئات الجسم الملامسة لسطح الطاولة والمطبقة عليها وتمثل ثقل الجسم $\vec{P}$

$\vec{F}'$ هي محصلة كل تجاذبات جزيئات سطح الطاولة الملامس لسطح الجسم والمطبقة عليه وتمثل رد فعل السطح $\vec{N}$، وتكون عمودية على السطح .

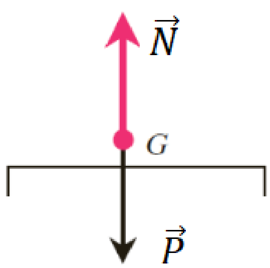


الشكل (4.4) رد فعل حامل

الجسم في حالة توازن فوق الطاولة ومنه:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F}' = \vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \implies \vec{a} = \vec{0}$$

تسمى القوتان بقوى التلامس او قوى الترابط.



2.14.4. قوى الاحتكاك:

كل ما كان هناك تلامس بين سطحين غير أملسين لجسمين صلبين الا وكانت هناك مقاومة تعاكس الحركة النسبية للجسمين، أو عندما يتحرك جسم مادي في مائع فإن جزيئات هذا المائع تصطدم بسطح هذا الجسم فينتج عن ذلك قوة ممانعة للحركة، هناك عدة أنواع من الاحتكاك:

- ➢ الاحتكاكات بين الأجسام الصلبة التي يمكن أن تكون سكونيه أو حركية.
- ➢ الاحتكاكات في الموائع.

3.14.4. قوى الاحتكاك الصلب:

قوة الاحتكاك السكوني: هي القوة التي تبقي الجسم في حالة سكون حتى في وجود قوى خارجية تميل إلى تحريكه. في هذه الحالة، تكون محصلة قوى الاحتكاك السكوني هي قوة تعاكس محصلة هذه القوى الخارجية ويبقى الجسم ساكنا.

مثال: حالة جسم موضوع على مستوى أفقي:

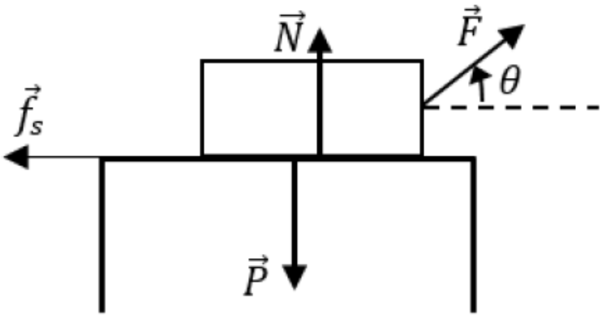
يخضع جسم الشكل أدناه لأربعة قوى:

- ثقل الجسم $\vec{P}$.

- رد فعل المستوي $\vec{N}$.

- لتكن قوة الاحتكاك السكوني $\vec{f_s}$ التي تمنع حركة الجسم.

- لكي يتحرك الجسم الموضوع فوق المستوي الافقي، يجب أن نطبق عليه قوة دنيا $\vec{F}$.



الشكل (5.4) تمثيل قوة الاحتكاك

الجسم ساكن ومنه حسب قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{f_s} = \vec{0}$$

بإسقاط العبارة الشعاعية على المحورين الشاقولي والأفقي فنجد:

$$\begin{cases} N - P + Fsin\theta = 0 \\ Fcos\theta - f_s = 0 \Longrightarrow Fcos\theta = f_s \end{cases}$$

قوة الاحتكاك السكوني تتناسب مع شدة القوة الناظمية N ، وذلك حسب العلاقة التالية :

$$f_s = \mu_s N \qquad (14.4)$$

حيث: μ_s ثابت موجب يدعى معامل الاحتكاك السكوني.

قوة الاحتكاك الحركي:

إذا ما بدأ الجسم السابق بالحركة على المستوي الخشن أصبحت قوة الاحتكاك السكوني قوة احتكاك حركي، والعلاقة (14.4) تصبح كالتالي:

$$f_c = \mu_c N \qquad (15.4)$$

حيث: f_c *قوة الاحتكاك الحركي، وتكون دوما في اتجاه معاكس للحركة.*

μ_c: *ثابت موجب يدعى معامل الاحتكاك الحركي.*

نلاحظ أن قوة الاحتكاك الحركي تتناسب مع شدة القوة الناظمية N.

ملاحظة -1-: معامل الاحتكاك السكوني أكبر دوما من معامل الاحتكاك الحركي $\mu_s > \mu_c$.
من اجل هذا السبب يصعب تحريك سيارة ساكنة بالدفع، ولكن عندما تبدأ فعلا بالحركة تتطلب قوة دفع أقل للمحافظة على حركتها.

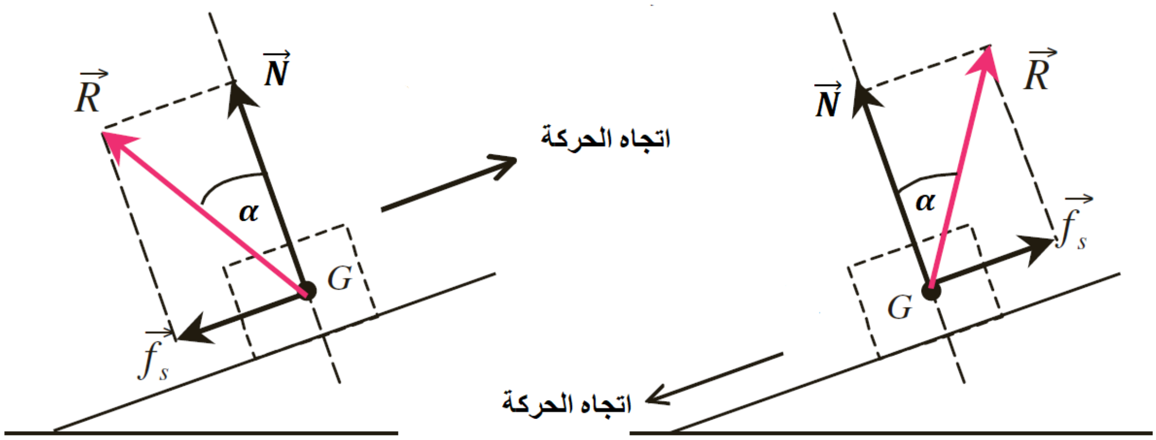
ملاحظة -2-:

- الجسم في حالة حركة يعمل معامل الاحتكاك الحركي والقوة هي قوة الاحتكاك الحركي.

- الجسم في حالة سكون يعمل معامل الاحتكاك السكوني والقوة هي قوة الاحتكاك السكوني.

ملاحظة-3:

تمثيل قوة الاحتكاك الحركي f_s (f_c) : دوما عكس اتجاه الحركة.



الشكل (6.4) تمثيل قوة الاحتكاك بحسب اتجاه الحركة.

يمكن تحليل رد الفعل الكلي $\vec{R}$ المطبق من قبل السطح على الجسم إلى مركبتين متعامدتين شكل (6.4):

- المركبة الأولى: N وتكون عمودية على سطح التماس وتمثل رد الفعل الناظمي.

- المركبة الثانية : f_s وتكون موازية لسطح التماس و تسمى بقوة الاحتكاك بين الجسمين.

من الشكل:
$$tan\alpha = \frac{f_s}{N} = \mu_s \qquad (16.4)$$

وفي حالة الحركة:
$$tan\alpha = \frac{f_c}{N} = \mu_c \qquad (17.4)$$

الزاوية (α) تسمى زاوية الاحتكاك.

4.14.4. الاحتكاكات في الموائع:

عندما يتحرك جسم مادي في مائع (غاز أو سائل) فإن جزيئات هذا المائع تصطدم بسطح هذا الجسم فينتج عن ذلك قوة احتكاك ممانعة للحركة. لا يوجد قانون بسيط يعبر عن هذه القوة، بل توجد قوانين تجريبية صالحة ضمن شروط محددة تتعلق هذه الشروط بحركة الجسم داخل المائع، أي بحركة المائع حول هذا الجسم.

- حين ينتقل الجسم المادي في المائع بسرعة صفيره نسبيا، قوة الاحتكاك تحسب بالقانون التالي:

$$\vec{f}_f = -K\vec{v} \qquad (18.4)$$

حيث:

v: سرعة الجسم داخل المائع.

K: ثابت احتكاك الجسم بالمائع. بينت التجربة أن صيغته تتناسب مع معامل لزوجة المائع η من جهة وتتعلق بالشكل الهندسي للجسم من جهة أخرى ويعبر عنه بالعلاقة:

$$K = C\eta \qquad (19.4)$$

حيث: C دالة تحدد بالشكل الهندسي للجسم، عبارته بالنسبة لجسم كروي نصف قطره R هي:

$$C=6\pi R$$

ومنه فان عبارة قوة الاحتكاك والتي تعرف بقانون ستوكس يكتب:

$$\vec{f}_f = -6\pi R\eta\vec{v} \qquad (20.4)$$

η: يعبر عن الاحتكاكات الداخلية للمائع والتي تسمى اللزوجة، تنخفض في السوائل بارتفاع درجة الحرارة بينما تزداد بزيادة درجة الحرارة في الغازات. يعبر عنها بوحدة ($Pa.S$)، وغالبا ما تستعمل الوحدة ($Poise$) حيث: $1P=10Pa.S$.

- حين ينتقل الجسم المادي في المائع بسرعته كبيره، فان قوة الاحتكاك تتناسب طردا مع مربع السرعة وتحسب بالقانون التالي:

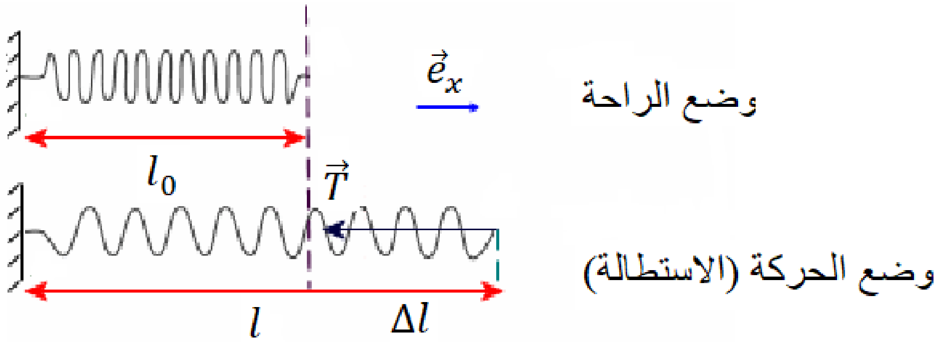
$$\vec{f}_f = -Kv\vec{v} \qquad (21.4)$$

5.14.4. قوة المرونة:

نابض مهمل الكتلة، طوله وهو فارغ l_0 وثابت مرونة K يطبق على نقطة مادية قوة ارجاع $\vec{T}$ تتناسب مع استطالته (Δl)، تسعى هذه القوة إلى إعادته إلى وضعه الأصلي قبل التشوه نسميها بالقوة المرنة (قوة المرونة) نصوفها كما يلي:

$$\vec{T} = -K(l - l_0)\vec{e}_x = -K\Delta l\vec{e}_x \qquad (22.4)$$

حيث: $\Delta l = l - l_0$



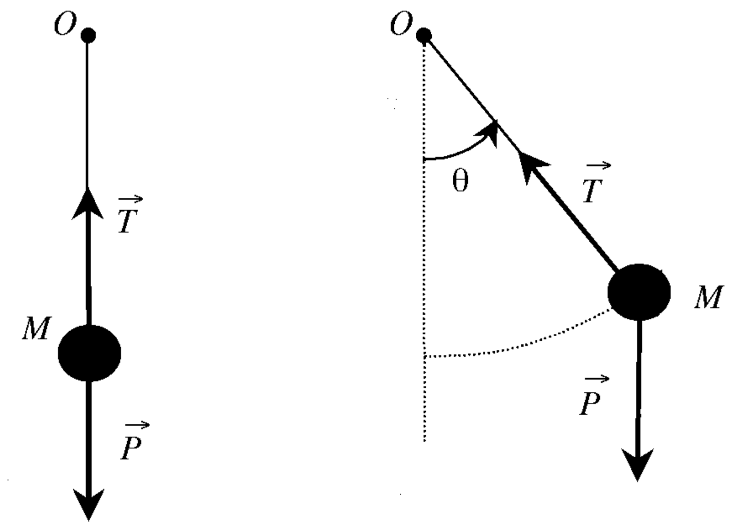
الشكل (7.4) قوة توتر نابض واستطالته

T: قوة الارجاع (N)، l_0: طول النابض وهو فارغ (وضع الراحة) (m)، K: ثابت مرونة النابض (Nm^{-1})، l: طول النابض في وضع الحركة (m)، Δl: استطالة النابض (m) وهو مقدار جبري، يكون سالب في حالة الانضغاط وموجب في حالة الاستطالة.

6.14.4. قوة توتر خيط:

لتكن نقطة M مادية كتلتها m معلقة بواسطة خيط مهمل الكتلة وعديم الامتطاط ونهايته الأخرى مثبته في نقطة O، تخضع النقطة المادية في هذه الحالة الى تأثير قوتين: قوة الثقل (قوة بعدية)، وقوة توتر الخيط (قوة تلامسيه)، هذه الاخيرة نقطة تطبيقها نقطة اتصال الخيط

بالنقطة المادية وحاملها الخيط واتجاهها نحو نقطة تثبيت الخيط. الشكل (8.4) يمثل القوى المؤثرة على النقطة المادية في وضعيتين مختلفتين.



الشكل (8.4): القوى المؤثرة في نقطة مادية معلقة بواسطة خيط: وضع التوازن ووضع كيفي.

7.14.4. قوى العطالة (المبدأ الأساسي للتحريك في معلم غير غاليلي):

نعتبر نقطة مادية كتلتها m في حالة حركة بالنسبة لمرجع $R'(O',x',y',z')$ وهو نفسه في حالة حركة بالنسبة للمرجع الثابت $R(O,x,y,z)$.

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك في المعلم المطلق:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_a \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{a}_a = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c \qquad (23.4)$$

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك في المعلم النسبي:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c \qquad (24.4)$$

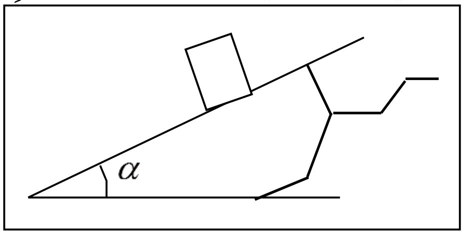
النتيجة:

يبقى المبدأ الأساسي للتحريك صالحا في المعالم غير الغاليلية بشرط أن نضيف قوة الجر $\vec{F}_e$ وقوة كوريوليس $\vec{F}_c$ الى الحد $\vec{F}$ الذي يمثل القوى الخارجية المؤثرة على النقطة المادية لجعلها تتحرك.

حيث: $\vec{F}_e = m\vec{a}_e$ ، $\vec{F}_c = m\vec{a}_c$.

تطبيق: المستوي المائل:

علبة معدنية (كتلتها $m=10kg$) في حالة سكون موضوعة على دفة خشبية (مبدئيا أفقية). نرمز على التوالي بـ: μ_s و μ_c لمعاملي الاحتكاك السكوني والحركي بين معدن العلبة والدفة الخشبية. بواسطة رافعة، نرفع تدريجيا الدفة من أحد طرفيها، ونرمز بـ α للزاوية التي تصنعها الدفة مع الأفق.

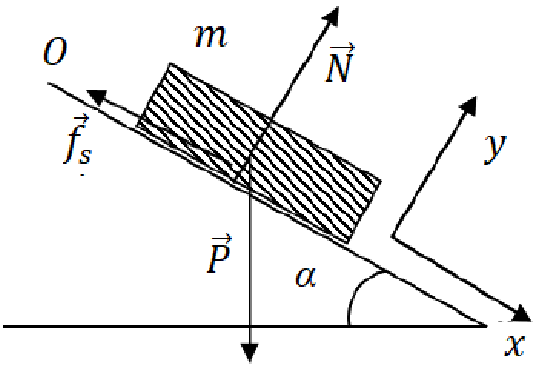


1) ما هي أكبر قيمة α_0 لـ: α التي من أجلها يمكننا رفع الدفة بدون حدوث انزلاق للعلبة المعدنية.

2) ابتداءً من هذه الوضعية ذات التوازن الحرج، نرفع قليلا طرف الدفة حتى تبدأ العلبة في الانزلاق. في هذه الحالة ما هو تسارع العلبة.

3) نقوم الان بإنزال تدريجي لطرف الدفة أي بخفض لزاوية الميلان α، في هذه الحالة ما هي قيمة α_1 لـ: α التي من أجلها تصبح الحركة منتظمة.

الحل:



1) قيمة α_0:

أكبر قيمة لـ α_0 الموافقة لسكون الجسم وحسب العلاقة الأساسية للتحريك فان:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_s} = \vec{0}$$

بالإسقاط على المحور Ox:

$$mgsin\alpha_0 - f_s = 0 \implies f_s = mgsin\alpha_0 \quad (1)$$

بالإسقاط على المحور Oy:

$$-mgcos\alpha_0 + N = 0 \implies N = mgcos\alpha_0 \quad (2)$$

ولدينا من العلاقة (14.4):

$$f_s = \mu_s N \quad (3)$$

ومنه من 1 و 2 و3 نجد:

$$\mu_s = \frac{f_s}{N} = \frac{mgsin\alpha_0}{mgcos\alpha_0} = tan\alpha_0 \implies \alpha_0 = arctg\mu_s$$

2) حساب التسارع: بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك، واتباع نفس الخطوات السابقة مع تغيير ما يجب تغييره:

$$mgsin\alpha - f_c = ma$$

$$-mgcos\alpha + N = 0 \implies N = mgcos\alpha$$

$$f_c = \mu_c N$$

نجد من العلاقات الثلاث السابقة:

$$a = gsin\alpha - \mu_c mgcos\alpha$$

3) قيمة α_1 التي تجعل الحركة منتظمة:

الحركة منتظمة ⟸ التسارع معدوم $a=0$

بالتعويض في معادلات السؤال الثاني نجد:

$$mgsin\alpha_1 - f_c = 0$$

$$-mgcos\alpha_1 + N = 0$$

$$f_c = \mu_c N$$

وأخيرا نجد: $$\alpha_1 = arctg\mu_c$$

15.4. نظرية العزم الحركي:

تعتمد الحركة المنحنية لكتلة بالإضافة إلى القوة المطبقة عليها، على نصف قطر الانحناء. هذه القوة يكون تأثيرها أعظمي إذا تم تطبيقها عموديا على نصف قطر الانحناء. ندخل مقدارا حركيا جديدا يأخذ بعين الاعتبار هذه المعلومات والذي نسميه «العزم الحركي»، فهي تسمح بإيجاد معادلة الحركة، خاصة في حالة نقطة مادية تتحرك حول محور ما.

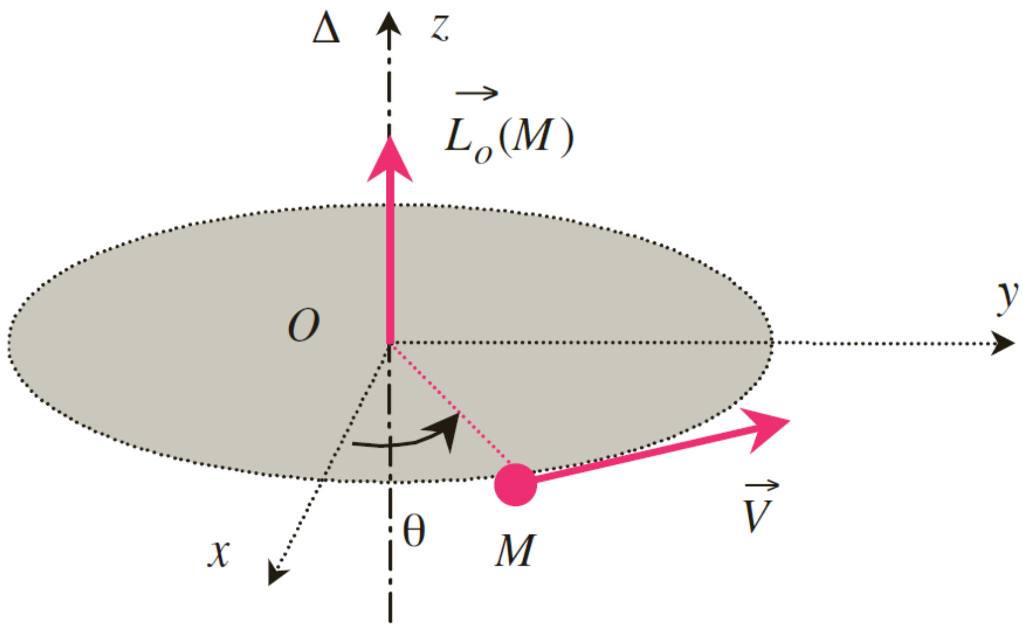
1.15.4. العزم الحركي:

لتكن M نقطة مادية كتلتها m، تتحرك في جملة غاليلية R مبدؤها O. نعرف العزم الحركي لهذه النقطة المادية M بالنسبة لـ O بأنه المقدار الشعاعي التالي:

$$\vec{L}_0(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \qquad (25.4)$$

حيث: $\vec{p} = m\vec{v}$ شعاع كمية الحركة للنقطة المادية، و $\vec{v}$ سرعة هذه النقطة المادية بالنسبة لـ R. يقدر العزم الحركي ب (kgm^2s^{-1}).

العزم الحركي هو عبارة عن الجداء الشعاعي لشعاع الموضع وشعاع كمية الحركة، وبالتالي فهو شعاع عمودي على كل من شعاع الموضع وشعاع السرعة، فهو شعاع عمودي على مسار النقطة المادية M، الشكل(9.4).



الشكل(9.4): العزم الحركي بالنسبة لـ O للنقطة المادية M أثناء حركتها حول O.

❖ **عزم مقدار شعاعي:**

ان العزم بالنسبة لـ O لمقدار شعاعي $\vec{X}$ مرتبط بالنقطة M هو:

$$\vec{M}_0(\vec{X}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{X} \qquad (26.4)$$

❖ **عزم قوة:**

لتكن M نقطة مادية كتلتها m، تتحرك في جملة غاليلية R مبدؤها O. ولتكن $\vec{F}$ قوة مؤثرة في M. نعرف عزم القوة $\vec{F}$ بالسبة للنقطة O بالمقدار الشعاعي التالي:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \qquad (27.4)$$

في جملة الوحدات الدولية يقدر عزم قوة بـ: $(N.m)$.

ملاحظة: كل قوة يمر حاملها من O يكون عزمها بالنسبة لـ O معدوما.

نظرية العزم الحركي:

في جملة غاليلية R يمكن ان تطبق نظرية العزم الحركي:

$$(28.4)\qquad \frac{d\vec{L}_0}{dt}=\frac{d(\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v})}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge m\vec{v}+\overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$=\vec{v}\wedge m\vec{v}+\overrightarrow{OM}\wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{a}$$

حيث: $\vec{a}$ يمثل تسارع M.

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$(29.4)\qquad \frac{d\vec{L}_0}{dt}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{a}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$$

نحصل بذلك على علاقة نظرية العزم الحركي وهي:

$$(30.4)\qquad \frac{d\vec{L}_0}{dt}=\sum\vec{M}_0(\vec{F})$$

ان مشتق (بالنسبة للزمن) العزم الحركي لنقطة مادية M بالنسبة لنقطة ثابته O في مرجع غاليلي R يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على النقطة M بالنسبة لنفس النقطة O.

هذه النظرية صحيحة أيضا في جملة غير غاليلية بشرط أن نأخذ بالحسبان عزوم قوى العطالة ($\vec{F}_e$ و $\vec{F}_c$) بالإضافة الى عزوم القوى الطبيعية $(\vec{F})$.

تطبيق.1: النواس البسيط:

يتكون النواس البسط من جسم صغير M (نعتبره نقطة مادية) كتلته m كثافته جد عالية، معلق بطرف خيط طوله l مهمل الكتلة وغير قابل للامتطاط وقد ثبت الطرف الآخر للخيط بنقطة ثابته O (أبعاد الجسم جد صغيرة أما طول الخيط).

والمطلوب هو:

1-تحديد وضع توازن الجملة.

2-نزيح النواس عن وضع توازنه ثم نحرره بدون سرعة ابتدائية، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك نظرية العزم الحركي.

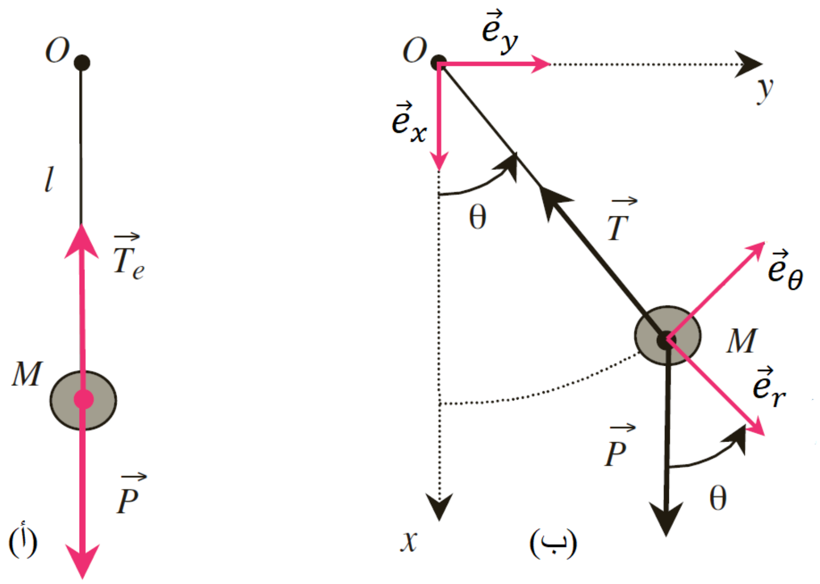
الحل:

الجملة المعتبرة هي النقطة المادية M ذات الكتلة m.

المرجع هو المرجع الأرضي الغاليلي أين تكون النقطة O ثابتة.

إحصاء جميع القوى المؤثرة على M:

-الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$ (قوة بعدية) وقوة تلامسيه وهي قوة توتر الخيط $\vec{T}$، الشكل (10.4) نهمل جميع قوى الاحتكاك.



الشكل (10.4): القوى المؤثرة على M (أ) وضع التوازن (ب) وضع حركة (كيفي).

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على الجملة نجد:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad (31.4)$$

$\vec{a}$ تسارع الجملة.

- وضع توازن الجملة الشكل (10.4) (أ) : $\vec{a} = \vec{0}$ ومنه :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{T} = -\vec{P} = -m\vec{g}$$

توتر الخيط معاكس مباشرة لقوة الثقل، ومنه فالخيط يأخذ الوضع الشاقولي عند التوازن.

- في حالة الحركة الشكل (10.4) (ب):العلاقة (31.4) التي تمثل المبدأ الأساسي للتحريك هي علاقة شعاعية ،نختار جملة لنسقط عليها هذه المعادلة. مسار الجسم هو عبارة عن جزء من دائرة مركزها O ونصف قطرها ($l=r$). الاحداثيات القطبية هي الأنسب في هذه الحالة، حيث الأساس هو ($\vec{e}_r , \vec{e}_\theta$). شعاع التسارع في هذا الأساس يكتب كالتالي (32.2):

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

بماأن (r=ثابت) فان شعاع التسارع يكتب:

$$\vec{a} = \left(-l\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(l\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

ومنه نكتب:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m(-l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

بإسقاط كل من الثقل وتوتر الخيط على الأساس $(\vec{e}_r , \vec{e}_\theta)$.

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = mgcos\theta\vec{e}_r - mgsin\theta\vec{e}_\theta$$

ومنه نحصل على معادلتين:

$$(32.4) \quad mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

$$(33.4) \quad -mgsin\theta = ml\ddot{\theta}$$

المعادلة الأخيرة يمكن أن تكتب بالشكل:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية غير خطية بسبب وجود الحد (sin)، ليس من السهل حل المعادلة بهذا الشكل، الا في ظل شروط معينة حيث يمكن تقريب المعادلة بمعادلة خطية.

يتم استيفاء هذا الشرط في الحالة التي تكون فيها الزاوية (θ) صغيرة بالحد الذي يكون عندها بإمكاننا تقريب جيب الزاوية الى الزاوية، في هذه الحالة تصبح المعادلة التفاضلية بالشكل:

$$(34.4) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة. نضع: $w^2 = g / l$ ونكتب عندها:

$$(35.4) \quad \ddot{\theta} + w^2\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة تقبل حلا من الشكل:

$$\theta = \theta_m \sin(wt + \varphi)$$

يهتز الجسم على جانبي وضع التوازن بحركة جيبيه دورانية بسعة زاوية عظمى (θ_m)، وهي مقدار الازاحة الابتدائية. دور النواس البسيط الذي يقوم باهتزازات حرة غير متخامدة وذات سعة صغيرة يعطى بالعلاقة:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية السابقة مباشرة من خلال نظرية العزم الحركي بالنسبة لـ O:

عزم توتر الخيط $\vec{T}$ بالنسبة لـ O هو: $\vec{M}_0(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = l\vec{e}_r \wedge (-T\vec{e}_r) = \vec{0}$

في حين أن عزم قوة الثقل بالنسبة لـ O:

$$\vec{M}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge (mgcos\theta\vec{e}_r - mgsin\theta\vec{e}_\theta) = -mglsin\theta(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = -mglsin\theta\vec{e}_z$$

نلاحظ ان العزم الحركي للجسم بالنسبة لـ O يعطي بالعبارة:

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e}_r \wedge \left(ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = ml^2\dot{\theta}(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

نستنتج من ذلك ان:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

نحصل أخيرا بتطبيق نظرية العزم الحركي على ما يلي:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = \sum \vec{M}_0(\vec{F}) = -mglsin\theta\vec{e}_z$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

وبنفس الخطوات السابقة نحصل على المعادلة النهائية:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

يمكن الحصول على عبارة توتر الخيط بدلالة الزاوية (θ) من العلاقة (32.4) وهي كالتالي:

$$T = m(gcos\theta - l\dot{\theta}^2)$$

الفصل الخامس

العمل والطاقة

لتحريك جسم من مكان الى اخر يحب تطبيق قوة ما، فتتغير سرعته من الصفر الى قيمة محسوسة، فنقول في هذه الحالة ان القوة المطبقة قد بذلت عمل خلال انتقال الجسم وان الجسم اكتسب هذا العمل طاقة حركية.

نعرف في هذا الفصل عمل قوة ما ونظرية الطاقة الحركية، كما نعرف نوعا خاصا من القوى وهي القوى المحافظة، وكذا الطاقة الكامنة.

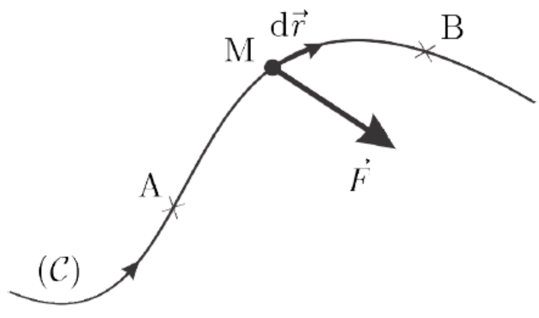
5-1-عمل قوة:

إذا اثرت قوة $\vec{F}$ على جسم فنقلته من نقطة A الى أخرى B فنقول ان القوة قد قامت بعمل.

نعرف العمل العنصري (الموافق لانتقال صغير) ونرمز له بالرمز δW للقوة $\vec{F}$ أثناء انتقال النقطة M انتقالا عنصريا $d\vec{r}$ بالعلاقة التالية:

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} \qquad (1.5)$$

وحدة العمل في جملة الوحدات الدولية هي الجول (*Joule*)، والذي يساوي النيوتن متر (*1Nm=1J*).



الشكل (1.5) يمثل القوة $\vec{F}$ والانتقال العنصري $d\vec{r}$.

إذا انتقلت النقطة المادية على المسار (C) من النقطة A الى النقطة B فان عمل هذه القوة $\vec{F}$ أثناء هذا الانتقال هو مجموع الانتقالات العنصرية بين النقطتين، نقطة الانطلاق A ونقطة الوصول B. هذا المجموع يشمل عدد لا نهائي من الحدود لانتقالات عنصرية والذي يوافق التكامل بين النقطتين A وB ونكتب عبارة العمل الكلي بالشكل التالي:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \qquad (2.5)$$

نلاحظ أنه في الحالة العامة يتعلق العمل المنجز من القوة $\vec{F}$ لانتقال النقطة M من A الى B بالمسار المتبع، بعض القوى لا يتعلق عملها بالمسار المتبع، تسمى بالقوى المحافظة.

ملاحظات: ان العمل عبارة عن مقدار سلمي وبالتالي فقد يكون موجب أو سالب أو معدوم.

- عندما تكون القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار في كل لحظة، فان $\vec{F}.d\vec{r} = 0$ أي ان عمل هذه القوة معدوم.

- اذا كان عمل القوة $\vec{F}$ موجب أي أن: $W_{AB}(\vec{F}) > 0$ ، فإننا ندعوه عمل محرك، تعمل القوة في هذه الحالة على زيادة سرعة النقطة M.

- اذا كان عمل القوة $\vec{F}$ سالب أي أن : $W_{AB}(\vec{F}) < 0$، فإننا ندعوه عمل مقاوم، تعمل القوة في هذه الحالة على تقليل سرعة النقطة M.

- إذا كانت F_x, F_y, F_z المركبات الديكارتية لشعاع القوة $\vec{F}$ و dx, dy, dz هي المركبات الديكارتية لشعاع الانتقال العنصري $d\vec{r}$ فتكون عبارة العمل كالتالي:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (3.5)$$

5.2.عمل قوة ثابتة على مسار كيفي:

تعريف القوة الثابتة: نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها ثابته إذا كانت:

- ثابتة في القيمة (الشدة).

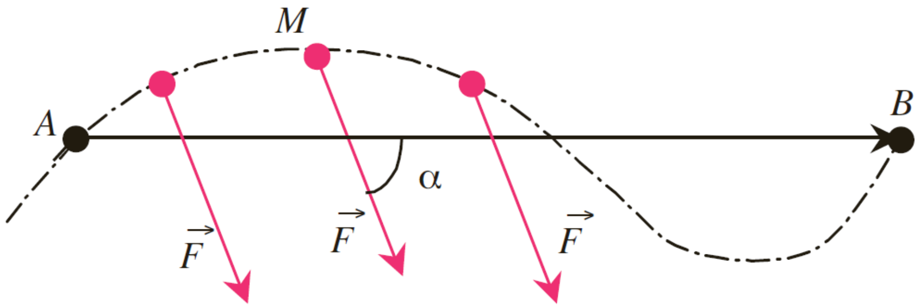
- ثابتة في الاتجاه.

إن عمل قوة ثابتة $\vec{F}$ عندما تنتقل نقطة تأثيرها من A الىB يمكن ان يكتب بالشكل التالي:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}\int_A^B d\vec{r} \qquad (4.5)$$

ان مجموع الاشعة العنصرية $d\vec{r}$ المتتالية انطلاقا من النقطة A وصولا الى النقطة B باستعمال علاقة شال يعطي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أي: $\int_A^B d\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ ، ومنه يكون العمل:

$$(5.5) \qquad W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.cos\alpha$$



الشكل (2.5) يمثل القوة الثابتة $\vec{F}$ والانتقالات العنصرية $d\vec{r}$.

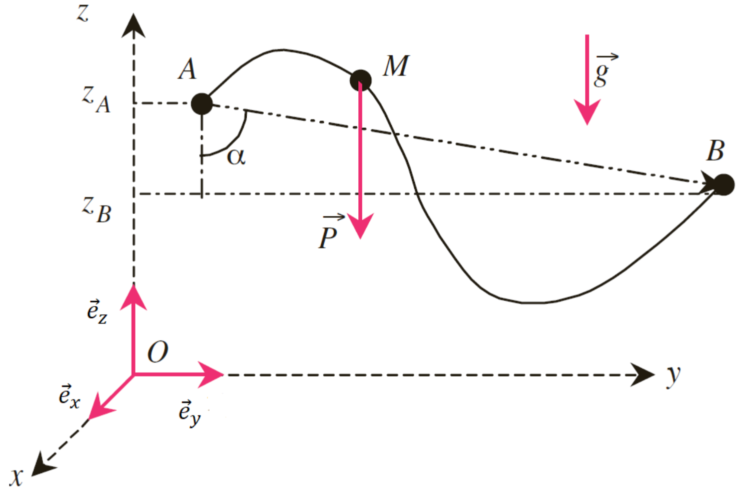
عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع، أي أن العمل له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيم أو منحني، بل يتعلق فقط بالمسافة المباشرة AB والزاوية (α) المحصورة بين شعاعي القوة $\vec{F}$ والانتقال الكلي $\overrightarrow{AB}$.

ملاحظة: في الحركة الدائرية يكون عمل القوة الناظمية معدوما.

5.3.عمل قوة الثقل:

قوة ثقل جسم والتي تمثل قوة جذب الأرض لهذا الجسم، يمكن اعتبارها قوة ثابتة في منطقة محدودة في الفضاء، نجد هذه القوة في كل مرة ندرس جملة ميكانيكية على الأرض، ولهذا فمن الضروري معرفة طريقة حساب عمل هذه القوة.

نفترض نقطة مادية M كتلتها m تنتقل من النقطة A الى النقطة B، نريد إيجاد عبارة عمل قوة الثقل من أجل هذا الانتقال الشكل (3.5). نعتبر ان الانتقال يتم وفق مسارات كيفية مختلفة.



الشكل (3.5): يمثل عمل قوة الثقل أثناء الانتقال منA الى B.

بما أن قوة الثقل قوة ثابتة، وبحسب العلاقة (5.5) فنستطيع ان نكتب:

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} \qquad (6.5)$$

الجداء السلمي يمكن حسابه بطريقتين:

- باستعمال جيب تمام الزاوية (α) كالتالي:

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = mg.AB.cos\alpha \qquad (7.5)$$

- باستعمال مركبات الشعاعين $\vec{P}$ و $\overrightarrow{AB}$ كالتالي:

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A) \qquad (8.5)$$

وهي نفس العبارة السابقة لأن:

$$AB.cos\alpha = (z_A - z_B)$$

وعلى هذا نستطيع أن نكتب عمل قوة الثقل بين النقطتين A و B :

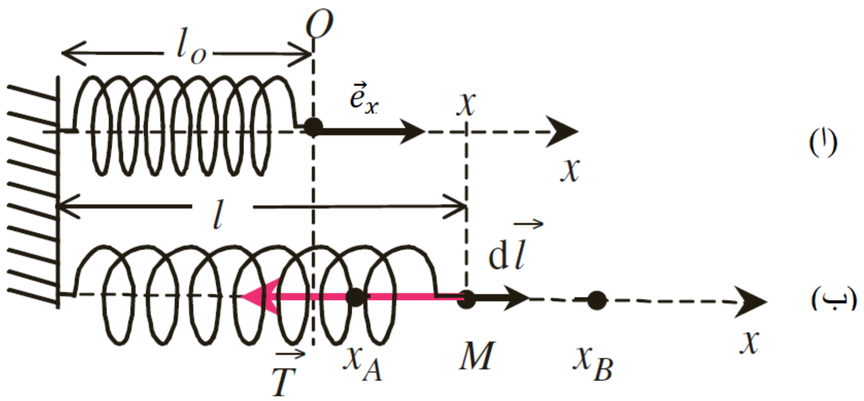
$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) \qquad (9.5)$$

ومنه فان عمل قوة الثقل يتعلق فقط بالنقطتين A و B ، أي لا يتعلق هذا العمل بالطريق التي تسلكها النقطة M أثناء انتقالها من A الى B، بل يتعلق بفرق الارتفاع بينهما فقط. (وهي قوة محافظة).

- عندما ينتقل الجسم من أسفل الى أعلى، فان $(z_B > z_A)$ ويكون عمل الثقل سالبا، أي أنه عمل مقاوم.
- عندما ينتقل الجسم من أعلى الى أسفل، فان $(z_B < z_A)$ ويكون عمل الثقل موجبا، أي أنه عمل محرك.

5.4.عمل قوة غير ثابتة: عمل قوة توتر نابض:

نابض مرن مهمل الكتلة، ثابت مرونته k، طوله وهو فارغ (حالة الراحة) l_0، تثبت احدى نهايتيه وتثبت في النهاية الأخرى كتلة m، الكتلة والنابض يوضعان فوق مستوي افقي الشكل (4.5)، في هذا الشكل: (أ) يمثل طول النابض وهو فارغ أي في وضع طوله الأصلي، أما الشكل (ب) النابض في طوله الجديد، وكذا الانتقال العنصري $\overrightarrow{dl}$.



الشكل (4.5): قوة التوتر في نابض.

بالاصطلاحات المعبر عنها بالشكل (4.5) نكتب:

$$\vec{T} = -K(l - l_0)\vec{e}_x = -K\Delta l\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x \qquad (10.5)$$

نعتبر إزاحة عنصرية $d\vec{l} = dx\vec{e}_x$ للنهاية M للنابض، فنكتب عندها عبارة العمل العنصري كالتالي:

$$\delta W = \vec{T}.d\vec{l} = -kx\vec{e}_x.dx\vec{e}_x = -kxdx \qquad (11.5)$$

عمل قوة توتر النابض عندما تنتقل النقطة M (نهاية النابض) من الوضع x_A الى الوضع x_B يعطى بالعبارة التالية:

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A^B -kxdx = -k\int_A^B xdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} \qquad (12.5)$$
$$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

نلاحظ ان عمل قوة توتر النابض لا يتعلق بالطريق المتبع بل يتعلق فقط بالوضعين الابتدائي والنهائي.

5.5. الاستطاعة:

ان تعريف عمل قوة ما لا يعطي أي أهمية لمرور الوقت، فعندما تقوم بعمل ما سواء في ثانية واحدة او ساعة كاملة فالأمر سيان. نحتاج غالبا الى معرفة سرعة الإنجاز لعمل ما، ولأجل

ذلك ادخل مفهوم الاستطاعة. وتعرف الاستطاعة على انها نسبة العمل المنجز على الزمن اللازم لإنجازه، وهي مقدار سلمي.

1.5.5. الاستطاعة المتوسطة:

اذا كان W هو العمل المنجز خلال الزمن Δt ، فالاستطاعة المتوسطة لهذه القوة والتي يرمز لها بالرمز P_m يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} \qquad (13.5)$$

في جملة الوحدات الدولية يعبر عن الاستطاعة بوحدة الواط $(watt)$ ورمزه (W)، الذي يوافق عملا مقداره 1جول أنجز خلال 1 ثانية.

2.5.5. الاستطاعة اللحظية او الآنية:

ليكن δW العمل المنجز من قبل القوة $\vec{F}$ خلال الفترة الزمنية العنصرية dt. استطاعة هذه القوة عند اللحظة t توافق الاستطاعة اللحظية وتكتب بالشكل:

$$P(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \qquad (14.5)$$

وهي عبارة الاستطاعة اللحظية للقوة $\vec{F}$.

6.5. الطاقة في الميكانيك:

سيتم هنا العرض لنوعين من الطاقة: الطاقة الحركية (Ec) المرتبطة بحركة المتحرك والطاقة الكامنة (Ep) المرتبطة بموقعه. ثم يتم تعريف الطاقة الميكانيكية (E) على انها مجموع الطاقتين الحركية والكامنة.

1.6.5. الطاقة الحركية: الطاقة المرتبطة بالحركة.

لنفترض M نقطة مادية كتلتها m، تتحرك في جملة عطالية R، بتأثير عدة قوى محصلتها $\vec{F}$. ولنحسب العمل العنصري لهذه القوة:

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r}$$

بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك، نجد:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:

$$\delta W = m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}dt = m\vec{v}d\vec{v}$$

لدينا: $v^2 = \vec{v}.\vec{v}$ باشتقاق العبارة الأخيرة بالنسبة للزمن تحصل على:

$$2vdv = 2\vec{v}d\vec{v} \Longrightarrow vdv = \vec{v}d\vec{v}$$

ومنه يمكن ان نكتب:

$$\delta W = m\vec{v}d\vec{v} = mvdv = md\left(\frac{1}{2}v^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

نعرف الطاقة الحركية للنقطة المادية M التي كتلتها m وتنتقل بالسرعة $\vec{v}$ في مرجع غاليلي بالعبارة التالية:

$$(15.5) \qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

نظرية الطاقة الحركية:

لدينا: $\delta W = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = d(E_c)$

عمل القوة $\vec{F}$ عند تقل النقطة المادية M من الموضع A الى الموضع B، يعطى بالعبارة:

$$(16.5) \qquad W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B d(E_c) = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

ومنه تكتب نظرية الطاقة الحركية كالتالي:

$$(17.5) \qquad W_{AB}(\vec{F}) = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

نص نظرية الطاقة الحركية:

ان عمل محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية في جملة غاليلية عند انتقالها من الموضع A الى الموضع B يساوي تغير الطاقة الحركية بين هذين الموضعين.

2.6.5. الطاقة الكامنة: الطاقة المرتبطة بالموضع.

الطاقة الكامنة هي شكل من أشكال الطاقة، متعلقة بموضع الجملة. بتغيير الموضع، يمكن لهذه الطاقة أن تزيد (الجملة تخزن طاقة) أو تنقص (الجملة تعيد الطاقة إلى الخارج).

كما هو الحال بالنسبة للطاقة الحركية المعرفة بتغيرها المتعلق بعمل جميع القوى، فان الطاقة الكامنة تعرف بعمل صنف معين من القوى: وهي تلك التي لا يتعلق عملها بالمسار المتبع، وتسمى القوى المحافظة.

القوى المحافظة:

هي القوى التي لا يتعلق عملها بالمسار المتبع اثناء الانتقال، بل يتعلق فقط بالوضعين الابتدائي (نقطة الانطلاق) والنهائي (نقطة الوصول).

يمكن ان نذكر منها التي صادفتنا في بداية هذا الفصل:

- عمل قوة الثقل.
- عمل قوة توتر نابض.
- عمل قوة ثابته (شدة واتجاها).

القوى غير المحافظة:

هي القوى التي يتعلق عملها بالمسار المتبع. بصفة عامة القوى التي تتعلق بالزمن او تلك التي تعتمد على شعاع السرعة لا تكون محافظة. ومن الأمثلة على القوى غير المحافظة قوى الاحتكاك عمل هذه القوى دوما مقاومًا $(W < 0)$ (تبدد الطاقة). خذ حالة قوة الاحتكاك بين الاجسام الصلبة، هذه القوة تعاكس باستمرار الحركة وشدتها ثابتة، ويكون اتجاهها بعكس اتجاه الازاحة.

حساب عمل قوة الاحتكاك الصلبة يعطي:

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = -F.dr \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F}) = -\int_A^B F.dr = -F\int_A^B dr$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = -F\int_A^B dr = -F.R_{AB}$$

الطول R_{AB} هو المسافة المقطوعة بالفعل بين A و B. هذه المسافة تعتمد بوضوح على المسار المتبع، وهذا ما عرفناه سابقا على ان القوة غير المحافظة يتعلق عملها بالمسار المتبع كذلك الامر بالنسبة للاحتكاك في الموائع، عندما يتحرك جسم مادي في مائع فان جزيئات هذا المائع تصطدم بسطح هذا الجسم فينتج عن ذلك قوة ممانعة للحركة. لا يوجد قانون بسيط يعبر عن هذه القوة. بل توجد قوانين تجريبية صالحة ضمن شروط محدد، تتعلق هذه الشروط بحركة الجسم ضمن المائع، أي بحركة المائع حول هذا الجسم، قوة الاحتكاك في هذه الحالة تعاكس السرعة التي تتعلق بها ومستقلة عن الموضع. القوة تتناسب مع السرعة في حالة السرعات الصغيرة، ومع مربع السرعة في حالة السرعات الكبيرة.

يمكن لجسيمة ان تكون خاضعة لتأثير قوى محافظة وقوى غير محافظة في آن واحد.

تعريف الطاقة الكامنة:

ان العمل $W_{AB}(\vec{F})$ لقوة محافظة $\vec{F}$ لا يتعلق بالمسار المتبع أثناء الانتقال، ولكن يتعلق فقط بالحالة الابتدائية (الحالة A) والحالة النهائية (الحالة B). هذا العمل يمكن أن يعبر عنه بدالة حالة سلمية E_p (دالة لا تتعلق الا بحالة الجملة)، تسمى الطاقة الكامنة.

بالتعريف: من أجل قوة محافظة $\vec{F}$ يوجد دالة حالة (طاقة كامنة)E_p بحيث:

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \qquad (18.5)$$

ان التغير في الطاقة الكامنة بين النقطتين A و B يساوي عكس عمل القوة المحافظة المطبقة بين النقطتين المعتبرتين A و B. بعبارة أخرى نقول إن عمل القوة المحافظة يساوي تناقص الطاقة الكامنة.

نلاحظ من العلاقة (18.5) ان التغير في الطاقة الكامنة $[E_p(A) - E_p(B)]$ بين الموضعين A و B يتوافق تماما مع العمل من A الى B (بالنسبة للمواضع تأخذ بنفس الترتيب) للقوة المحافظة المرتبطة بهذه الطاقة.

الجدير بالملاحظة ان القوى $\vec{F}$ التي تتدرج من الطاقة الكامنة تسمى قوى محافظة. لان عملها يتحول الى طاقة كمون الجسم، وبالتالي يمكن ان نكتب:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F} = 0 \qquad (19.5)$$

ان العلاقة: $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$ هي علاقة اختبار القوى المحافظة.

أو بعبارة أخرى: يكفي أن نتحقق من المعادلات التالية لنثبت أن القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad (20.5)$$

من العلاقة (19.5) نحصل على:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z \qquad (21.5)$$

في جملة الاحداثيات الديكارتية لدينا:

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

ومنه:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\ , F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كانت الطاقة الكامنة تتعلق بمتغير واحد فقط، مثلا المتغير الوحيد هو(x) فنكتب:

$$(22.5) \qquad \vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e}_x$$

القوة في هذه الحالة تكون في الاتجاه المتناقص للطاقات الكامنة.

الطاقة الكامنة الثقالية:

لايجاد الطاقة الكامنة الثقاليةE_{pp} الموافقة لقوة الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$ لدينا:

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}E_p \Longrightarrow \vec{P} = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_{pp}}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\vec{e}_z$$

في جملة الاحداثيات الديكارتية $Oxyz$ ، حيث المحورz شاقولي وموجه نحو الأعلى نحصل على العلاقة التالية لقوة الثقل:

$$\vec{P} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + (-mg)\vec{e}_z$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$P_x = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial x} = 0, P_y = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial y} = 0, P_z = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial z} = -mg$$

بما أن المشتقات الجزئية للطاقة الكامنة الثقالية بالنسبة لكل من x و y معدومة، وهذا يعني أنها مستقلة عن كل من x و y وأنها تابع للمتغيرz فقط. ومنه يمكن ان نكتب في هذه الحالة:

$$(23.5) \quad P_z = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial z} = -mg \Longrightarrow \frac{dE_{pp}}{dz} = mg \Longrightarrow E_{pp} = mgz + C$$

حيث C ثابت يتعلق بالمرجع المختار للطاقة الكامنة الثقالية. غالبا ما نختار مرجع الطاقة الكامنة عند $z=0$، أي اننا نعتبر أن: $E_{pp}(z = 0) = 0$، وفي هذه الحالة يكون لدينا: $C=0$.

وبالتالي تصبح عبارة الطاقة الكامنة الثقالية بالشكل:

$$E_{pp} = mgz \qquad (24.5)$$

وهي عبارة الطاقة الكامنة الثقالية حيث المحور z موجه نحو الأعلى.

ومن جهة أخرى لدينا حسب العلاقة (18.5):

$$W_{AB}(\vec{P}) = -\Delta E_{pp} = E_{pp}(A) - E_{pp}(B) = mg(z_A - z_B)$$

الطاقة الكامنة الثقالية تتناقص أثناء الهبوط، ويكون عمل قوة الثقل موجبا (عمل محرك)، كما أن الطاقة الكامنة الثقالية تتزايد أثناء الصعود، ويكون عمل قوة الثقل سالبا (عمل مقاوم).

الطاقة الكامنة المرونية:

ليكن لدينا جسما نقطيا يتحرك بحركة مستقيمة على المحورOx، بفعل نابض ثابت مرونته k وكما رأينا فان النابض يطبق على الجسم قوة ارجاع تعمل على إعادة النابض الى طوله الأصلي (لا انضغاط ولا استطالة)، تعطى هذه القوة كما رأينا سابقا (10.5) بالعلاقة التالية:

$$\vec{T} = -kx\vec{e}_x$$

x: تمثل استطالة النابض. نبحث عن عبارة الطاقة الكامنة المرونيةE_{pe}، وذلك باستعمال العلاقة (19.5) والتي تكتب بالنسبة للطاقة الكامنة المرونية كالتالي:

$$\vec{T} = -\overrightarrow{grad}E_{pe}$$

في جملة الاحداثيات الديكارتية $Oxyz$، يكون لدينا:

$$(25.5)\quad T_x = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial x} = -kx, T_y = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial y} = 0, T_z = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial z} = 0$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان الطاقة الكامنة المرونيةE_{pe} تتعلق فقط بالمتغير(x)، ونكتب:

$$(26.5)\qquad \frac{dE_{pe}}{dx} = kx \Longrightarrow E_{pe} = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

حيث C ثابت يتعلق بالمرجع المختار للطاقة الكامنة المرونية. غالبا ما نختار مرجع الطاقة الكامنة عند $x=0$، أي اننا نعتبر أن: $E_{pe}(x = 0) = 0$، وفي هذه الحالة يكون لدينا: $C=0$.

وبالتالي تصبح عبارة الطاقة الكامنة المرونية بالشكل:

$$(27.5) \qquad E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

3.6.5. الطاقة الميكانيكية:

لتكن نقطة مادية M كتلتها m تخضع لتأثير قوى خارجية محصلتها $\vec{F}$. يمكن تقسيم هذه القوى إلى قوى محافظة محصلتها $\vec{F_c}$ وقوى غير محافظة محصلتها$\vec{F}_{nc}$. نعتبر انتقالا للنقطة المادية M من الوضع A الى الوضع B. ان العمل الكلي لكل القوى لأجل هذا الانتقال يرتبط بالتغير في الطاقة الحركية بواسطة نظرية الطاقة الحركية العلاقة (16.5):

$$(28.5) \quad W_{AB}(\vec{F}) = \Delta E_c \Longrightarrow W_{AB}(\vec{F_c}) + W_{AB}(\vec{F}_{nc}) = E_c(B) - E_c(A)$$

يمكن التعبير عن عمل القوى المحافظة بدلالة الطاقة الكامنة التي تشتق منها. ليكن Ep الطاقة الكامنة الكلية، أي مجموع الطاقات الكامنة التي تشتق منها كل قوة محافظة، يمكننا كتابة بحسب العلاقة (18.5):

$$W_{AB}(\vec{F_c}) = E_p(A) - E_p(B)$$

بالتعويض في المعادلة (28.5) نجد:

$$(29.5) \quad E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F}_{nc}) + [E_p(A) - E_p(B)]$$

$$(30.5) \quad [E_c(B) - E_c(A)] + [E_p(B) - E_p(A)] = W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

$$(31.5) \quad [E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

الكمية $[E_c(A) + E_p(A)]$ هي مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنقطة M عندما تكون في النقطة A من مساره. فنسميها الطاقة الكلية للجسم أو الطاقة الميكانيكية عند النقطة A من مساره، ويرمز لها بالرمز$E_m(A)$، بالمثل الطاقة الكلية للجسم أو الطاقة الميكانيكية عند النقطة B من مساره هي $E_m(B)$ ونكتب:

$$(32.5) \qquad E_m(A) = [E_c(A) + E_p(A)]$$

$$(33.5) \qquad E_m(B) = [E_c(B) + E_p(B)]$$

وبناء عليه فان العلاقة (32.5) يمكن ان تكتب بالشكل التالي:

$$(34.5) \quad E_m(B) - E_m(A) = \Delta E_m = W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

نظرية الطاقة الميكانيكية:

من العلاقة (34.5) نستنتج ان التغير في الطاقة الميكانيكية لنقطة مادية بين موضعين يساوي مجموع اعمال القوى غير المحافظة فقط بين هذين الموضعين.

وعندما يكون عمل القوى غير المحافظة معدوما نجد:

$$(35.5) \quad W_{AB}\left(\vec{F}_{nc}\right) = 0 \implies \Delta E_m = 0 \implies E_m(B) = E_m(A) = C^{te}$$

فنقول ان الطاقة الميكانيكية محفوظة (مصونة) عندما يكون عمل القوى غير المحافظة معدوما أو إذا لم يكن ضمن القوى التي يتلقاها الجسم من غيره قوى غير محافظة او انها موجودة لكنها مهملة. .

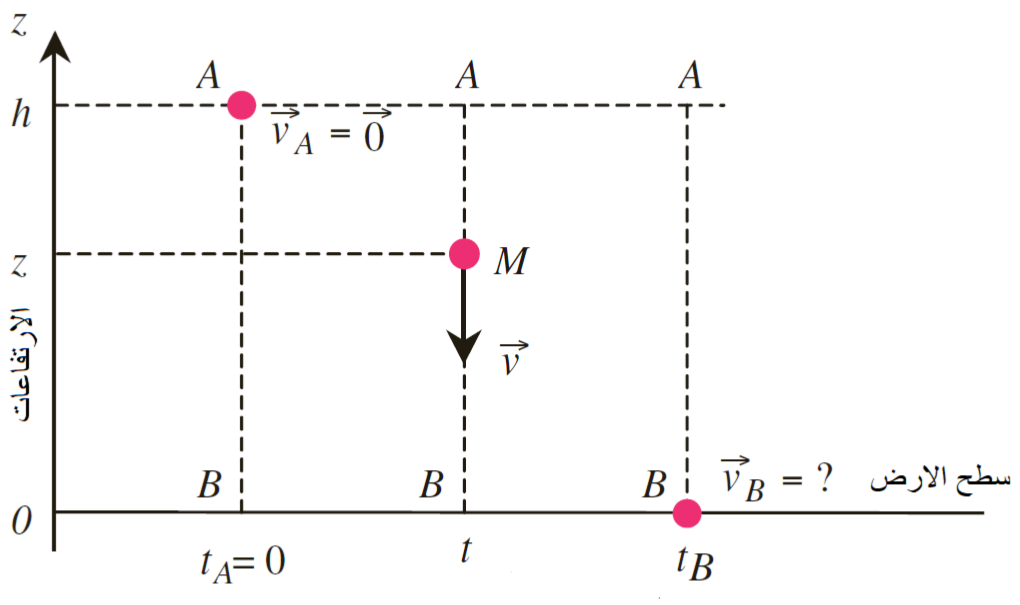
تطبيق: السقوط الحر:

نعتبر كرية M كتلتها m تقع في نقطة A على ارتفاع $Z_A=h$ من سطح الارض، من هذا الارتفاع نتركها تسقط بدون سرعة ابتدائية. أوجد سرعة هذه الكرية لحظة اصطدامها بالأرض؟ أوجد سرعتها اللحظية بدلالة ارتفاعها؟

الحل:

- الجملة: الكرية M ذات الكتلة m.
- المرجع الأرضي الغاليلي: المرجع المختار. محور شاقولي ينطلق من النقطة B على الأرض حيث ارتفاعها ($Z_B=0$) ويكون متجه نحو الاعلى، الشكل (5.5).
- إحصاء القوى المؤثرة: فقط قوة الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$. نهمل قوى الاحتكاكات.

قوة الثقل هي قوة محافظة مشتقة من طاقة كامنة. يكون لدينا: $E_{pp}(A) = mgZ_A$
وطاقة كامنة معدومة على سطح الأرض: $E_{pp}(B) = E_{pp}(Z_B = 0) = 0$



الشكل (5.5): سقوط كرية وتتبعها على ارتفاعات مختلفة.

❖ الحساب باستعمال نظرية الطاقة الحركية:

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الموضعين A نقطة الانطلاق وB نقطة الوصول.

$$W_{AB}(\vec{P}) = E_c(B) - E_c(A)$$

- عمل الثقل: $$W_{AB}(\vec{P}) = mg(Z_A - Z_B) = mgh$$

نلاحظ ان عمل الثقل هو عمل موجب لأن القوة في نفس اتجاه الانتقال.

- تغير الطاقة الحركية (الطاقة الحركية النهائية - الطاقة الحركية الابتدائية):

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

- نظرية الطاقة الحركية تعطي:

$$W_{AB}(\vec{P}) = E_c(B) - E_c(A) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh$$

لدينا: الكرية تنطلق من السكون ومنه: $v_A=0$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B^2 = 2gh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الموضعين A نقطة الانطلاق وM نقطة كيفية من المسار.

- عمل الثقل: $$W_{AB}(\vec{P}) = mg(Z_A - Z) = mg(h - Z)$$

- تغير الطاقة الحركية (الطاقة الحركية النهائية - الطاقة الحركية الابتدائية):

$$\Delta E_c = E_c(M) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

- نظرية الطاقة الحركية تعطي :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-Z) \Longrightarrow v = \sqrt{2g(h-Z)}$$

❖ الحساب باستعمال نظرية الطاقة الميكانيكية:

بما أن القوة المؤثرة الوحيدة هي قوة الثقل وهذا بإهمال قوى الاحتكاكات، وبالتالي فلا وجود لقوى غير محافظة، ومنه فالطاقة الميكانيكية محفوظة، لنحدد هذه الطاقة في أوضاع مختلفة:

➢ عند النقطة A:

$$E_m(A) = E_c(A) + E_{pp}(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgZ_A = mgh$$

➢ عند النقطة M:

$$E_m(M) = E_c(M) + E_{pp}(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgZ$$

➢ عند النقطة B:

$$E_m(B) = E_c(B) + E_{pp}(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgZ_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

من قانون انحفاظ الطاقة الميكانيكية نكتب:

$$E_m(A) = E_m(M) = E_m(B) \Longrightarrow \ mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgZ = \frac{1}{2}mv_B^2$$

نستنتج أن سرعة الكرية عند ارتطامها بالأرض تعطى بالعلاقة:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \ \Longrightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

وسرعة الكرية عند وضع كيفي تعطى بالعلاقة:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgZ \Longrightarrow v = \sqrt{2g(h-Z)}$$

نفس النتائج نتحصل عليها باستعمال نظرية الطاقة الحركية او انحفاظ الطاقة الميكانيكية.

ملاحظة: نلاحظ عند نقطة الانطلاق لدينا فقط طاقة كامنة ومع سقوط الجسم تتناقص الطاقة الكامنة وبنفس قيمة تناقصها تتزايد الطاقة الحركية، وعند الوصول الى الأرض تتحول كل الطاقة الكامنة الى طاقة حركية. إذا ما تفقده الجملة على شكل طاقة كامنة تكتسبه على شكل طاقة حركية والمجموع يبقى ثابتا. وفي حالة صعود الجسم الى اعلى فان الطاقة الحركية تتناقص الى ان تنعدم عند اعلى ارتفاع متحولة الى طاقة كامنة ثقالية والمجموع يبقى ثابتا.

كتلة ملتحمة بنهاية نابض افقي:

عندما تكون جملة محفوظة، فان طاقتها الميكانيكية محفوظة. لذلك لدينا لمثل هذه الجمل:

$$E_m = E_c + E_p = C^{te}$$

بالتعريف الطاقة الحركية هي مقدار موجب، وبالتالي نحصل على شرط تقييد حالات الطاقة المحتملة للجملة. أي أن الجملة في حالة مقيدة، يحدد شرط التقييد هذا ما يطلق عليه حالات القيد المنضمة للجملة المعرفة كالتالي:

$$(36.5) \qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2 > 0 \Longrightarrow E_m - E_p > 0$$

مثال: كتلة ملتحمة بنهاية نابض افقي حيث استطالته x، الشكل (4.5). الحالات المقيدة للجملة معرفة كالتالي:

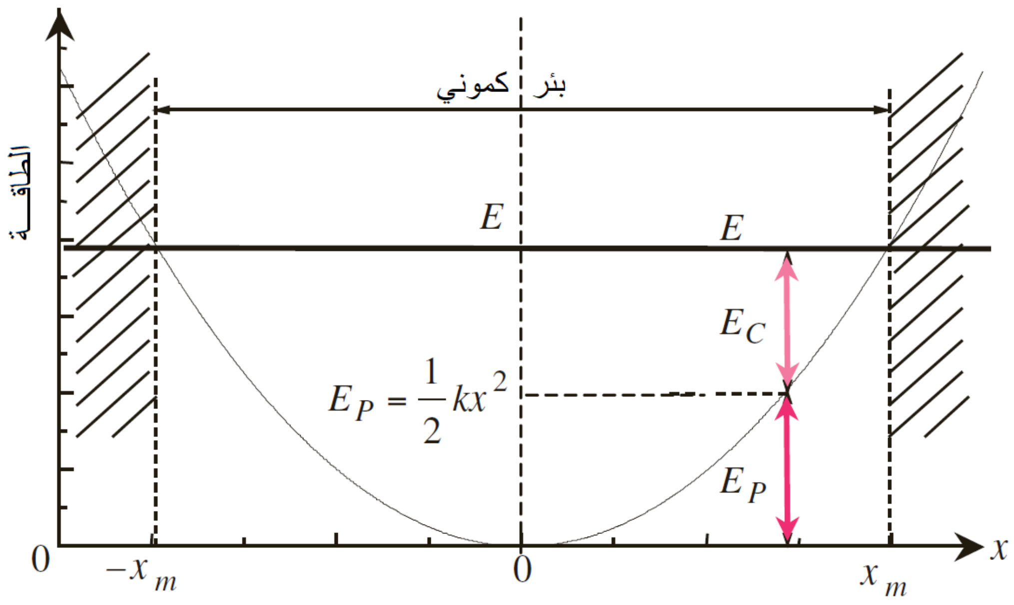
$$(37.5) \quad E_c = E_m - E_p > 0 \ , E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow E_m - \frac{1}{2}kx^2 > 0$$

من العلاقة (37.5)

$$E_m > \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow x^2 < \frac{2E_m}{k} \Longrightarrow -\sqrt{\frac{2E_m}{k}} = -x_m \leq x \leq \sqrt{\frac{2E_m}{k}} = x_m$$

لا يمكن للجملة الوصول إلى قيم x خارج هذا المجال، والذي نقول إنه محدد ببئر كموني وهذا بسبب الشكل الذي تأخذه دالة الطاقة الكامنة.

يبقى الجسم في حركة جيبية مستقيمة بين قيمتين حديتين (x_m) و $(-x_m)$ وهما توافقان طاقة فعلية (كامنة) مساوية للطاقة الميكانيكية. تبقى الطاقة الميكانيكية محفوظة، حيث ما تفقده الجملة على شكل طاقة كامنة تكتسبه على شكل طاقة حركية والعكس بالعكس. في الشكل (6.5) مخطط الطاقات بدلالة الاستطالة x للنابض.



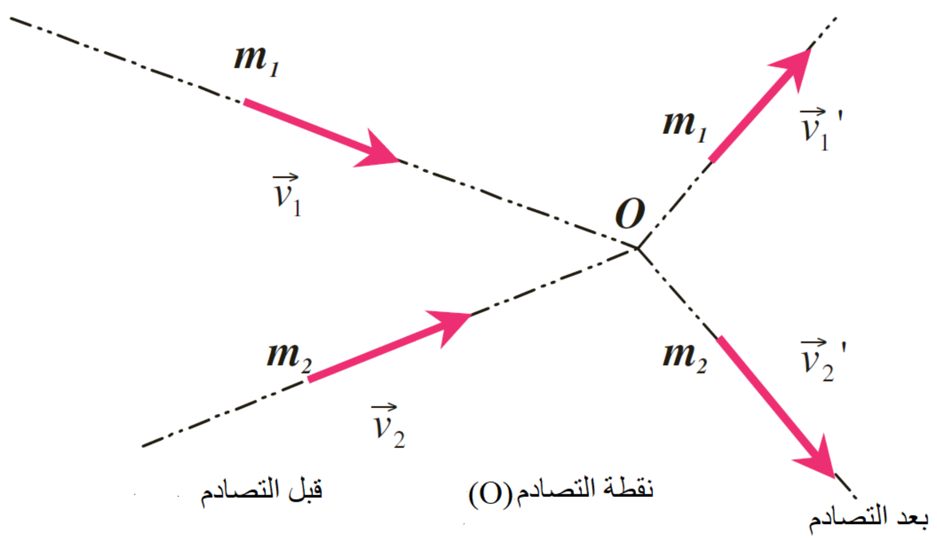
الشكل (6.5) مخطط الطاقات بدلالة الاستطالة x للنابض.

- عند $x_0 = 0$ وضع توازن مستقر، حيث اذا غادره الجسم تعمل قوة المرونة الى اعادته اليه، وتكون عندها الطاقة الكامنة المرونية اصغرية.
- عند الوضعين الحديين (x_m) و $(-x_m)$ ، هو وضع توازن غير مستقر، حيث بمجرد انعدام السرعة تعمل القوة المرونية على مغادرة هذا الموضع وتكون عندها الطاقة الكامنة المرونية اعظمية.

5-7- التصادمات بين الجسيمات:

في مرجع غاليلي، نعتبر جسيمتين ماديتين مستقلين كتلتاهما m_1 و m_2 . كل جسيمة على حدا تعتبر معزولة أو شبه معزولة ميكانيكيا، وبالتالي كل منهما تقوم بحركة مستقيمة منتظمة (حسب مبدأ العطالة). سرعتاهما على الترتيب $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$. إذا التقى الجسيمان، نقول حدث تصادم الشكل (7.5). بعد التصادم (مدة قصيرة جدًا) الجسيمات من جديد معزولة أو شبه معزولة ميكانيكيا، وبالتالي تكون الحركة مستقيمة منتظمة ولكن بسرعات جديدة $\vec{v}'_1$ و $\vec{v}'_2$ ماذا يمكن أن نقول عن هذه السرعات؟ لإعطاء إجابة يجب أن نبحث عن الكميات الفيزيائية التي يمكن ان تبقى محفوظة. نعتبر ان كل كتلة تبقى ثابته ولا تتغير بالتصادم.

- **خواص الصدم:** الكتلة m_1 معزولة ميكانيكيا قبل وبعد التصادم. لحظة التصادم تخضع الكتلة m_1 لتأثير الكتلة m_2 (فعل خارجي) وهذا يعني أنها لم تعد معزولة، نفس الشيء بالنسبة لـ m_2. إذا اعتبرنا الجملة مكونة من الكتلتين معا (m_1 و m_2)، هذه الجملة معزولة من البداية الى النهاية (قبل ولحظة وبعد التصادم)، التأثير المتبادل يعتبر قوى داخلية.



الشكل (7.5): تصادم جسيمتين ماديتين كتلتاهما m_1 و m_2 .

انحفاظ شعاع كمية الحركة الكلي:

الجملة $(m_1$ و $m_2)$، هي جملة معزولة، ومنه لدينا انحفاظ شعاع كمية الحركة الكلي للجملة، أي أن شعاع كمية الحركة هو نفسه قبل وبعد التصادم.

$$\vec{p}_{\text{قبل}} = \vec{p}_{\text{بعد}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \qquad (38.5)$$

أي أن:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \qquad (39.5)$$

التصادم المرن: انحفاظ الطاقة الحركية:

كل جسيمة قد تملك طاقة كامنة، كما هو معلوم فان هذه الطاقة لا تتعلق الا بالموضع الذي يحتله الجسيم المعتبر، الصدم يكون لحظي وبالتالي فان موضع الجسيم لا يتغير موضعه، ومنه طاقته الكامنة لا تتغير. إذا تغير الطاقة الميكانيكية تعود الى التغير في الطلقة الحركية.

التصادم المرن هو التصادم الذي تبقى فيه الطاقة الحركية محفوظة.

$$E_{c_{\text{قبل}}} = E_{c_{\text{بعد}}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \qquad (40.5)$$

ومنه:

$$m_1\vec{v}_1^2 + m_2\vec{v}_2^2 = m_1\vec{v}_1'^2 + m_2\vec{v}_2'^2 \qquad (41.5)$$

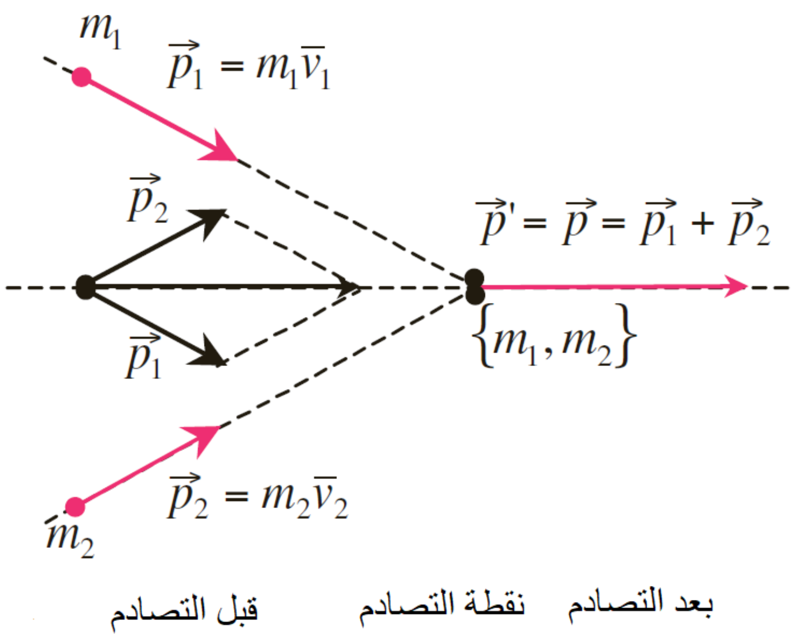
التصادم غير المرن (اللين): الطاقة الحركية غير محفوظة:

في التصادم غير المرن تتحد الجسيمتين المتصادمتين بعد التصادم لتكونا جملة واحدة فيصبح لهما نفس السرعة الشكل (8.5)، كذلك لا يوجد انحفاظ للطاقة الحركية، لان اثناء التصادم يحدث ضياع في الطاقة على شكل حرارة. إذا تتناقص الطاقة الحركية ويكون لدينا:

$$\frac{E_{c(\text{بعد})}}{E_{c(\text{قبل})}} = \varepsilon\,,\ \ 0 \leq\ \varepsilon < 1$$

- $\varepsilon = 1$: توافق حالة التصادم المرن.

- $\varepsilon = 0$: توافق حالة الارتطام الأمامي اللين بين جسيمتين قادمتين في اتجاهين متعاكسين بنفس قيمة كمية الحركة (تصادم بين مركبتين متماثلتين، تسيران بنفس السرعة في اتجاهين متعاكسين).



الشكل (8.5): التصادم غير المرن بين جسيمتين ماديتين

تطبيق-1-

تتحرك جسيمة كتلتها *6kg* بسرعة *15 m/s* لتصطدم عموديا مع جسيمة كتلتها *5kg* تتحرك بسرعة *20 m/s*. إذا كان الاصطدام لينا:

1) جد كمية حركة الجملة قبل التصادم؟

2) احسب سرعة الجسيمتين بعد التصادم؟

الإجابة: 1) كمية الحركة = *134.5 kgm/s* / 2) سرعة الجسيمتين = 12.23 *m/s*

تطبيق-2-

التصادم المرن لكتلتين m_1 و m_2 تتحركان على المحور *Ox*، باتجاهين متعاكسين سرعتاهما على الترتيب $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$، بعد التصادم تكون سرعتاهما $\vec{v}'_1$ و $\vec{v}'_2$ على الترتيب جد سرعة كل كتلة بعد التصادم $\vec{v}'_1$ و $\vec{v}'_2$ ؟ كيف تصبح هذه السرعات إذا كانت الكتلة m_2 ساكنة قبل التصادم ($\vec{v}_2 = \vec{0}$)؟

الحل:

إيجاد السرعات بعد التصادم.

من انحفاظ شعاع كمية الحركة:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \qquad (42.5)$$

يمكن أن نكتب:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) \qquad (43.5)$$

من انحفاظ الطاقة الحركية:

$$E_{c_{\text{قبل}}} = E_{c_{\text{بعد}}} \Longrightarrow \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \qquad (44.5)$$

يمكن أن نكتب:

$$m_1(\vec{v}_1^2 - \vec{v}_1'^2) = -m_2(\vec{v}_2^2 - \vec{v}_2'^2) \qquad (45.5)$$

بقسمة المعادلة (45.5) على المعادلة (43.5) فنتحصل على:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = (\vec{v}_2 + \vec{v}'_2) \qquad (46.5)$$

بضرب المعادلة (46.5) فيm_1، ثم نقوم بجمعها مع المعادلة (43.5) طرفا لطرف فنجد:

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \qquad (47.5)$$

بضرب المعادلة (46.5) فيm_2، ثم نقوم بجمعها مع المعادلة (43.5) طرفا لطرف فنجد:

$$(48.5) \qquad \vec{v}_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

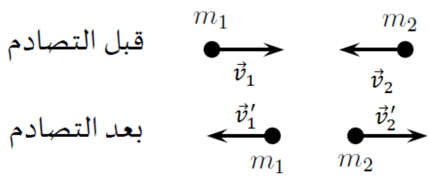
من المعادلة (46.5)، يمكن ان نكتب:

$$(49.5) \qquad (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -(\vec{v}_2' - \vec{v}_1')$$

الحد الأول من المعادلة (49.5) يمثل سرعة الكتلة m_2 بالنسبة للكتلة m_1 قبل التصادم $(\vec{v}_{2/1})$، بينما الحد الثاني يمثل نفس النسبة بعد التصادم $(\vec{v}_{2/1}')$. وعليه نكتب:

$$(50.5) \qquad (\vec{v}_{2/1}) = -(\vec{v}_{2/1}')$$

نستنتج ان سرعة الكتلة m_2 بالنسبة للكتلة m_1 قبل التصادم تساوي وتعاكس سرعة الكتلة m_2 بالنسبة للكتلة m_1 بعد التصادم.



الشكل (9.5): السرعات قبل وبعد تصادم مرن لجسيمتين.

- إذا كانت الكتلة m_2 ساكنة قبل التصادم $(\vec{v}_2 = \vec{0})$، فان المعادلتين (47.5) و (48.5) يكتبان بالشكل:

$$(51.5) \qquad \vec{v}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

$$(52.5) \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

إذا كان زيادة على ذلك ان الكتلتين متساويتين $m_1 = m_2$ فان:

$$\vec{v}_1' = \vec{0}\,, \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_1$$

نلاحظ ان الكتلة m_1 تتوقف بعد التصادم مباشرة بينما الكتلة m_2 تواصل الحركة بعد التصادم بنفس سرعة الكتلة m_1 قبل التصادم (شدة واتجاها).

المراجع:

- T. HANNI, Mécanique générale cours et exercices, OPU (1996).

- J. TAYLOR, Mécanique classique, Ellipses, Paris, (2007).

- M. Henry, N. Delorme, Mécanique du point cours et exercices, Dunod, Paris, (2008).

- A. Gibaud, M. Henry, cours de physique mécanique du point, Dunod, Paris, (1999, 2007) pour la seconde édition.

- مصطفى العليوي، هاني قوبا، ميكانيك النقطة المادية، (2016) الإصدار الثاني.

- إبراهيم سعدالله، الفيزياء الأساسية للجامعة الميكانيك. ديوان المطبوعات الجامعية (2017).