Une introduction à l'analyse Hilbertienne

Habita Khaled

2018- 2019

\newpage

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

Dans tous ce manuscrit, $\mathbb{k}$ désigne le corps des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Notions générales sur les e.v.n

Définition 1.1.1 *On appelle norme toute application d'un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel quelconque* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}$:

$$\|.\| : (E, +, .) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \diagdown x \mapsto \|x\|$$

telle que pour tous $x, y \in E$ *et tous* $\lambda \in \mathbb{k}$ *on a :*

$$\begin{aligned} 1)\ \|x\| &= 0 \implies x = 0. && \textit{(séparation)} && (1.1.1) \\ 2)\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \, \|x\| . && \textit{(homogénéité)} && (1.1.2) \\ 3)\ \|x + y\| &\leqslant \|x\| + \|y\| . && \textit{(Inégalitét riangulaire)} && (1.1.3) \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *D'après la condition (1.1.2) avec* $\lambda = 0$ *on obtient :*

$$x = 0 \implies \|x\| = 0.$$

La propriété : $\forall x \in E, \|x\| \geqslant 0$ *découle de ce qui précède et de (1.1.3) et (1.1.2). En effet,* $\forall x \in E$ *on a :*

$$\begin{aligned} 0 &= \|x-x\| \leqslant \|x\| + \|-x\| = \|x\| + \|x\| = 2\|x\| \\ &\Longrightarrow \|x\| \geqslant 0. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.1 *1) Soit* E *un* $\Bbbk-$*espace vectoriel de dimension finie et* $B = \{e_1, e_1, ..., e_n\}$ *une base quelconque de* E*.*

Pour tous $x \in E$ *il existe donc* $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \Bbbk$ *telles que :*

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

On vérifie aisement que les applications suivantes

$$\begin{aligned} \|.\|_1 &: (E,+,.) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \diagdown x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \\ \|.\|_2 &: (E,+,.) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \diagdown x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|.\|_\infty &: (E,+,.) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \diagdown x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|. \end{aligned}$$

sont des normes sur E*.*

L'inégalité triangulaire dans $\|.\|_2$ *est satisfaite en utilisant l'inégalité de Minkowski :*

Pour tous $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \Bbbk$ *et tous* $\beta_1, \beta_1, ..., \beta_n \in \Bbbk$ *on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que l'inégalité de Minkowski est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

Pour tous $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \Bbbk$ *et tous* $\beta_1, \beta_1, ..., \beta_n \in \Bbbk$ *on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.2 *On dit que deux normes* $\|.\|_1, \|.\|_2$ *définis sur le même espce vectoriel* E *sont équivalentes, et on note* $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$, *s'il existe deux constantes positives* α *et* β *telles que*

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1.$$

Théorème 1.1.1 *([1]) Dans un espce vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.1.3 *Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$, deux e.v.n (espces vectoriels normés). On dit qu'une application $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ est continue en un point $x_0 \in E$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_\varepsilon > 0 \text{ telle que : } \|x - x_0\|_E < \lambda_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

Si f est continue en tout point x_0 de E, on dit qu'elle est continue sur E.

Proposition 1.1.1 *L'application $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ est continue en $x_0 \in E$ ssi (si et seulement si) :*

$$\forall (x_n) \subset E : x_n \to x, \text{ dans } (E, \|.\|_E) \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \text{ dans } (F, \|.\|_F).$$
$$\text{i.e : } \forall (x_n) \subset E : \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_E = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f(x_n) - f(x)\|_F = 0.$$

Définition 1.1.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\Bbbk$.*

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite semi-linéaire si

$$\forall \alpha \in \Bbbk, \forall x, y \in E : f(\alpha x + y) = \overline{\alpha} f(x) + f(y).$$

Définition 1.1.5 *Une application linéaire ou semi-linéaire $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ est dite bornée si*

$$\exists M > 0 \text{ telle que : } \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E .$$

Théorème 1.1.2 *([4]) On montre que si une application $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ est linéaire ou semi-linéaire alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) f est continue en 0.

2) f est continue sur E.

3) f est uniformément continue sur E.

4) f est lipschitzienne.

5) f est bornée.

6) $\exists M > 0$ telle que : $\|x\|_E \leqslant 1 \implies \|f(x)\|_F \leqslant M$.

1.2 Dual algébrique et dual topologique

Définition 1.2.1 *L'ensemble des applications linéaires de* $(E, \|.\|_E)$ *dans* $(F, \|.\|_F)$ *est noté par* $L(E, F)$.

Remarque 1.2.1 *Si* $(F, +, .) = (\mathbb{k}, +, .)$, *alors* $L(E, \mathbb{k})$ *est appelé le* ***dual algébrique*** *de l'espace* $(E, \|.\|_E)$ *et il est noté* E^*.

$$\begin{aligned} L(E,F) &= \{f : (E,+,.) \longrightarrow (F,+,.) \diagdown f \text{ est linéaire}\}. \\ E^* &= L(E,\mathbb{k}) = \{f : (E,+,.) \longrightarrow (\mathbb{k},+,.) \diagdown f \text{ est linéaire}\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *([4]) Si une application* f *est linéaire sur un espace de dimension finie alors elle est nécessairement continue (elle est aussi uniformément continue) sur cet espace.*

Définition 1.2.2 *L'ensemble des applications linéaires continues de* $(E, \|.\|_E)$ *dans* $(F, \|.\|_F)$ *est noté par* $\mathcal{L}(E, F)$.

$$\mathcal{L}(E,F) = \{f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F) \diagdown f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Si $(F, \|.\|_F) = (\mathbb{k}, |.|)$, $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ *est appelé le* ***dual topologique*** *de l'espace* $(E, \|.\|_E)$ *et il est noté* $E^{'}$

Proposition 1.2.2 *([4])* $(\mathcal{L}(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ *est un e.v.n où*

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, \text{ et on a :} \\ \forall x &\in E, \quad \|f(x)\| \leqslant \|f\| \, \|x\|. \end{aligned}$$

et on a

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \inf \{M > 0 : \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E \}.$$

Exemple 1.2.1 *([4]) Soit* $E = C([0, 2])$ *et* $\forall x \in E : \|x\|_E = \max_{t \in [0,2]} |x(t)|$.

On montre que l'espace $(E, \|.\|_E)$ *est un e.v.n complet, i.e; un espace de Banach.*

Théorème 1.2.1 *([4]) Si* $(F, \|.\|_F)$ *est un espace de Banach alors* $\mathcal{L}(E, F)$ *est aussi un espace de Banach, et en particulier le dual topologique* $E^{'}$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.2.2 *([4]) Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$,*deux e.v.n alors* $(E\times F, \|.\|_{E\times F})$ *est aussi un e.v.n où*

$$\|(x,y)\|_{E\times F} = (\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2)^{\frac{1}{2}},$$

et on a

$$\|x\|_E + \|y\|_F \sim (\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2)^{\frac{1}{2}} \sim \max(\|x\|_E\,,\ \ \|y\|_F).$$

Définition 1.2.3 *Soient* E, F *et* G *trois espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.

Une application $B : E \times F \longrightarrow G$ *est dite* bilinéaire *si elle est linéaire par rapport aux deux variables, i.e*

$$\begin{cases} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in E, \forall y \in F : B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y), \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \forall y_1, y_2 \in F : B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 B(x, y_1) + \alpha_2 B(x, y_2). \end{cases}$$

Théorème 1.2.3 *([4]) Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F), (G, \|.\|_G)$ *trois e.v.n.*

Une application bilinéaire $f : (E \times F, \|.\|_{E\times F}) \longrightarrow (G, \|.\|_G)$ *est continue en* (x, y) *si* $\forall (x_n, y_n) \subset E \times F$:

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{E\times F} \longrightarrow 0 \implies \|f(x_n, y_n) - f(x, y)\|_G \longrightarrow 0, \ \textit{i,e :}$$

$$\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0 \ \ \textit{et} \ \ \|y_n - y\|_F \longrightarrow 0 \implies \|f(x_n, y_n) - f(x, y)\|_G \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.2.4 *([4]) Une application bilinéaire* $f : (E \times F, \|.\|_{E\times F}) \longrightarrow (G, \|.\|_G)$ *est continue ssi*

$$\exists M > 0 \ \textit{telle que :} \ \forall (x, y) \in E \times F, \qquad \|f(x, y)\|_G \leqslant M \|x\|_E \|y\|_F\,.$$

L'ensemble des applications bilinéaires continues de $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$ *dans* $(G, \|.\|_G)$ *est un e.v.n et on le note par*

$$\mathcal{L}_2(E, F; G), \ \textit{avec :}$$

$$\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}_2(E,F;G)} = \sup_{\substack{0\neq x\in E\\ 0\neq y\in F}} \frac{\|f(x, y)\|_G}{\|x\|_E \|y\|_F}, \ \textit{et on a :}$$

$$\forall (x, y) \in E \times F : \|f(x, y)\| \leqslant \|f\| \|x\| \|y\|\,.$$

L'ensemble des applications bilinéaires continues de $(E \times E, \|.\|_{E\times E})$ dans $(F, \|.\|_F)$ est noté par $\mathcal{L}_2(E, F)$.

<u>Exercice n°1 :</u> Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de X qui satisfait:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 2^{-n}.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

2) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy et qu'elle contient une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite.

3) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites convergentes telles que : $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente de $\mathbb{C}$ telle que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$.

Montrer que :

a) $\forall x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

c) L'application $\|.\| : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, |.|)$ est continue.

d) $x_n + y_n \longrightarrow x + y$.

e) $\alpha_n x_n \longrightarrow \alpha x$.

Chapitre 2

Notions générales sur les espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert[1] sont la version de dimension infinie des espaces euclidiens ou hermitiens, dont ils gardent beaucoup de propriétés.

2.1 Formes bilinéaires - sesquilinéaires et produit scalaire

Définition 2.1.1 *On appelle forme (on dit encore fonctionnelle) toute application d'un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel quelconque* E *à valeurs scalaires (i.e, à valeurs dans* $\mathbb{k}$*).*

Définition 2.1.2 *Une forme* $f : E \longrightarrow \mathbb{k}$ *est dite linéaire si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall x, y \in E : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Définition 2.1.3 *Une forme* $f : E \longrightarrow \mathbb{k}$ *est dite semi-linéaire si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall x, y \in E : f(\alpha x + y) = \overline{\alpha} f(x) + f(y).$$

où $\overline{\alpha}$ *est le conjugé du nombre complexe* α.

[1] Le mathématicien allemand David HILBERT (1862-1943) est l'un des plus grands mathématiciens de son temps. Il a contribué à presque toutes les branches des mathématiques, de la logique à l'algèbre en passant par l'analyse et la géométrie. Lors du Congrés International des mathématiciens tenu à Paris en 1900, il a formulé 23 problèmes qui ont servi de référence dans la recherche mathématique et ouvert la voie à plusieurs générations de chercheurs.

Remarque 2.1.1 *Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ il est claire, dans ce cas, que :*

f est semi-linéaire $\Longleftrightarrow$ f est linéaire.

Définition 2.1.4 *Une fonctionnelle $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* bilinéaire *si elle est linéaire par rapport aux deux variables, i.e*

$$\begin{cases} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2, y \in E : B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y), \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x, y_1, y_2 \in E : B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 B(x, y_1) + \alpha_2 B(x, y_2). \end{cases}$$

On dit que B est symétrique *si elle vérifie de plus*

$$\forall x, y \in E : B(x, y) = B(y, x).$$

Définition 2.1.5 *Une fonctionnelle $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{k}$ est dite* sesquilinéaire *si elle est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième variable, i.e /*

$$\begin{cases} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}, \forall x_1, x_2, y \in E : B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y), \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}, \forall x, y_1, y_2 \in E : B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} B(x, y_1) + \overline{\alpha_2} B(x, y_2). \end{cases}$$

On dit que B est hermitienne *si elle vérifie de plus*

$$\forall x, y \in E : B(x, y) = \overline{B(y, x)}.$$

Définition 2.1.6 *On dit que la forme hermitienne ou symétique B est positive si :*

$$\forall x \in E : B(x, x) \geqslant 0.$$

Elle est dite définie si :

$$\forall x \in E : \quad B(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0).$$

B sera donc dite définie positive si :

$$\forall x \in E - \{0\} : B(x, x) > 0.$$

Rappel On rappelle ici quelques propriétés connus des nombres complexes que nous utiliserons beaucoup dans ce qui suit.

$$\forall z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z. \tag{2.1.1}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z. \tag{2.1.2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : z.\overline{z} = |z|^2 . \tag{2.1.3}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq |z| \tag{2.1.4}$$

Remarque 2.1.2 *Sur $\mathbb{C}$, une forme sesquilinéaire ne pourait pas être symétrique sans être nulle, alors qu'une forme bilinéaire ne pourait pas être hermitienne sans être nulle; autrement dit, la notion d'hermicité est adaptée au caractère sesquilinéaire, celle de symétrie au caractère bilinéaire.*

En effet, si B est sesquilinéaire et symétrique alors $\forall x, y \in E : B(x,y) = B(y,x)$ et donc on peut facilement voir que pour tous y fixé, l'application $x \mapsto B(x,y)$ est à la fois linéaire et semi-lilnéaire. Pour tout $x \in E$ on obtient donc

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B\left[-i(ix), y\right] = \begin{cases} -iB(ix,y) & \textit{(d'après la linéarité)} \\ iB(ix,y) & \textit{(d'après la semi-linéarité)} \end{cases} \\ &\Longrightarrow -iB(ix,y) = iB(ix,y) \\ &\Longrightarrow B(ix,y) = 0 \Longrightarrow B(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1 *([6])* ***(Identité de polarisation)*** *Toute forme bilinéaire symétrique B vérifie*

$$4B(x,y) = B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y). \tag{2.1.5}$$

Toute forme sesquilinéaire B (hermitienne ou non), vérifie

$$\begin{aligned} 4B(x,y) &= B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) \\ &\quad + iB(x+iy, x+iy) - iB(x-iy, x-iy) \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Démonstration. Si B est hermitienne, le developpement de $B(x+y,x+y)$ en utilisant (2.1.1) prend la forme

$$\begin{aligned} B(x+y,x+y) &= B(x,x+y)+B(y,x+y) \\ &= B(x,x)+B(x,y)+B(y,x)+B(y,y) && (2.1.7) \\ &= B(x,x)+B(x,y)+\overline{B(x,y)}+B(y,y) && (2.1.8) \\ &= B(x,x)+2\operatorname{Re}B(x,y)+B(y,y). && (2.1.9) \end{aligned}$$

De même on trouve :

$$B(x-y,x-y)=B(x,x)-2\operatorname{Re}B(x,y)+B(y,y). \tag{2.1.10}$$

En soustrayant (2.1.10) de (2.1.9), on obtient :

$$B(x+y,x+y)-B(x-y,x-y)=4\operatorname{Re}B(x,y) \tag{2.1.11}$$

Le developpement de $B(x+iy,x+iy)$ en utilisant (2.1.2) prend la forme

$$B(x+iy,x+iy)=B(x,x)+2\operatorname{Im}B(x,y)+B(y,y). \tag{2.1.12}$$

Par ailleurs :

$$B(x-iy,x-iy)=B(x,x)-2\operatorname{Im}B(x,y)+B(y,y). \tag{2.1.13}$$

Ce qui montre que

$$iB(x+iy,x+iy)-iB(x-iy,x-iy)=4i\operatorname{Im}B(x,y). \tag{2.1.14}$$

De (2.1.11) et (2.1.14) on déduit aisement (2.1.6).

Le cas général où B est non hermitienne et la démonstration de (2.1.5), qui est plus facile, sont laissés au lecteur. ■

Remarque 2.1.3 *D'après (2.1.6), si $\Bbbk=\mathbb{C}$, la forme quadratique associée à B qui est définie par :*

$$\forall x \in E : Q(x)=B(x,x),$$

caractérise entièrement celle-ci dans tous les cas.

Autrement dit, une forme sesquilinéaire sur $E\times E$ est entièrement déterminée par la connaissance de sa forme quadratique associée.

Ce résultat ne subsiste pas si $\Bbbk=\mathbb{R}$ mais reste vrai si la forme est supposée symétrique.

Proposition 2.1.1 *([4]) Soit B une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel E. Alors :*

$$B \text{ est hermitienne} \iff \forall x \in E : B(x,x) \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Si B est hermitienne, alors $\forall x \in E : B(x,x) = \overline{B(x,x)}$ (c'est à dire que $\forall x \in E : B(x,x)$ est son propre complexe conjugué). Donc $\forall x \in E : B(x,x)$ est réel.

Inversement, si $\forall x \in E : B(x,x)$ est réel alors les nombres $B(x+y, x+y)$, $B(y,y)$ sont réels aussi, ce qui montre, d'aprés (2.1.7), que

$$\forall x, y \in E : \alpha = B(x,y) + B(y,x) = B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y) \tag{2.1.15}$$

est réel. En changeant x en ix, on voit aussi que le nombre β qui suit est aussi réel

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in E : \beta = B(ix, y) + B(y, ix) = B(ix+y, ix+y) - B(ix, ix) - B(y,y) \\ \forall x, y &\in E : \beta = i\left[B(x,y) - B(y,x)\right]. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

De (2.1.15) et (2.1.16) on trouve que

$$\forall x, y \in E : B(x,y) = \frac{\alpha - i\beta}{2}, \qquad B(y,x) = \frac{\alpha + i\beta}{2}.$$

Ce qui prouve que $\forall x, y \in E : B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ et la forme B est hermitienne. ■

Exemple 2.1.1 *Soit $S_c(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes convergentes et la forme B définie par*

$$B : S_c(\mathbb{C}) \times S_c(\mathbb{C}) \longmapsto \mathbb{C} \diagdown B((u_n),(v_n)) = \lim_{n \to +\infty} u_n . \overline{\lim_{n \to +\infty} v_n}.$$

Il est facile de voir que B est une forme (sesquilinéaire) hermitienne.

Exemple 2.1.2 $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / B(u,v) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ *où $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$.*

B est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui est non symétrique ($B(u,v) = -B(v,u)$, on dit qu'elle est anti-symétrique).

On remarque que B est nulle sur le diagonale de $\mathbb{R}^2$, mais non identiquement nulle.

Exemple 2.1.3 *Soit $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.*

On définie une forme f par

$$f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R} / f(A,B) = \max_{1\leq i,j\leq n}(a_{ij}).\max_{1\leq i,j\leq n}(b_{ij}).$$

f *n'est pas une forme bilinéaire car il existe* $A_1 = (a^1_{ij}), A_2 = (a^2_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\max_{1\leq i,j\leq n}(a^1_{ij} + a^2_{ij}) < \max_{1\leq i,j\leq n}(a^1_{ij}) + \max_{1\leq i,j\leq n}(a^2_{ij}).$$

et donc $f(A_1 + A_2, B) \neq f(A_1, B) + f(A_2, B)$.

Définition 2.1.7 *On appelle* ***produit scalaire*** *sur l'espace vectoriel E toute forme $\langle .,. \rangle$ vérifiant*

$$\begin{aligned}
\forall \alpha_1, \alpha_2 &\in \mathbb{C}, \forall x_1, x_2, y \in E \ : \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle && (2.1.17)\\
\forall x, y &\in E : \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} && (2.1.18)\\
\forall x &\in E - \{0\} : \langle x, x \rangle > 0. && (2.1.19)
\end{aligned}$$

On note le produit scalaire sur E par : $\langle .,. \rangle_E$ *où* $\langle .,. \rangle$ *et on a d'après (2.1.17) et (2.1.18)*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall x, y_1, y_2 \in E : \langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, y_2 \rangle .$$

Donc le produit scalaire est une forme sesquilinéaire (bilinéaire si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$) hermitienne (symétrique si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$) et définie positive.

Définition 2.1.8 *Soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. L'application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite* ***semi-norme*** *si elle satisfait les conditions :*

1) $x = 0 \implies \|x\| = 0$.

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Elle sera une norme si de plus elle vérifie : $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

Remarque 2.1.4 *Si B est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur E alors on dit alors que B est un* ***semi-produit scalaire*** *et on note que*

$$B(x, y) = \langle x, y \rangle .$$

elle induit une semi-norme définie par :

$$\|x\| = \sqrt{B(x, x)}.$$

Théorème 2.1.2 *([3], [8]) Soit $\langle .,. \rangle$ un* ***semi-produit scalaire*** *sur E. Si B est positive alors elle vérifie les propriétés fondamentales suivantes :*

(i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|B(x,y)| \leqslant \sqrt{B(x,x)}.\sqrt{B(y,y)}. \tag{2.1.20}$$

(ii) L'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{B(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{B(x,x)} + \sqrt{B(y,y)}. \tag{2.1.21}$$

Démonstration. (i) Première démonstration ([8]) : Notation

$$\langle x,y \rangle = B(x,y) \text{ et } \|x\|^2 = \langle x,x \rangle = B(x,x).$$

On remarque que $\forall x,y \in (E, \langle .,. \rangle)$ on a :

$$\begin{aligned} \left\| \|y\|^2 x - \langle x,y \rangle y \right\|^2 &= \left\langle \|y\|^2 x - \langle x,y \rangle y, \|y\|^2 x - \langle x,y \rangle y \right\rangle \\ &= \|y\|^2 \left(\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x,y \rangle|^2 \right). \end{aligned}$$

Comme B est positive on a donc :

$$\begin{aligned} \|y\|^2 \left(\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x,y \rangle|^2 \right) &\geqslant 0 \\ &\Longrightarrow \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x,y \rangle|^2 \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow |\langle x,y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Deuxième démonstration ([3]) : Le point-clef est bien sûr la positivité de la forme hermitienne B.

Étant donné deux éléments x et y de E, on considère la fonction φ définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\varphi(\alpha) = B(x+\alpha y, x+\alpha y).$$

C'est une application de variable complexe et à valeurs réelles positives et par développement, elle s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= |\alpha|^2 B(y,y) + \overline{\alpha} B(x,y) + \alpha \overline{B(x,y)} + B(x,x) \\ &= |\alpha|^2 B(y,y) + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\alpha|} B(x,y) + B(x,x) \geqslant 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Supposons que $B(x,y) = |B(x,y)|e^{i\theta}$ et soit $\alpha = te^{-i\theta}$, avec t quelconque dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas on a : $\varphi(\alpha) = t^2 B(y,y) + 2t\,|B(x,y)| + B(x,x) = P(t) = at^2 + bt + c \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

L'inégalité précédente ne peut avoir lieu pour tout réel t que si $B(y,y) = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est dans ce cas une égalité. Sinon, P est un polynôme du second degré qui reste positif en tout t réel; il en résulte que son discriminant, à savoir $\triangle = |B(x,y)|^2 - B(x,x)B(y,y)$, est négatif ce qui traduit précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(ii) on a:

$$\begin{aligned}
B(x+y,x+y) &= B(x,x) + 2\operatorname{Re} B(x,y) + B(y,y) \\
&\leq B(x,x) + 2\,|B(x,y)| + B(y,y) \qquad (\text{car} \quad \operatorname{Re} z \leq |z|) \\
&\leq B(x,x) + 2B(x,x)^{\frac{1}{2}}.B(y,y)\frac{1}{2} + B(y,y) \text{ (en utilisant l'inégalité de Schwarz)} \\
&= \left[B(x,x)^{\frac{1}{2}} + B(y,y)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

donc $\quad B(x+y,x+y)^{\frac{1}{2}} \leq B(x,x)^{\frac{1}{2}} + B(y,y)^{\frac{1}{2}}$. ■

Exemple 2.1.4 *1) $B : C(]0,2[) \times C(]0,2[) \longmapsto \mathbb{R}/B(f,g) = f(1).g(1)$. B est une forme bilinéaire symétrique positive mais non définie positive.*

2) $B : C(]0,2[) \times C(]0,2[) \longmapsto \mathbb{R}/B(f,g) = f(1).g(\frac{1}{2})$, B est une forme bilinéaire non symétrique non positive.

3) $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}/B(u,v) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$, B est un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{C}^n$.

4) $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}/B(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1$, B est une forme bilinéaire non symétrique car on a $B(u,v) = -B(v,u)$, on dit, dans ce cas, que B est anti-symétrique.

5) $B : L^2(]a,b[) \times L^2(]a,b[) \longmapsto \mathbb{C}/B(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$, B est un produit scalaire sur l'espace $L^2(]a,b[)$.

Remarque 2.1.5 *Si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire, d'après le théorème précédent, on a en particulier :*

$$\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle| &\leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle} \quad \textit{(inégalité de Schwarz)} && (2.1.22)\\
\sqrt{\langle x+y,x+y\rangle} &\leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle} \ \textit{(Inégalité de Minkowski).} && (2.1.23)
\end{aligned}$$

Définition 2.1.9 *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On le note par :* $(E, \langle .,. \rangle)$.

Si de plus E *est un espace vectoriel de dimension fini sur* $\Bbbk$, *on dit que* $(E, \langle .,. \rangle)$ *est un espace euclidien pour* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *et un espace hermitien pour* $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Corollaire 2.1.1 *Toute espace préhilbertien (resp euclidien, hermitien) est un espace vectoriel normé où la norme est définie par*

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ / x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{2.1.24}$$

Cette norme est appellée : norme préhilbertien (resp euclidien, hermitien), i.e, qu'elle est induite par un produit scalaire.

Les relations (2.1.22) et (2.1.23) s'ecrivent alors

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| . \|y\| \quad \textit{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} && (2.1.25) \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \quad \textit{(Inégalité de Minkowski)} && (2.1.26) \end{aligned}$$

Preuve. De la positivité du produit scalaire, i.e, $\forall x \in E \ \ \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$, (2.1.24) a bien un sens.

(2.1.16 et 2.1.29) donnent : $\|0\| = \langle 0, 0 \rangle = 0$.

(**??**) donne : $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| . \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| . \|x\|$.

Avec (2.1.23) on voit bien que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définie bien une norme sur l'espace E. ■

Identités et propriétés remarquables

Les propriétés suivantes sont faciles à démontrer.

L'identité de la médiane (2.1.32) peut se montrer grâce à l'identité du parallélogramme (2.1.30), tandis que l'inégalité de Ptolémée (2.1.33) est relativement difficile à montrer dans le cas général, i.e dans un espace préhilbertien.

Une démonstration complète de cette fameux inégalité est donnée dans un exercice de ([7]). Cette démonstration est exposée dans la solution de l'exercice n°15 ci-desous.

$$1) \ \forall x, y \in E : \quad \langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0. \tag{2.1.27}$$

$$2) \ \forall x, y \in E : \langle x + y, x + y \rangle = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 . \tag{2.1.28}$$

$$3)\ \forall x,y \in E : \langle x+iy, x+iy\rangle = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2 . \quad (2.1.29)$$

$$4)\ \forall x,y \in E : \quad \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle .$$

$$5)\ \forall x,y \in E : \quad \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4\,\mathrm{Im}\,\langle x,y\rangle .$$

$$6)\ \forall x,y \in E : \quad \langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + i\frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4} .$$

$$8)\ \left(\forall x \in E, \langle x,y\rangle = \left\langle x, y^{'}\right\rangle\right) \Rightarrow \left(y = y^{'}\right) .$$

$$7)\ \forall x,y \in E : \quad \|x\|^2 - \|y\|^2 = \mathrm{Re}\,\langle x-y, x+y\rangle$$

$$9)\ \forall x,y \in E : \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) . \quad (2.1.30)$$

(Identité du parallélogramme). (2.1.31)

$$10)\ \forall x,a,b \in E : \quad \|x-a\|^2 - \|x-b\|^2 = \frac{1}{2}\|a-b\|^2 + 2\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 . \quad (2.1.32)$$

(Identité d'Appolonius dite aussi identité de la médiane).

En interprétant $\|x\|$ comme la longueur du vecteur x, l'identité du parallélogramme traduit la propriété bien connue en géométrie plane qui dit

que "dans un parallélogramme, la somme des carrés de ses diagonales est égale à la somme des carrés de ses côtés".

$$11)\ \forall x,y \in E : \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| \qquad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)}\ \langle\rangle .$$

$$12)\ \forall x,y,t \in E : \quad \|x-z\|\,\|y-t\| \leqslant \|x-y\|\,\|z-t\| + \|y-z\|\,\|x-t\| . \quad (2.1.33)$$

(Inégalité de Ptolémée). (2.1.34)

Théorème 2.1.3 *([6]) Le produit scalaire est une forme* ***continue.***

Preuve. $\langle ..\rangle : (H \times H, \|.\|) \longrightarrow (\mathbb{C}, |.|)$ où la norme$\|.\|$ sur $H \times H$ est définie, par exemple, par $\|(x,y)\|_\infty = \max(\|x\|, \|y\|)$.

Comme $H \times H$ est un e.v.n il nous suffit de montrer la continuité séquentielle, i.e :

$(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y) \implies \langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle$.

On a :

$$\begin{aligned}
(x_n, y_n) &\longrightarrow (x, y) \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|(x,y)-(x_n,y_n)\|_\infty = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|(x-x_n, y-y_n)\|_\infty = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \max(\|x-x_n\|, \|y-y_n\|) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|y_n - y\| = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| = |\langle x, y_n - y\rangle - \langle x - x_n, y_n\rangle| \\
&\leqslant |\langle x, y_n - y\rangle| + |\langle x - x_n, y_n\rangle| \leqslant \|x\| \|y_n - y\| + \|y_n\| \|x - x_n\|.
\end{aligned}$$

Comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|y_n\| \leqslant M$.

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, &\quad 0 \leqslant |(x_n, y_n) - (x, y)| \leqslant \|x\| \|y_n - y\| + M \|x - x_n\| \\
\Longrightarrow &\quad 0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|x\| \|y_n - y\| + M \|x - x_n\| = 0 \\
\Longrightarrow &\quad \lim_{n\to+\infty} |(x_n, y_n) - (x, y)| = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$. ■

Remarque 2.1.6 *1) La preuve de la continuitée du produit scalaire peut être facilement réaliser en utilaisant le théorème1.2.4 qui caractérise la continuité des formes bilinéaires et sesquilinéaires et l'inégalité de Cauchy-Shwarz .*

2) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites convergentes d'un espace préhilbertien $(H, \langle ., .\rangle)$ telles que : $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ alors la suite $(\langle x_n, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to+\infty} y_n) = (x, y).$$

Cependant si la suite $(\langle x_n, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente cela n'implique pas que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et donc on ne peut pas utiliser la continuitée du produit scalaire pour écrire

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to+\infty} y_n),$$

sauf dans le cas où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites convergentes. Cette remarque est bien entendu valable pour toute fonction continue.

Théorème 2.1.4 *([2]) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé . Il serait un espace préhilbertien ssi sa norme satisfait la relation du parallélogramme.*

Si $(E, \|.\|)$ est réel on montre que l'application B définie par

$$B(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

est un produit scalaire sur E.

Si $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel complexe normé alors l'application B définie par

$$B(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

est un produit scalaire sur E.

Preuve. Il est claire que B est symétrique : $B(x,y) = B(y,x)$ car

$$\|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \|x-y\| = \|x-y\| .$$

B est définie positive car on a

$$\begin{aligned} B(x,x) &= \frac{1}{4}\|2x\| \geqslant 0, \quad \forall x \in E, \quad \text{et de plus on a :} \\ B(x,x) &= 0 \Rightarrow \|2x\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de montrer la linéarité de B par rapport à l'une des deux variables car on a déja montré que B est symétrique.

On va montrer premièrement que:

$$\forall x,y,z \in E : B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z), \text{i.e,} \tag{2.1.35}$$

$$\begin{aligned} \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 &= \left[\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right] \\ &\quad + \left[\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right] . \end{aligned}$$

On applique toujours l'hypothèse du parallélogramme, on trouve

$$\begin{aligned} \|y+z\|^2 + \|z\|^2 &= \left\|(\frac{y}{2}+z) + \frac{y}{2}\right\|^2 + \left\|(\frac{y}{2}+z) - \frac{y}{2}\right\|^2 \\ &\overset{hyp}{=} 2\left\|\frac{y}{2}+z\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 \\ \Rightarrow &\quad 2\left\|\frac{y}{2}+z\right\|^2 - \|y+z\|^2 = \|z\|^2 - 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 . \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Dans (2.1.36) on peut remplacer z par $-z$ (car x, y, z sont arbitraires dans E)

$$2\left\|\frac{y}{2}-z\right\|^2 - \|y-z\|^2 = \|z\|^2 - 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2. \tag{2.1.37}$$

De (2.1.36) et (2.1.37) on tire que

D'autre part et d'après l'hypothèse du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 + \|x-z\|^2 &= 2\left\|x+\frac{y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}+z\right\|^2, \\
\|x+y-z\|^2 + \|x+z\|^2 &= 2\left\|x+\frac{y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}-z\right\|^2.
\end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre on obtient:

$$\begin{aligned}
& \|x+y+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 \\
= \ & 2\left\|\frac{y}{2}+z\right\|^2 - 2\left\|\frac{y}{2}-z\right\|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.1.36) et (2.1.37) on trouve que

$$\begin{aligned}
& \|x+y+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 \\
= \ & \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que :

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 &= \left[\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right] \\
&\quad + \left[\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right].
\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par $\frac{1}{4}$ on tombe sur le résultat cherché.

Maitenant il nous reste montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y).$$

D'après (2.1.35) on montre facilement par récurance que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y). \tag{2.1.38}$$

On sait encore que

$$\begin{aligned}
\forall x &\in E : B(x-x, y) = B(0, y) = B(x, y) + B(-x, y) = 0, \\
&\Rightarrow \forall x \in E : B(-x, y) = -B(x, y).
\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

On obtient donc d'après (2.1.39) et (2.1.38) que

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \quad B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y).$$

D'autre part on sait que pout tout $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ on a :

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B(\alpha \frac{x}{\alpha}, y) = \alpha B(\frac{x}{\alpha}, y) \\ &\Rightarrow B(\frac{x}{\alpha}, y) = \frac{1}{\alpha} B(x,y). \end{aligned} \tag{2.1.40}$$

Or $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ telle que : $\alpha = \frac{p}{q}$ et on trouve d'après (2.1.40)

$$B(\alpha x, y) = B(\frac{p}{q} x, y) = \frac{1}{q} B(Px, y) = \frac{p}{q} B(x,y) = \alpha B(x,y), \ \forall \alpha \in \mathbb{Q}.$$

En sachant que la norme est une application continue sur E (ce qui entraine que l'application $B(.,y)$ est aussi continue sur E) et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (i.e : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists (a_n) \subset \mathbb{Q} : \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$) il facile de voire que :

$$\begin{aligned} \forall \alpha &\in \mathbb{R}, \ B(\alpha x, y) = B(\lim_{n\to\infty} a_n x, y) = \lim_{n\to\infty} B(a_n x, y) \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n B(x,y) = \alpha B(x,y). \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration dans le cas réel.

Le cas complexe se montre d'une façon similaire. ∎

Définition 2.1.10 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé complet il sera dit espace de Banach. Si l'espace $(E, \langle .,. \rangle)$ est complet il sera dit espace de Hilbert.*

Proposition 2.1.2 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. Si G est un sous espace vecoriel de H fermé pour la norme induite par le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, alors $(G, \langle .,. \rangle)$ est aussi un espace de Hilbert.*

Preuve. Par hypothèse $(G, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien, il suffit donc de montrer qu'il est complet.

Or $(H, \langle .,. \rangle)$ est complet et $(G, \langle .,. \rangle)$ est fermé donc $(G, \langle .,. \rangle)$ est complet puisque on sait que toute sous-ensemble fermé d'un espace complet est complet.Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{C}$. ∎

Exercice n°2 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n\}$ et

$$E = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} \backslash f \text{ est une application sur } A\}.$$

Est ce que la forme suivante :

$$\langle ., . \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \backslash \; \langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(i).g(i)$$

est un produit scalaire ?

Exercice n°3 :

Soit $H = C([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, et soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $[0,1]$. On définie l'application

$$\langle ., . \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n).\overline{g(a_n)}.$$

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(n).\overline{g(n)}$ est absolument convergente et donc l'application $\langle ., . \rangle$ est bien définie.

2) Montrer que si $A \subset [0,1]$ est dense dans $[0,1]$ et $\forall x \in A : f(x) = 0$ alors $f = 0$.

3) Montrer que si la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0,1]$ alors l'application $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur H.

4) Montrer que si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas dense dans $[0,1]$ alors $\langle ., . \rangle$ n'est pas un produit scalaire sur H.

Exercice n°4 :

1) Est ce que $(\mathbb{R}_+, |.|)$ est un espace de Hilbert ?

2) Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
Est ce que $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ est un espace de Hilbert ?

3) On pose : $l^2(\mathbb{C}) = l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ et $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{2017} x_i \overline{y_i}$.
Démontrer, avec un contre exemple, que $[l^2(\mathbb{C}), \langle ., . \rangle]$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice n°5 :

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien complexe et $x, y \in H$.

1) Montrer que : $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2 \implies x = y$

2) Soit $f : H \longrightarrow H$ une isométrie sur H (i.e : $\forall x \in H : \|f(x)\| = \|x\|$)

Montrer que :

$$\forall x, y \in H : \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Exercice n°6 :

Soit $H = \left\{ f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R} \diagdown f\ (x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(1) & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{array} \right. \right\}$

On pose : $\|f\| = |f(1)|, \forall f \in H$.

1) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur H.

2) Est ce que l'espace $(H, \|.\|)$ est complet ?

3) Est ce que$(H, \|.\|)$ est un espace de Hilbert ?

Exercice n°7 :

Soient $(H_1, \langle .,. \rangle_{H_1}), (H_2, \langle .,. \rangle_{H_2})$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

1) On pose l'application

$$\langle .,. \rangle_{H_1 \times H_2} : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle_{H_1 \times H_2} = \langle x_1, x_2\rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2\rangle_{H_2}$$

1) Montrer que $\langle .,. \rangle_{H_1 \times H_2}$ est un produit scalaie sur $H_1 \times H_2$.

2) Montrer que $(H_1 \times H_2, \langle .,. \rangle_{H_1 \times H_2})$ un espace de Hilbert.

3) Est ce que l'application

$$P : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_1 \setminus P(x_1, x_2) = x_1$$

est linéaire ? est continue ?

Exercice n°8 :

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{R}$ et $a, b \in H$ avec $3a \perp b$.

1) Montrer que : $H^{\perp} = \{0\}$.

2) On pose :

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R} \setminus f(x) = \langle x, a+b \rangle + 2\left\| b \right\|, \quad \forall x \in H.$$

- Pour $b \neq 0$, calculer $f(\frac{-2b}{\|b\|})$.

- Est ce que la forme f est linéaire ? (discuter suivant les valeurs de a et b).

3) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de cauchy dans H.

a) Montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

b) Montrer que la suite $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite convergente.

<u>Exercice n°9 :</u>

Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{R}$ et $a, b \in H - \{0\}$.

1) Montrer que : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\star} \setminus \alpha a + \beta b = 0 \Rightarrow |\langle a, b \rangle| = \|a\| \, \|b\|$.

2) Montrer que : $\forall x \in H, \langle a, x+a+b \rangle = \langle x+a+b, b \rangle \Rightarrow \|a\| = \|b\|$.

3) Montrer que :

$$\|a\| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|x\|}.$$

4) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans H et on pose :

$$y_n = \|a\| \langle b, x_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de convergente dans $\mathbb{R}$.

<u>Exercice n°10 :</u>

Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{C}$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset B_F(0,1)$ dans la boule unité fermé.

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Réponse : Par hypothèse on a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset B_F(0,1)$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|x_n\| \leqslant 1,\ \ \|y_n\| \leqslant 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant 1, \lim_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1. \tag{2.1.41}$$

et on sait que :

$$\|x_n - y_n\|^2 = \langle x_n - y_n, x_n - y_n\rangle = \|x_n\|^2 - \langle x_n, y_n\rangle - \overline{\langle x_n, y_n\rangle} + \|y_n\|^2 . \tag{2.1.42}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \implies \lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}, \quad \text{où } z_n, z \in \mathbb{C}. \tag{2.1.43}$$

En utilisant (2.1.41), (2.1.42) et (2.1.43) on obtien :

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|^2 \leqslant 1 - \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle - \lim_{n\to\infty} \overline{\langle x_n, y_n\rangle} + 1.$$

Ce qui montre que :

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = 1 \implies 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|^2 \leqslant 0$$

et achève la réponse.

<u>Exercice n°11 :</u>

On se propose, dans cette exercice, de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un $\mathbb{R}-$espace préhilbertien.

On suppose que $(H, \langle ., .\rangle)$ est un $\mathbb{R}-$espace préhilbertien et $x, y \in H$.

1) Montrer que : $\forall x, y \in H, \quad \langle x, y\rangle \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

2) En utilisant la question précédente, montrer que: $\|x\| = 1$ et $\|y\| = 1 \implies |\langle x, y\rangle| \leqslant 1$.

3) En déduire que : $\forall x, y \in H,\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

Solution :

1) $\forall x, y \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\Longrightarrow \quad 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x+y\|^2 \\
&\Longrightarrow \quad 2\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{car } \ \|x+y\|^2 \geqslant 0) \\
&\Longrightarrow \quad \langle x, y\rangle \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2). \qquad (2.1.44)
\end{aligned}$$

2) D'après la question 1) on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, -y\rangle &\leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|-y\|^2) \\
&\Longrightarrow \quad -\langle x, y\rangle \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (2.1.45)
\end{aligned}$$

En utilisant (2.1.44) et (2.1.45) on obtient

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et par conséquent on voit facilement que

$$\|x\| = 1 \text{ et } \ \|y\| = 1 \implies |\langle x, y\rangle| \leqslant 1. \qquad (2.1.46)$$

3) Si $x = 0$ ou $y = 0$ l'inégalité est bien satisfait.
Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on pose $a = \frac{x}{\|x\|}$ et $b = \frac{y}{\|y\|}$.
Donc, en utilisant (2.1.46) on a

$$\begin{aligned}
|\langle a, b\rangle| &= \left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.
\end{aligned}$$

On a bien montrer que : $\forall x, y \in H,\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

<u>Exercice n°12 :</u>

Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{C}$.

1) Montrer que $\forall x, y \in H$ on a : $\begin{cases} \left\langle \langle x, y\rangle y, \quad \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle y \right\rangle = 0 \\ \text{et} \\ \left\langle x, \quad \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle y \right\rangle = \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2. \end{cases}$

2) Montrer donc que $\forall x \in H, \forall y \in H - \{0\}$ on a :

$$\frac{1}{\|y\|^2} \left\| \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle y \right\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 \;.....(1)$$

3) Utiliser la relation (1) pour montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

<u>Exercice n°13 :</u>

1) Montrer que $\forall x, y, \in H$ on a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : y = \lambda x \implies |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|.$$

2) On se propose maintenant de prouve l'implication reciproque.

a) Montrer que : $\forall x, y \in H$ on a :

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \implies \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle - \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle = 0.$$

b) Calculer et simplifier l'expression :

$$\langle\ [\langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y], \quad [\langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y]\rangle.$$

c) Déduire de a) et b) que $\forall x, y \in H$ on a :

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \implies \langle\ [\langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y], \quad [\langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y]\ \rangle = 0.$$

d) Conclure que :

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| \implies \exists\lambda \in \mathbb{C} : y = \lambda x.$$

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

Exercice n°14 :

1) Montrer que $\forall\alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H$:

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + \alpha \langle y, x\rangle + |\alpha| \langle y, y\rangle .$$

2) En posant $\alpha = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3) Montrer, par un calcule directe, que $\forall x, y, z \in H$ on a :

$$\|z - x\|^2 - \|z - y\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2 \quad \text{(Identité d'Appolonius)}$$

- Montrer que cette égalité peut aussi être obtenu à partir de l'identité du parallélogramme.

Exercice n°15 : (l'inégalité de Ptolémée)

Le but de cette exercice est de montrer, dans un espace préhilbertien quelconque, l'inégalité de Ptolémée.

1) Montrer que $\forall x, y, z, t \in H$ on a

$$\begin{aligned} \forall x, y, z, t \quad &\in \quad H, \; \|x - z\| \, \|y - t\| \leqslant \|x - y\| \, \|z - t\| + \|y - z\| \, \|x - t\| \quad (2.1.47) \\ &\iff \quad \forall a, b, c \in H, \; \|a - b\| \, \|c\| \leqslant \|c - a\| \, \|b\| + \|b - c\| \, \|a\| \quad (2.1.48) \end{aligned}$$

2) Soient $a, b \in H - \{0\}$ quelconques. On pose $a' = \frac{a}{\|a\|^2}$, $\quad b' = \frac{b}{\|b\|^2}$.

Montrer que : $\|a' - b'\| = \frac{\|a-b\|}{\|a\|\|b\|}$.

3) En utilisant la question précédente et l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité de Ptolémée.

Solution :

1) $\implies$) Soient $a, b, c \in H$ quelconques. Si on pose : $x = a$, $z = b$, $y = c$, $t = 0$ et on applique (2.1.47) on obtient facilement (2.1.48).

$\Longleftarrow$) Soient $x, y, z, t \in H$ quelconques. Si on pose : $a = x - t$, $b = z - t$, $c = y - t$ et on applique (2.1.48) on obtient facilement (2.1.47).

2) Un calcule directe nous donne que :

$$\begin{aligned}\left\|a' - b'\right\|^2 &= \left\langle \frac{a}{\|a\|^2} - \frac{b}{\|b\|^2}, \frac{a}{\|a\|^2} - \frac{b}{\|b\|^2} \right\rangle = \frac{\|a\|^2}{\|a\|^4} - \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2} - \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2} + \frac{\|b\|^2}{\|b\|^4} \\ &= \frac{1}{\|a\|^2} - \frac{2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2} + \frac{1}{\|b\|^2} = \frac{\|a\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle + \|b\|^2}{\|a\|^2\|b\|^2} \\ &= \frac{\langle a - b, a - b\rangle}{\|a\|^2\|b\|^2} = \frac{\|a - b\|^2}{\|a\|^2\|b\|^2}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que : $\left\|a' - b'\right\| = \frac{\|a-b\|}{\|a\|\|b\|}$.

3) <u>1^{ier}Cas $\|a\|\,\|b\|\,\|c\| = 0$:</u> donc $a = 0$, ou $b = 0$, ou bien $c = 0$.Dans ces trois cas on voit facilement que l'inégalité de Ptolémée est bien satisfait.

<u>$2^{ièm}$Cas $\|a\|\,\|b\|\,\|c\| \neq 0$:</u> donc $a, b, c \in H - \{0\}$. Si on pose : $x = \frac{a}{\|a\|^2}$, $y = \frac{b}{\|b\|^2}$, $z = \frac{c}{\|c\|^2}$ on obtient, d'après la question précédente :

$$\|x - y\| = \frac{\|a - b\|}{\|a\|\,\|b\|}, \quad \|y - z\| = \frac{\|b - c\|}{\|b\|\,\|c\|}, \quad \|z - x\| = \frac{\|c - a\|}{\|c\|\,\|a\|}.$$

On a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|y - x\| \leqslant \|y - z\| + \|z - x\| \\ &\Longrightarrow \frac{\|a - b\|}{\|a\|\,\|b\|} \leqslant \frac{\|b - c\|}{\|b\|\,\|c\|} + \frac{\|c - a\|}{\|c\|\,\|a\|} \\ &\Longrightarrow \|a - b\| \leqslant \frac{\|b - c\|\,\|a\| + \|c - a\|\,\|b\|}{\|c\|} \\ &\Longrightarrow \|a - b\|\,\|c\| \leqslant \|b - c\|\,\|a\| + \|c - a\|\,\|b\|.\end{aligned}$$

Ce qui montre bien l'inégalité de Ptolémée.

<u>Exercice n°16 :</u>

Soient $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace <u>préhilbertien</u> sur $\mathbb{C}$ et $E = \{a, b\} \subset H - \{0\}$ telque $a \perp b$.

1) Calculer $\langle \alpha a+\beta b, \alpha a+\beta b\rangle$ et en déduire que E est libre.

On pose $f : H \longrightarrow H \setminus f(x) = \overline{\langle b, x\rangle} a - \overline{\langle a, x\rangle} b, \quad \forall x \in H.$

2) Montrer que $f \in \mathcal{L}(H)$

3) Montrer que $\operatorname{Im} f = VectE.$

4) En déduire que : $\quad f$ est sujective $\iff \dim H = 2.$

5) Calculer $f\left[f(x)\right].$

6) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ est une suite de Cauchy et $g : H \longrightarrow H$ une application linéaire et continue quelconque.

a) Montrer que la suite définie par $y_n = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ est aussi une suite de Cauchy.

b) Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2.2 Notions d'orthogonalité

Définition 2.2.1 *Soit* $(H, \langle .,. \rangle)$ *un espace de Hilbert.*

On dit que deux éléments x *et* y *de* E *sont orthogonaux (et on note* $x \perp y$*) si :* $\langle x, y\rangle = 0.$

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0.$$

Plus généralement, on dit que x *est orthogonal à l'ensemble* E *s'il est orthogonal à tous ses éléments, i.e :*

$$x \perp E \iff \forall y \in E : x \perp y.$$

Pour tout $x \in H$ *on définit l'orthogonal de* x *par la formule*

$$x^{\perp} = \left\{ y \in H : \langle x, y\rangle = 0 \right\}.$$

On définit l'orthogonal de E *par*

$$E^{\perp} = \left\{ x \in H : \quad x \perp E \right\} = \left\{ x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in E \right\}.$$

On dit que les deux sous ensembles E_1, $E_2 \subset H$ sont orthogonaux si leurs éléments sont orthogonaux deux à deux, i.e :

$$\begin{aligned} E_1 \perp E_2 &\iff \forall x \in E_1, \forall y \in E_2 : \langle x, y\rangle = 0 \\ &\iff \forall x \in E_1, \forall y \in E_2 : x \perp y \\ &\iff \forall x \in E_1 : x \perp E_2 \\ &\iff \forall x \in E_2 : x \perp E_1 \end{aligned}$$

Propriétés :

1) $\forall x \in H, \quad x \perp 0.$

2) $x \perp x \Rightarrow x = 0.$

3) $E \perp E^{\perp}.$

4) $x \perp y_1, x \perp y_2, ..., x \perp y_n \implies \forall \alpha_i \in \Bbbk, x \perp (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i).$

5) $x \perp E \Rightarrow x \perp \overline{VectE}$ où$VectE = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, x_i \in E \right\}.$

6) $(x \perp y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $y_n \longrightarrow y) \implies x \perp y.$

7) $x \perp E \setminus \overline{VectE} = H \implies x = 0.$

8) $E^{\perp} = \underset{x\in E}{\cap} x^{\perp}$, où $x^{\perp} = \{y \in H : \langle x, y\rangle = 0\}.$

9) $E^{\perp}$est un sous espace vecoriel fermé de$H$.

10) $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}.$

11) $\forall E \subset H, \quad E \subset E^{\perp\perp}.$

12) $H^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = H.$

13) $\forall E \subset H, \quad E \cap E^{\perp} = \{0\}$ ou $\emptyset.$

Les démonstrations sont laissées comme des exercices.

Exercice n°17 :

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base d'un espace préhilbertien $(H, \langle ., . \rangle)$ et $A = Vect(\{e_1, e_2, ..., e_p\})$ où $1 \leq p < n$.

1) Montrer que :

$$A^{\perp} = Vect\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}.$$

Exercice n°18 : Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et $A \subset H$.

Montrer que

$$A^{\perp} = \sup\{X \in P(H) : X \perp A\} = \sup_{P(H) \ni X \perp A} X. \tag{2.2.1}$$

Réponse : Par définition on a :

$$A^{\perp} = \{x \in H : \quad x \perp A\}.$$

On pose :

$$G = \{X \in P(H) : X \perp A\}.$$

Soit $Y \in G$. Donc $\forall x \in Y \subset H : x \perp A$, ce qui montre que $Y \subset A^{\perp}$.

Donc on a montrer que :

$$\forall Y \in G = \{X \in P(H) : X \perp A\} : Y \subset A^{\perp}. \tag{2.2.2}$$

En sachant que $(P(H), \subset)$ est un ensemble ordonné, (2.2.2) veut dire que $A^{\perp}$ est majorant de G.

D'autre part, il est claire que $A^{\perp} \in G$, donc on obtient (2.2.1).

Théorème 2.2.1 ***(Pythagore)*** *: Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\Bbbk$.*

$$\begin{aligned} Si\ \Bbbk &= \mathbb{R}\ on\ a : \quad x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \\ Si\ \Bbbk &= \mathbb{C}\ on\ a : \quad [x \perp y] \iff \left[\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\ et\ \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \end{aligned}$$

Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in H$.

$$\forall i \neq j : x_i \perp y_j \implies \|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2.$$

Preuve. 1) Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ on a : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Donc $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$.

Ce qui montrer que

$$\begin{aligned} x \quad \perp \quad y &\iff \langle x, y \rangle = 0 \\ &\iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ on a :

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ et $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Im} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Ce qui montrer que

$$\begin{aligned} x \quad \perp \quad y &\iff \langle x, y \rangle = 0 \\ &\iff \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 0 \text{ et } \operatorname{Im} \langle x, y \rangle = 0. \\ &\iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ et } \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

2) On a : $\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \langle x_1 + x_2 + ... + x_n, x_1 + x_2 + ... + x_n \rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2$

$+2 \sum_{i \neq j} \langle x_i, y_j \rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2$ car $\forall i \neq j : \langle x_i, y_j \rangle = 0.$ ■

2.3 La projection sur un convexe

Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et F une partie non vide de E.

Existe-t-il un point $a \in F$ qui soit le plus proche de x ? c'est-à-dire tel que :

$$\forall y \in F : d(x, a) \leq d(x, y),$$

autrement dit tel que

$$d(x; F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = d(x, a).$$

Si un tel point existe, est-il unique ?

Un tel point, quand il existe et unique, est appelé la projection de x sur F.

Si F n'est pas fermé, on peut citer des exemples triviaux où la réponse à la première question est déjà négative (prendre par exemple $E = \mathbb{R}$, $F = [0, 1[$et $x = 2$).

En général, un point n'a pas forcément de projection sur un sous-ensemble fermé, ou peut en avoir plusieurs (prendre F un cercle et x son centre).

Cependant, ce problème a une solution satisfaisante lorsque F est un convexe fermé d'un espace de Hilbert E.

Définition 2.3.1 *Soit $(H,+,.)$ un espace vectoriel et $K \subset H$.*

$$K \textit{ est dite convexe} \iff \forall x,y \in K, \forall t \in [0,1] : [tx+(1-t)y] \in K.$$

Remarque 2.3.1 *On rappelle que toute sous espace est, bien evidement, un convexe. Le contraire est faux.*

En effet

$$\begin{aligned} (\forall \alpha, \beta \quad &\in \quad \Bbbk, \quad \forall x,y \in G : \alpha x + \beta y \in G) \\ &\Longrightarrow \quad (\forall t \in [0,1]\,, \quad \forall x,y \in G, : [tx+(1-t)y] \in G). \end{aligned}$$

IL est facile de voir que la droite (Δ)d'équation $2x-y+5=0$ est un ensemble convexe dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas un sous-espace.

Définition 2.3.2 *Soit (E,d) un espace métrique et $F \subset E, a \in E$, alors*

$$d(a,F) \overset{déf}{=} \inf_{x\in F} d(a,x) = \inf \{d(a,x) : x \in F\}.$$

Exemple 2.3.1 *Soient $(\mathbb{R},d)$, où $d(x,y) = |x-y|$, $a=-1 \in \mathbb{R}$ et $F = \left\{\frac{n+2}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.*

1) L'ensemble F est-il ouvert ou fermé dans $(\mathbb{R},d)$?

2) Montrer que $\inf_{x\in F} d(a,x) = d(a,F) = 2$.

3) Est ce que ce $\inf_{x\in F} d(a,x)$ est un minimum ?

Réponse :

1) Soit $x_n = \frac{n+2}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, une suite d'éléments de F, i.e, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset F$.

On a : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = 1$, et $1 \notin F$ car $n+2 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc F n'est pas fermé.

Mais on peut montrer que l'enemble $F \cup \{1\}$ est fermé.

On remarque aussi que : $3 \in F$ mais $\forall r \in \mathbb{R}_+^* : B(3,r) \nsubseteq F$. Donc F n'est pas ouvert.

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : \left|\frac{n+2}{n} + 1\right| = \frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n} > 2$. Donc l'ensemble F est minoré par 2.

D'autre par $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* : 2 + \frac{2}{n} < 2 + \varepsilon$.

Ce qui montre que $\inf\limits_{x \in F} d(a,x) = 2$. Donc $d(a,x) = 2$.

3) $\inf\limits_{x \in F} d(a,x)$ n'est pas un minimum car $\forall x \in F :\ d(a,x) > 2$ et donc $\nexists x \in F : d(a,x) = 2$, i.e: le inf n'est pas attient.

Théorème 2.3.1 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de préhilbertien et $\varnothing \neq K \subset H$ une partie non vide de H, convexe et complète, alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_K \in K$ tel que*

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\| . \tag{2.3.1}$$

On appelle x_K la projection orthogonal sur K de x.

Ce théorème permet de définir une application $P_K : H \longrightarrow K$, appelée opérateur de projection sur le convexe fermé K où $x_K = P_K(x) = P_K x$.

De plus, x_K est caractérisé par la propriété suivante

$$x_K = P_K x \iff x_K \in K \text{ et } \forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, y - x_K \rangle \leqslant 0. \tag{2.3.2}$$

Preuve. *1)* Existance et unicité de x_K : Pour tout $x \in H$, on pose

$$\rho = d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x,y) = \inf_{y \in K} \|x - y\| .$$

On sait que si $A, B \subset \mathbb{R}_+$ alors $\inf(AB) = \inf A . \inf B$ et en particulier on a : $\inf(A^2) = (\inf A)^2$.

Ce qui montre que : $\rho^2 = \inf\limits_{y \in K} \|x - y\|^2$.

D'après la propriété caractéristique de la borne inférieure on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in K \ : \rho^2 \leqslant \|x - x_\varepsilon\|^2 < \rho^2 + \varepsilon.$$

En particulier on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in K \ : \rho^2 \leqslant \|x - x_n\|^2 < \rho^2 + \frac{1}{n}.$$

On va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est de Cauchy.

En effet, en utilisant l'identité du parallélogramme, $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\|(x - x_p) + (x - x_q)\|^2 + \|x_p - x_q\|^2 = 2(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2). \quad ...(1)$$

Comme K est convexe et $x_p, x_q \in K$ on a :$\frac{x_p+x_q}{2} \in K$. Donc

$$\|(x - x_p) + (x - x_q)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2 \geqslant 4\rho^2. \quad ......(2)$$

D'autre part on a aussi :

$$\|x - x_p\|^2 < \rho^2 + \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \|x - x_q\|^2 < \rho^2 + \frac{1}{q}. \quad ......(3)$$

(1), (2) et (3) nous donnent :

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\|^2 \quad &< \quad 2(\rho^2 + \frac{1}{p}) + 2(\rho^2 + \frac{1}{q}) - 4\rho^2 \\ &\Longrightarrow \quad \|x_p - x_q\|^2 < 2(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}), \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Il est facile de voir maintenant que

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon \quad &> \quad 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall p \geqslant n_0 \implies \frac{1}{p} < \frac{\varepsilon^2}{4} \\ \forall\varepsilon \quad &> \quad 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \forall q \geqslant n_1 \implies \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon^2}{4} \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ quelconque on peut choisir par exemple $n_2 = \max(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^*$ de sorte que

$$\|x_p - x_q\|^2 < 2(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) < \varepsilon^2.$$

Ce qui montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset K$ est de Cauchy.

Or K est un fermé dans H qui est complet, d'où K est aussi complet et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans K (et bien sur sa limite est unique) i.e :

$$\exists! x_K \in K : \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_K\|^2 = 0.$$

2) Propriété de x_K *:* Montrons maintenant que ce x_K satisfait

$$\|x - x_K\| = \min_{y\in K} \|x - y\| = \rho.$$

On a montrer plus haut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \rho^2 \leqslant \|x - x_n\|^2 < \rho^2 + \frac{1}{n}.$$

En passant à la limite on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|^2 &= \|x - x_K\|^2 = \rho^2 = \inf_{y\in K} \|x - y\|^2, \\ &\Longrightarrow \|x - x_K\| = \inf_{y\in K} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Comme le inf est attient en $x_K \in K$ donc c'est un minimum d'où

$$\|x - x_K\| = \min_{y\in K} \|x - y\|.$$

3) La propriété caractéristique de x_K *:*

$\Longrightarrow$) Comme K est convexe alors

$$\forall \alpha \in]0, 1], \forall y \in K : \alpha y + (1 - \alpha)x_K = x_K + \alpha(y - x_K) \in K.$$

D'après (2.3.1) on a donc

$$\|x - x_K\|^2 \leqslant \|(x - x_K) - \alpha(y - x_K)\|^2, \ \forall \alpha \in]0, 1] \text{ et } \forall y \in K.$$

En utilisant (2.1.28) on trouve que $\forall y \in K$:

$$\begin{aligned} \|x - x_K\|^2 &\leqslant \|x - x_K\|^2 + \alpha^2 \|y - x_K\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re} \langle x - x_K, y - x_K\rangle, \quad \forall \alpha \in]0, 1] \\ &\Longrightarrow \operatorname{Re} \langle x - x_K, y - x_K\rangle \leqslant \frac{\alpha}{2} \|y - x_K\|^2, \quad \forall \alpha \in]0, 1]. \end{aligned}$$

Ce qui montre qu'on a nécessairement (en faisons tendre α à zéro)

$$\forall y \in K, \quad \operatorname{Re} \langle x - x_K, y - x_K\rangle \leqslant 0.$$

$\Longleftarrow$) Supposons que

$$\forall y \in K, \quad \operatorname{Re} \langle x - x_K, y - x_K\rangle \leqslant 0.$$

Or on a : $\forall y \in K : \|x - y\|^2 = \|(x - x_K) - (y - x_K)\|^2 = \|x - x_K\|^2 + \|y - x_K\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - x_K, y - x_K\rangle$.

Ce qui nous donne :

$$\forall y \in K : \|x-y\|^2 - \|x-x_K\|^2 = \|y-x_K\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-x_K, y-x_K\rangle \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \forall y \in K : \|x-x_K\|^2 \leqslant \|x-y\|^2 \\ &\Longrightarrow \quad \forall y \in K : \|x-x_K\| \leqslant \|x-y\| \\ &\Longrightarrow \quad \|x-x_K\| = \min_{y\in K} \|x-y\|, \end{aligned}$$

Car on a la propriété suivante :

$$a \in A \text{ et } a \text{ est un minorant de } A \iff a = \min A.$$

Donc on a bien montrer que $x_K = P_K(x)$. ■

Corollaire 2.3.1 *Si K est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H, alors :*

$$\begin{aligned} \textit{1)} \qquad x_K &= P_K x \iff x_K \in K \ \textit{et} \ \forall y \in K : \ \langle x-x_K, y\rangle = 0 \\ &\iff x_K \in K \ \textit{et} \ (x-x_K) \in K^{\perp}. \end{aligned}$$

2) L'application $P_K : H \longrightarrow K$ est linéaire.

Preuve. 1) $\Longrightarrow$) K est un sous espace fermé donc K un conve fermé et on peut appliquer le théorème précédent on donc :

$$\forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x-x_K, y-x_K\rangle \leqslant 0,$$

où x_K est la projection orthogonal de x sur K.

Il est facile de vérifier la propriété suivante (Algèbre linéaire) qui est vrai pour un sous espace et non pour un convexe :

si G est un sous espace et $a \in G$ alors :

$$a + G = \{a + x : x \in G\} = G. \tag{2.3.3}$$

$$\lambda G = \{\lambda x : x \in G\} = G \text{ où } \lambda \in \Bbbk - \{0\}. \tag{2.3.4}$$

En remarquant que $-x_K \in K$ et en utilisant (2.3.3) on a donc :

$$-x_K + K = K.$$

$$\Longrightarrow \forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, y\rangle \leqslant 0. \tag{2.3.5}$$

En utilisant (2.3.4) on a aussi :

$$\begin{aligned} \forall y \quad \in \quad & K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, -y\rangle = -\operatorname{Re}\langle x - x_K, y\rangle \leqslant 0 \\ \Longrightarrow \quad & \forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, y\rangle \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

De (2.3.5) et (2.3.6) on déduit que :

$$\forall y \in K : \operatorname{Re}\langle x - x_K, y\rangle = 0. \tag{2.3.7}$$

Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ cela suffit pour prouver cette implication.

Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ en utilise (2.3.4) et on remarque que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} iz = -\operatorname{Im} z$$

Donc on trouve que :

$$\forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, iy\rangle = -\operatorname{Re} i\,\langle x - x_K, y\rangle = \operatorname{Im}\langle x - x_K, y\rangle \leqslant 0.$$

Et de même on voit que

$$\forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, -iy\rangle = \operatorname{Re} i\,\langle x - x_K, y\rangle = -\operatorname{Im}\langle x - x_K, y\rangle \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \forall y \in K : \ \operatorname{Im}\langle x - x_K, y\rangle \geqslant 0.$$

Ce qui montre que :

$$\forall y \in K : \ \operatorname{Im}\langle x - x_K, y\rangle = 0. \tag{2.3.8}$$

De (2.3.7) et (2.3.8) on déduit que :

$$\forall y \in K : \ \langle x - x_K, y\rangle = 0.$$

$\Longleftarrow$) Supposons que $x_K \in K$. On a :

$$\begin{aligned} \forall y \quad \in \quad & K : \ \langle x - x_K, y\rangle = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \forall y \in K : \ \langle x - x_K, y - x_K\rangle = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \forall y \in K : \ \operatorname{Re}\langle x - x_K, y\rangle \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre, en appliquant le théorème précédent, que x_K est la projection orthogonal de x sur K, i.e : $x_K = P_K x$.

2) On va montrer que :

$$P_K(\alpha x_1 + x_2) = \alpha P_K x_1 + P_K x_2.$$

On pose

$$\begin{aligned} P_K x_1 &= y_1, && (2.3.9) \\ P_K x_2 &= y_2, && (2.3.10) \\ P_K(\alpha x_1 + x_2) &= y_3. && (2.3.11) \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} (2.3.9) &\iff \forall y \in K : \langle x_1 - y_1, y\rangle = 0, \text{ et} \\ (2.3.10) &\iff \forall y \in K : \langle x_2 - y_2, y\rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (2.3.9) \text{ et } (2.3.10) &\implies \forall y \in K : \alpha \langle x_1 - y_1, y\rangle + \langle x_2 - y_2, y\rangle = 0 \\ &\implies \forall y \in K : \langle (\alpha x_1 + x_2) - (\alpha y_1 + y_2), y\rangle = 0 \end{aligned}$$

et comme $(\alpha y_1 + y_2) \in K$ donc :

$$P_K(\alpha x_1 + x_2) = \alpha y_1 + y_2 = \alpha P_K x_1 + P_K x_2.$$

Ce qui montre que P_K est linéaire. ■

Proposition 2.3.1 *$K \subset H$ étant un convexe fermé non vide, P_K est continue et faiblement contractante, i.e :*

$$\forall x, y \in H, \ \ \|P_K x - P_K y\| \leqslant \|x - y\|. \tag{2.3.12}$$

Preuve. $\forall x, y \in H$, on a :

$$\begin{aligned} x - y &= x - x_K + x_K + y_K - y_K - y = (x_K - y_K) + (x - x_K + y_K - y) \\ &\implies \|x - y\|^2 = \|x_K - y_K\|^2 + \|x - x_K + y_K - y\|^2 \\ &\quad +2\,\mathrm{Re}\,\langle x_K - y_K, x - x_K + y_K - y\rangle && (2.3.13) \end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant de montrer que :

$$\operatorname{Re}\langle x_K - y_K, x - x_K + y_K - y\rangle \geqslant 0; \tag{2.3.14}$$

car dans ce cas, d'après (2.3.13) on voit facilement que :

$$\|x-y\|^2 \geqslant \|x_K - y_K\|^2 = \|P_K x - P_K y\|^2,$$

ce qui prouve notre proposition désirée (2.3.12).

En applicant la propriété caractéristique (2.3.2) de x_K et de y_K on obtient :

$$\begin{cases} P_K x = x_K \implies \operatorname{Re}\langle x - x_K, y_K - x_K\rangle \leqslant 0 & (\text{on a choisi ici } y = y_K \in K) \\ P_K y = y_K \implies \operatorname{Re}\langle y - y_K, x_K - y_K\rangle \leqslant 0 & (\text{on a choisi ici } y = x_K \in K) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -\operatorname{Re}\langle x - x_K, y_K - x_K\rangle = \operatorname{Re}\langle x - x_K, x_K - y_K\rangle = \operatorname{Re}\langle x_K - y_K, x - x_K\rangle \geqslant 0, \\ -\operatorname{Re}\langle y - y_K, x_K - y_K\rangle = \operatorname{Re}\langle y_K - y, x_K - y_K\rangle = \operatorname{Re}\langle x_K - y_K, y_K - y\rangle \geqslant 0. \end{cases}$$

$\implies \operatorname{Re}\langle x_K - y_K, x - x_K\rangle + \operatorname{Re}\langle x_K - y_K, y_K - y\rangle$

$= \operatorname{Re}\langle x_K - y_K, x - x_K + y_K - y\rangle \geqslant 0.$

Ce qui montre bien (2.3.14) et achève la démonstration. ■

Remarque 2.3.2 *Si K est un sous espace fermé de H alors, en utilisant (2.3.12) avec $y = 0$, l'application P_K satisfait :*

$$\forall x \in K : \|P_K x\| \leqslant \|x\|.$$

Donc elle est borné.

Théorème 2.3.2 *Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $G \subset H$ un sous-espace fermé. Alors*

$$\begin{aligned} H &= G \oplus G^{\perp}, \ \textit{i.e}, \ \forall x \in H : \\ \exists! x_1 &\in G, \ \ \exists! x_2 \in G^{\perp} \ \textit{tels que} : \ x = x_1 + x_2, \\ \textit{où} \quad x_1 &= P_G x \ \ \textit{et} \ \ x_2 = P_{G^{\perp}} x. \\ \textit{Donc} \quad &: \ \|x - x_1\| = \min_{y \in G} \|x - y\| \ \ \textit{et} \ \ \|x - x_2\| = \min_{y \in G^{\perp}} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Preuve. ([3]) Comme tous un sous-espace est un convexe alors en appliquant le théorème précédent on prouve l'existance et l'unicité de $x_1 \in G$ tel que $x_1 = P_G x$.

On pose $x_2 = x - x_1$.

Soit $y \in G$ un élément quelconque non nul. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $x_1 + \lambda y \in G$ de sorte que

$$\|x_2 - \lambda y\|^2 = \|x - (x_1 + \lambda y)\|^2 \geqslant \inf_{y \in G} \|x - y\|^2 = \rho^2 = \|x - x_1\|^2$$

Or on a :

$\|x - (x_1 + \lambda y)\|^2 = \langle (x - x_1) - \lambda y, (x - x_1) - \lambda y \rangle = \|x - x_1\|^2 - \overline{\lambda} \langle x_2, y \rangle - \lambda \langle y, x_2 \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$.

Ce qui montre que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, -\overline{\lambda} \langle x_2, y \rangle - \lambda \langle y, x_2 \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geqslant 0.$$

En particulier pour $\lambda = \frac{\langle x_2, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ on en déduit que

$$\begin{aligned} -\frac{|\langle x_2, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x_2, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x_2, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} &= -\frac{|\langle x_2, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geqslant 0, \forall y \in G - \{0\} \\ &\Longrightarrow \forall y \in G, \quad \langle x_2, y \rangle = 0 \Longrightarrow x_2 = (x - x_1) \in G^{\perp}. \end{aligned}$$

L'unicité de x_2 découle de l'unicité de x_1. ■

<u>Exercice n°19 :</u> Soient $(X, \|.\|)$ un e.v.n et $f \in X' - \{0\}$.

Montrer que $\forall x \in X$ on a :

$$d(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

<u>Exercice n°20 :</u> Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et A un sous-espace de H.

Montrer que :

$$x \in A^{\perp} \iff \forall y \in A : \|x - y\| \geqslant \|x\|.$$

<u>Exercice n°21 :</u> Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, $G_1, G_2 \subset H$ deux convexes fermés non vides tels que $G_1 \subset G_2$ et $x \in H$.

A) Le but de cette partie est de montrer que :

$$\|P_{G_1} x - P_{G_2} x\| \leqslant 2 \left[d(x, G_1)^2 - d(x, G_1)^2 \right]. \tag{2.3.15}$$

1) Montrer que :

$$\|x - P_{G_2}x\| \leqslant \|x - P_{G_1}x\| \,.$$

2) En posant $P_{G_1}x = x_1$ et $P_{G_2}x = x_2$ déduire que :

$$\|x - x_2\| \leqslant \left\| x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \leqslant \|x - x_1\| \,.$$

3) Montrer, à l'aide de l'identité du parallélogramme l'inégalité (2.3.15).

B) On considère maintenant $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de convexes fermés de H tels que

$$F_1 \neq H, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad x_n = P_{F_n}x \text{ (projection de } x \text{ sur } F_n \text{ où } x \in H - F_1).$$

1) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.

2) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x_0, la projection de x sur F.

2.4 Les théorèmes de Riesz et de Lax-Milgram

2.4.1 Théorème de représentation de Riezs

Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Il est claire que $\forall a \in H$, la forme

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R} \setminus f(x) = \langle x, a \rangle \,, \quad \forall x \in H,$$

est linéaire et continue (ceci découle de la bilinéarité du produit scalaire et de sa continuité).

Théorème 2.4.1 *([2]) Soit $f \in H^{'}$ (forme linéaire et continue), alors il existe un élément unique $a_f \in H$ telle que :*

1) $f(x) = \langle x, a_f \rangle \,, \ \forall x \in H,$ *2)* $\|f\|_{H'} = \|a_f\|_H \,.$

Corollaire 2.4.1 *L'application $F : H^{'} \longrightarrow H \setminus F(f) = a_f$ est une isomorphisme continue.*

2.4.2 Théorème de Lax-Milgram et de Stampacchia

Définition 2.4.1 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Une forme biliéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* (\alpha > 0)$ telle que :*

$$a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

Théorème 2.4.2 *(Lax-Milgram). Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et une forme biliéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et coercive, i.e,*

$$\begin{aligned} \exists M &> 0 : |a(u,v)| \leqslant M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H \\ a(v,v) &\geqslant \alpha \|v\|^2, \qquad \forall v \in H. \end{aligned}$$

alors pour tout $L \in H'$, le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ telle que :} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

admet une solution unique.

De plus si la forme $a(.,.)$ est symétrique alors (2.4.1) est équivalant au problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ telle que :} \\ \min\limits_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \right\} = \frac{1}{2} a(u,u) - L(u). \end{cases}$$

Remarque 2.4.1 *Si une forme bilinéaire a est continue et coercive alors elle induit dans H une norme définie par :*

$$\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}.$$

qui est équivalente à celle induite par le produit scalaire.

En effet on a :

$$\sqrt{\alpha} \|u\|_H \leqslant \|u\|_a = \sqrt{a(u,u)} \leqslant \sqrt{M} \|u\|_H .$$

Théorème 2.4.3 ***(Stampacchia)*** *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et une forme biliéaire $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et coercive. Soit K un convexe fermé et non vide, alors pour tout $L \in H'$, le problème suivant*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que :} \\ a(u, v-u) \geqslant L(v-u), \quad \forall v \in K, \end{cases}$$

admet une solution unique.

*De plus si la forme $a(.,.)$ est symétrique alors (**??**) est équivalant au problème suivant*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que :} \\ \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)-L(v)\right\} = \frac{1}{2}a(u,u)-L(u). \end{cases}$$

<u>Exercice n°22 :</u>

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$ et $E \subset H$.

1) Montrer que : $E^{\perp} = (\overline{VectE})^{\perp}$

2) En déduire que : $E^{\perp\perp} = \overline{VectE}$

3) On pose $G = \{x \in H : \langle x,a \rangle = \langle x,b \rangle\}$ où $\{a,b\} \subset H - \{0\}$.

a) Montrer que : $\{a\}^{\perp} \cap \{b\}^{\perp} = \{a,b\}^{\perp} \subset G$.

b) Montrer que : $G^{\perp} = \{\lambda(a-b) : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

c) En déduire que : $\forall x, y \in G^{\perp}, \quad |\langle x,y \rangle| = \|x\| \, \|y\|$.

Réponse :

1) On a : $E \subset VectE$ (Algèbre2) $\subset \overline{VectE}$ (Topo) $\Longrightarrow E \subset \overline{VectE}$

$(A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}) \quad \Longrightarrow \overline{VectE}$
$^{\perp} \subset E^{\perp}$ ....(1)

D'autre part, pour tous x on a : $x \in E^{\perp} \overset{déf}{\Longleftrightarrow} x \perp E$

(TD n°2, Ex n°2, q n° 4) $\Longrightarrow x \perp \overline{VectE} \overset{déf}{\Longleftrightarrow} x \in \overline{VectE}$
$^{\perp}$.

Ce qui montre que $E^{\perp} \subset \overline{VectE}^{\perp}$ .... (2)

D'après (1) et (2) on a : $E^{\perp} = \overline{VectE}^{\perp}$

2) *En déduire que :* $E^{\perp\perp} = \overline{VectE}$ .... **(1 point)**

<u>Rép :</u> On a : $E^{\perp} = \overline{VectE}^{\perp}$. Donc $(A = B \Longrightarrow A^{\perp} = B^{\perp})$ $E^{\perp\perp} = \overline{VectE}^{\perp\perp}$
.............(1)

Mais (TD n°2, Ex n°2, q n° 6) $\overline{VectE}^{\perp\perp} = \overline{VectE}$ .... (2)

D'après (1) et (2) on a : $E^{\perp\perp} = \overline{VectE}$.

3) Soit $\{a, b\} \subset H - \{0\}$. On pose :

$$G = \{x \in H : \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle\}.$$

a) *Montrer que :* $\{a\}^{\perp} \cap \{b\}^{\perp} = \{a, b\}^{\perp} \subset G$. ....
(2 points)

Rép : $x \in \{a\}^{\perp} \cap \{b\}^{\perp} \iff x \in \{a\}^{\perp} \wedge x \in \{b\}^{\perp}$

$$\iff x \perp a \wedge x \perp b$$
$$\iff \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle = 0$$
$$\iff x \in \{a, b\}^{\perp}$$

Donc $\{a\}^{\perp} \cap \{b\}^{\perp} = \{a, b\}^{\perp}$.

$x \in \{a, b\}^{\perp} \iff \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle = 01$

$\langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle = 0 \implies \not\Leftarrow x \in G$

Ce qui montre que $\{a, b\}^{\perp} \subset G$.

b) *Trouvez* $F \subset H$ *telque* $G = F^{\perp}$ *puis montrer que :* $G^{\perp} = \{\lambda a - \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\}$. ....
(4 points)

Rép : $x \in G \iff \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$

$$\iff \langle x, a - b\rangle = 0$$
$$\iff x \in \{a - b\}^{\perp} = F^{\perp} \quad \text{où} \quad F = \{a - b\}.$$

Ce qui montre que $G = \{a - b\}^{\perp} = F^{\perp}$. Donc (question 2) $G^{\perp} = F^{\perp\perp} = \overline{VectF}$ . ... (1)

$\dim VectF = 1 < +\infty \implies VectF$ est fermé

$$\implies \overline{VectF} = VectF = \{y = \lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

.... (2)

D'après (1) et (2) on a : $G^{\perp} = \{\lambda a - \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

c) *En déduire que :* $\forall x, y \in G^{\perp}, \quad |\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$ . ...
(1 point)

Rép : $x, y \in G^{\perp} = \{\lambda a - \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\} \implies \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} : x = \alpha(a-b), y = \beta(a-b)$
$\implies |\langle x, y\rangle| = |\langle \alpha a - b, \beta a - b\rangle| = \left|\alpha\overline{\beta}\,\langle (a-b),(a-b)\rangle\right| =$
$|\alpha|\left|\overline{\beta}\right| |\langle a-b, a-b\rangle|$
$= |\alpha| |\beta| \|a-b\|^2 = |\alpha| \|a-b\| . |\beta| \|a-b\| = \|x\| \|y\| .$

Exercice n°23 :

On note le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 par :

$$M_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \setminus a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

1) Est ce que l'application

$$\|.\| : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \|A\| = \|(a_{ij})\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 2} |a_{i1} + a_{i2}| , \text{ est une norme ?}$$

2) Montrer que l'application

$$\langle ., .\rangle : M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \langle A, B\rangle = Tr(B^* A),$$

est un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{C})$, où B^* est la matrice adjoint de B définie par :

$$B^* =: \overline{{}^tB} = (\overline{b_{ji}})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{21}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix}$$

3) Montrer que $[M_2(\mathbb{C}), \langle ., .\rangle]$ est un espace de Hilbert.

Soient $(H, \langle ., .\rangle_1)$ un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien et $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset H - \{0\}$.

On pose :

$$f : (H, \langle ., .\rangle_1) \longrightarrow [M_2(\mathbb{C}), \langle ., .\rangle] \setminus f(x) = \begin{pmatrix} \langle b_1, x\rangle & \langle b_2, x\rangle \\ \langle b_3, x\rangle & \langle b_4, x\rangle \end{pmatrix}, \quad \forall x \in H.$$

4) Montrer que f est une application semi-linéaire et continue.

5) Determiner le sous espace $\ker f$.

Exercice n°24 :

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ et $\emptyset \neq A \subset H$.

1) Montrer que : $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

2) H étant un $\mathbb{k}-$espace vectoriel, on suppose maintenant que $\langle .,. \rangle_1$, $\langle .,. \rangle_2$ .... $\langle .,. \rangle_n$ sont des produits scalaire sur H.

a) Est ce que l'application $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{k} \setminus \langle x,y \rangle = \langle x,y \rangle_1 + 2 \langle x,y \rangle_2 +$ .... $+n \langle x,y \rangle_n$ est un produit scalaire ?

b) On pose :

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \{x \in H : \langle x,y \rangle = 0, \ \ \forall y \in A\} \\ A^{\perp_j} &= \left\{x \in H : \langle x,y \rangle_j = 0, \ \ \forall y \in A\right\}, \quad j = 1, 2, \ ..., n. \end{aligned}$$

c) Est ce que : $A^{\perp} \subset (\bigcap\limits_{j=1}^{n} A^{\perp_j})$? $(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A^{\perp_j}) \subset A^{\perp}$? $A^{\perp} = (\bigcap\limits_{j=1}^{n} A^{\perp_j})$?

<u>Exercice n°25 :</u>

Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $G \subset H$ un sous-espace fermé de H. On note P_G est la projection orthogonale sur G.

1) Montrer que $Ker P_G = G^{\perp}$.

2) Montrer que P_G est une application linéaire borné et que $\|P_G\|_{\mathcal{L}(H,G)} = 1$.

3) Montrer que :

$$\forall x, y \in H : \langle P_G x; y \rangle = \langle x, P_G y \rangle .$$

<u>Exercice n°26 :</u> Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert réel et H' son dual topologique. On pose :

$$\langle .,. \rangle_{H'} : H' \times H' \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \langle f,g \rangle_{H'} = \langle a_f, a_g \rangle ,$$

où $f(x) = \langle x, a_f \rangle$ et $g(x) = \langle x, a_g \rangle$, $\forall x \in H$.

Montrer que l'application $\langle .,. \rangle_{H'}$ définie un produit scalaire sur H'.

2.5 Bases Hilbertiennes

2.5.1 Espaces vectoriels de dimension infinie

Définition 2.5.1 *Soit $(H, +, .)$ un espace un espace vectoriel sur $\Bbbk$ et une suite de vecteurs $E = (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H$.*

On dit que l'élément $x \in H$ est une combinaison linéaire *de E si x peut être ecrit sous forme d'une combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'éléments de E.*

Ce qui revient à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i e_i \quad \text{où } \alpha_i \in \Bbbk.$$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de E est le sous espace vectoriel engendré par E :

$$Vect\ E = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i e_i \quad \backslash \quad n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha_i \in \Bbbk \right\}.$$

C'est le plus petit sous espace vectoriel qui contient E, i.e c'est l'intersection de toutes les sous espace vectoriels qui contient E.

Définition 2.5.2 *Soit $(H, +, .)$ un espace un espace vectoriel. On dit que la suite $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H$ est libre (i.e constitué par des vecteurs linéairement indépendants) si toutes ses sous suites **finies** sont libres.*

Ce qui revient à dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Définition 2.5.3 *Un espace vectoriel est dite de demension infini s'il contient une infinité de vecteurs qui sont linéairement indépendants.*

2.5.2 Système orthogonal - orthonormal

Définition 2.5.4 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\Bbbk$ des nombres réels ou des complexes la famille $E = (e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de H est dite **orthogonale** si*

$$\forall (i, j) \in I^2 : i \neq j \implies e_i \perp e_j. \text{ i.e.:}$$

$$\forall (i, j) \in I^2 : i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Elle est dite ***orthonormale*** *si elle est orthogonale et tous ses vecteurs sont de norme* 1*; i.e. :*

$$\forall (i,j) \in I^2 \ : \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases} .$$

Exemple 2.5.1 *L'espace $P[X]$ de toutes les polynômes de la variable x est un espace vectoriel de demension infini et la suite des polynômes*

$E = \{e_n : e_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base orthonormale de $P[X]$.*

Définition 2.5.5 *Dans un espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$, une famille $E = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de X est dite totale si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans $(X, \|.\|)$, i.e, $\overline{Vect(E)} = X$.*

Exemple 2.5.2 *Dans l'espace $(X = C(\ [0,1]), \|.\|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0,1]$muni de la norme infinie, la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille totale.*

En effet l'espace vectoriel qu'elle engendre est l'ensemble des polynômes, qui est dense dans $(C(\ [0,1]), \|.\|_\infty)$ d'après le théorème de Weierstrass.

Définition 2.5.6 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur le corps $\Bbbk$ des nombres réels ou des complexes et une famille $E = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de H. On dit que $E = (e_i)_{i\in I}$ est une* ***base de Hilbert*** *ou* ***base hilbertienne*** *de H si*

1) $E = (e_i)_{i\in I}$ est orthonormale.

2) la famille est de plus « complète » ou « totale » au sens précédant :

l'espace vectoriel engendré par $E = (e_i)_{i\in I}$ est dense dans H, i.e, $\overline{Vect(E)} = H$.

Remarque 2.5.1 *Dans le cas où H est de dimension finie, cette définition coïncide avec celle de base orthonormale.*

Une base de Hilbert (du nom de David Hilbert), ou encore base hilbertienne, est une généralisation aux espaces préhilbertiens de la notion classique de base orthonormale en algèbre linéaire, pour les espaces euclidiens (ou hermitiens dans le cas complexe), lesquels sont de dimension finie.

Ainsi, en dimension infinie, une base de Hilbert B de H n'est pas une base au sens algébrique du terme, mais une base orthonormale d'un sous-espace dont seule l'adhérence est égale à H.

Comme dans le cas des bases habituelles, il s'agit de pouvoir décomposer n'importe quel vecteur de l'espace en somme de vecteurs colinéaires à ceux de la famille choisie. Cependant dans le cas d'une base de Hilbert, on ne peut pas (généralement) écrire une égalité entre le vecteur décomposé et une combinaison linéaire finie des vecteurs de la base : on doit généralement se contenter d'une série dont les termes sont colinéaires aux vecteurs de la base, et convergeant vers le vecteur à décomposer (la notion de convergence d'une série a ici un sens car un espace de Hilbert est en particulier un espace vectoriel normé).

Théorème 2.5.1 *([3]) Pour tout espace de Hilbert séparable (i.e, il existe une famille dénombrable dense) il y existe une base Hilbertienne.*

Proposition 2.5.1 *Toute famille orthogonale d'un espace préhilbertien est libre.*

Lemme 2.5.1 $(e_i)_{i\in I_0}$ *une famille orthogonale finie* $\Longrightarrow \left\|\sum\limits_{i\in I_0}\alpha_i e_i\right\|^2 = \sum\limits_{i\in I_0}|\alpha_i|^2\|e_i\|^2.$

Démonstration. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale et $I_0 \subset I$ une partie finie de I. Il nous suffit, par définition, de montrer que $(e_i)_{i\in I_0}$ est libre.

Supposons que $\sum\limits_{i\in I_0}\alpha_i e_i = 0$ et montrons que $\forall \in I_0 : \alpha_i = 0$.

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i\in I_0}\alpha_i e_i\right\|^2 &= \left\langle \sum_{i\in I_0}\alpha_i e_i, \sum_{j\in I_0}\alpha_j e_j\right\rangle = 0 = \sum_{i\in I_0}\alpha_i\left\langle e_i, \sum_{j\in I_0}\alpha_j e_j\right\rangle \\
&= \sum_{i\in I_0}\alpha_i\left[\sum_{j\in I_0}\overline{\alpha_j}\langle e_i, e_j\rangle\right] = \sum_{i\in I_0}\alpha_i\overline{\alpha_j}\langle e_i, e_i\rangle \quad (\text{car } i\neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0) \\
&\Longrightarrow \sum_{i\in I_0}|\alpha_i|^2\|e_i\|^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \forall \in I_0 : |\alpha_i|^2\|e_i\|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \forall \in I_0 : \alpha_i = 0.$$

■

2.5.3 Séries de Fourier et l'inégalité de Bessel-Parseval

Définition 2.5.7 *Soient* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite orthonormale dans un espace préhilbertien* $(H, \langle ., .\rangle)$ *et* $x \in H$*.Les nombres*

$$a_i = \langle x, .e_i\rangle\,, \quad i\in\mathbb{N}^*$$

seront appelés les coefficients de Fourier de l'élément x.

Théorème 2.5.2 *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'un espace de Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$ et $x \in H$.*

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle \, e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad et \quad H_n = Vect\,\{e_1, \ldots, e_n\}\,.$$

Alors S_n est la projection orthogonale de x sur H_n, i.e :

$$P_{H_n} x = S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle \, e_i \ \text{et donc :} \quad \|P_{H_n} x\| = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2\,.$$

et donc

$$d(x;\ H_n) = \min_{y\in H_n} \|x - y\| = \|x - S_n\|\,. \tag{2.5.1}$$

Ce qui veut dire

$$\forall \lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_1 \in \mathbb{k} : \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle \, e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|.$$

Preuve. On va utiliser le théorème de la décomposotion orthogonale de l'espace H.

Il est claire que H_n est un sous espace de H de dimension finie donc fermé ce qui nous donne :

$$H = H_n \oplus H_n^{\perp}.$$

On voit que

$$x = S_n + \ \ (x - S_n) \quad \text{avec } S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle \, e_i \in H_n.$$

D'aprés l'unicité de la décomposition de x (voir théorème 2.3.2), il nous suffit maitenant de montrer que $(x - S_n) \in H_n^{\perp}$.

On sait que $x \perp E \iff x \perp VectE$, or $H_n = Vect\,\{e_1, \ldots, e_n\}$ donc :

$$\begin{aligned} (x - S_n) \quad \in \quad & H_n^{\perp} \iff (x - S_n) \perp H_n \\ \iff \quad & \forall j \in \{1, 2, ..., n\} : (x - S_n) \perp e_j. \end{aligned}$$

$\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle x - S_n, e_j \rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j \right\rangle = \langle x, , e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_j \rangle \\ \langle x, , e_j \rangle - a_j &= \langle x, , e_j \rangle - \langle x, , e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

(car par hypothèse la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$une suite orthonormale et donc $\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \ i \neq j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Ce qui montre que $(x - S_n) \perp H_n$ et termine la démonstration. ■

Théorème 2.5.3 ***(Inégalité de Bessel)*** *Soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite orthonormale d'un espace de Hilbert* $(H, \langle ., .\rangle)$.

$\forall x \in H$: *la série* $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ *est convergente et on a :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 . \quad \textbf{\textit{(Inégalité de Bessel)}}$$

Preuve. Soit $x \in H$. On définie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 .$$

D'après le théorème précédant on a :

$$\|x - S_n\| = \min_{y\in H_n} \|x - y\| \text{ et } S_n \perp (x - S_n) \text{ où } S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i\rangle\, e_i.$$

En utilisant le thérème de pythagore on a donc :

$$\|x\|^2 = \|x - S_n + S_n\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \|S_n\|^2 \geqslant \|S_n\|^2 . \tag{2.5.2}$$

D'après le Lemme 2.5.1 on a donc:

$$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = u_n \leqslant \|x\|^2 . \tag{2.5.3}$$

Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\|x\|^2$. On peut voire facilement qu'elle est aussi croissante car

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 + |\langle x, e_{n+1}\rangle|^2 = u_n + |\langle x, e_{n+1}\rangle|^2 \geqslant u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente et de plus

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

C'est exactement l'inagalité souhaitée.

On peut donner une autre démonstration de (2.5.2) et (2.5.3) comme suit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \|x - S_n\|^2 = \langle x - S_n, x - S_n \rangle = \|x\|^2 - \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle e_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle e_i, x \right\rangle + \|S_n\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, .e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle \langle e_i, x \rangle + \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle e_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 .
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 . \blacksquare$$

Théorème 2.5.4 *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ et une suite numérique $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

La série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ est convergente dans $(H, \langle ., . \rangle)$ si et seulement si la série numérique $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ est convergente dans $(\Bbbk, |.|)$.

Preuve. $\Longrightarrow$) Supposons que la série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ est convergente dans $(H, \langle ., . \rangle)$. Ce qui veut dire que :

$$\begin{aligned}
\exists ! x &\in H : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = x \\
&\Longrightarrow \exists ! x \in H : \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = x.
\end{aligned}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\langle x, e_j \rangle &= \left\langle \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n, \\
\text{où } u_n &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n < j, \\ \alpha_j & \text{si } n \geqslant j. \end{cases}, \text{ car } (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est orthonormale.}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\forall j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\langle x, e_j \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = \alpha_j.$$

Donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 . \text{ (Inégalité de Bessel)}$$

D'où on a :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

Ce qui montre que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ est convergente dans $(\mathbb{k}, |.|)$ car la suite $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$ est croissante et bornée.

$\Longleftarrow$) Supposons que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ est convergente dans $(\mathbb{k}, |.|)$.

Donc la suite $s_n = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$ est de Cauchy car convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : \|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |\alpha_i|^2 = |s_{n+p} - s_n| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Ce qui montre que la suite $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ est de Cauchy dans $(H, \langle ., . \rangle)$ qui est complet donc convergente et achève la preuve. ■

Proposition 2.5.2 *Soit $E = (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$. $\forall x \in H$, la série de Fourier $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i \rangle e_i$ converge dans $(H, \langle ., . \rangle)$ (mais pas forcément vers x) et sa somme $S = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i \rangle e_i$ est la projection orthogonale de x sur $H_0 = \overline{Vect E}$.*

Démonstration. Il est claire, d'après les théorèmes 2.5.3 et 2.5.4 que la série de Fourier $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i \rangle e_i$ converge dans $(H, \langle ., . \rangle)$.

On pose : $S = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

On voit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i \rangle e_i \in Vect E$. Ce qui nous montre que :

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n \in H_0 = \overline{Vect E}.$$

Comme $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$, $x = S + (x - S)$ et $S \in H_0$, il nous suffit finalement de montrer que $(x - S) \perp H_0$.

$\forall j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\langle x - S, e_j\rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, e_j \right\rangle = \langle x, , e_j\rangle - \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_j\rangle \\ \langle x, , e_j\rangle - a_j &= \langle x, , e_j\rangle - \langle x, , e_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

Ce prouve que $(x - S) \perp E$ et donc $(x - S) \perp H_0$.

(car on sait que : $x \perp E \implies x \perp \overline{VectE}$). ■

Théorème 2.5.5 *Soit $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale d'un espace de Hilbert $(H, \langle ., .\rangle)$. Alors les asseration suivantes sont équivalentes :*

1) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne de H ($\overline{VectE} = H$).

2) $\forall x \in H : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i = x$.

3) $\forall x \in H : \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$. ***(L'égalité de Parseval)***

4) $E^\perp = \{e_n : n \in \mathbb{N}^*\}^\perp = VectE^\perp = \{0\}$.

5) $\forall x, y \in H : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle} = \langle x, y\rangle$.

Preuve. 1) $\implies$ 2)

Supposons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne de H donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale et $\overline{VectE} = H$.

Soit $x \in H$. D'après la proposition 2.5.2 la série de Fourier $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i\rangle e_i$ converge dans $(H, \langle ., .\rangle)$ et sa somme $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i\rangle e_i$ est la projection orthogonale de x sur $H_0 = \overline{VectE}$. Or $H_0 = \overline{VectE} = H$, donc $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, .e_i\rangle e_i = x$ car la projection orthogonale de x sur H est x lui même.

2) $\implies$ 3)

Supposons que $\forall x \in H : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i = x$ et soit $x \in H$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, .e_i\rangle e_i$. Donc $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = x$,ce qui veut dire :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x - S_n\|^2 = 0.$$

D'aprés le lemme (2.5.1) et comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|S_n\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \langle x, .e_i\rangle e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

En utilisant le théorème de pythagore on a

$$\begin{aligned}
\forall n \quad &\in \quad \mathbb{N}^* : \ \|x\|^2 = \|x - S_n + S_n\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \|S_n\|^2 \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0. \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

3) $\Longrightarrow$ 4)

Supposons que $\forall x \in H : \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$. Soit $y \in E^\perp = \{e_i : i \in \mathbb{N}^*\}^\perp$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \quad &\in \quad \mathbb{N}^* : \langle y, e_n\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{i=1}^{n} |\langle y, e_i\rangle|^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow\infty n} u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty n} \sum_{i=1}^{n} |\langle y, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, e_i\rangle|^2 = \|y\|^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad y = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $E^\perp = \{e_i : i \in \mathbb{N}^*\}^\perp \subset \{0\}$. Donc $E^\perp = \{e_i : i \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$ car $\{0\} \subset E^\perp$ ($E^\perp$ etant un sous espace vectoriel de H).

4) $\Longrightarrow$ 5)

Supposons que $E^\perp = \{e_i : i \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$ et $x, y \in H$.

Or d'aprés les propriétés de l'orthogonalité on a $\forall E \subset H : E^\perp = VectE^\perp$.

$VectE^\perp = \{0\} \Longrightarrow VectE^{\perp\perp} = \overline{VectE} = \{0\}^\perp = H$. Ce qui montre que : 4) $\Longrightarrow$ 1) et par conséquent on a les équivalences :

1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 4). Donc, d'aprés 1) $\Longrightarrow$ 2), on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i \quad \text{et } y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle y,e_j\rangle e_j\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i,\ \sum_{j=1}^{n}\langle y,e_j\rangle e_j\right\rangle\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle e_i,\langle y,e_j\rangle e_j\rangle\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\overline{\langle y,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\left(\overline{\langle y,e_j\rangle}\right)\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}.
\end{aligned}$$

5) $\Longrightarrow$ 1)

Supposons que $\forall x,y\in H : \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}$. Pour $y=x$ on trouve 2). Or 2) $\Longleftrightarrow$ 1)

Donc on a bien montrer que : 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 4) $\Longleftrightarrow$ 5). ■

2.5.4 Systèmes orthonormés complets dans des espaces concrets

Exemple 1 :

On note par $l^2(\mathbb{C})$ l'ensemble de toutes les suites complexes de carrés sommables i.e,

$$l^2(\mathbb{C}) = \left\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{C} :\ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty\right\}.$$

D'après l'inégalité de Minkowski, à savoir :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2}.$$

$(l^2(\mathbb{C}),+,.)$ est un espace vectoriel. On peut verifier que

$$\|.\| : l^2(\mathbb{C})\times\ l^2(\mathbb{C})\longrightarrow\ \mathbb{C}\diagdown\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}$$

est une application qui définie un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{C})$.

On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* : e^{(n)}=\left\{e_k^{(n)}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}=\left\{\begin{array}{ll} e_k^{(n)}=1 & \text{si } k=n\\ e_k^{(n)}=0, & \text{si } k\neq n\end{array}\right\}\ \text{i.e,}\ \ e^{(n)}=(0,...,\underset{n^{i\grave{e}m}\text{ place}}{1},0,.....).$$

Il est facile de voire que la suite $E = (e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite orthonormal dans $l^2(\mathbb{C})$. En effet on a :

$$\begin{aligned} \forall n \quad &\in \quad \mathbb{N}^* : \left\|e^{(n)}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|e_k^{(n)}\right|^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \left\|e^{(n)}\right\| = 1. \end{aligned}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : n \neq m \implies \left\langle e^{(n)}, e^{(m)} \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^{(n)} \overline{e_k^{(m)}} = 0.$$

D'autre part cette suite est totale. Pour montrer cela il nous suffit de montrer que $E^{\perp} = \{0\}$.

$$\begin{aligned} x \quad &= \quad (x_1, ...x_n, ...) \in E^{\perp} \implies \forall n \in \mathbb{N}^* : \left\langle x, e^{(n)} \right\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{e_k^{(n)}} = x_n = 0 \\ &\Longrightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $E = (e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne dans $l^2(\mathbb{C})$ et on a :

$$\forall x \in l^2(\mathbb{C}) : x = \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle x, e^{(n)} \right\rangle e^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_n e^{(n)}.$$

C'est la décomposition de x sur la base Hilbertienne $E = (e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 2 : (sous forme d'exercice)

On pose : $C([-1,1]) = \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \diagdown f \text{ est continue sur } [-1,1]\}$.

1) Montrer que : $\quad f \neq 0 \implies \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx > 0.$

2) Montrer que l'application $\langle .,. \rangle : C([-1,1]) \times C([-1,1]) \longrightarrow \mathbb{C} \diagdown \ \langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$

définie un produit scalaire sur $C([-1,1])$.

3) On définie les Polynomes de Legendre par

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right].$$

Montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left[(x^2-1)^n\right] = (2n)!$.

b) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \neq n \implies \langle P_m, P_n \rangle = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \right\|^2 = (2^n n!)^2 \frac{2}{2n+1}$.

d) La suite $\left\{ e_n = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} P_n : n \in \mathbb{N} \right\}$ est une base Hilbertienne dans $C([-1,1])$.

Exercice n°27: Soient $(H, \langle .,. \rangle)$un espace préhilbertien et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de H telles que $\forall i, j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\langle x_i, y_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Montrer que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont libres.

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$quelconque, il nous suffit donc de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i &= 0 \implies \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right\rangle = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \langle x_i, y_j \rangle \right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overline{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 0 \\ &\implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Exercice n°28: Soit $(H, \langle .,. \rangle)$un $\mathbb{C}-$espace préhilbertien, et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille de n vecteurs de H de norme 1(i.e : $\forall k = 1...n, \ \|e_k\| = 1$) et tels que, pour tout $x \in H$, on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 .$$

1) Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille orthogonale.

2) Le but de cette question est de montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille génératrice de H.

Soit $x \in H$. On pose

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

a) Montrer que $\forall i \in \{1, 2, ...n\}$ on a : $\langle y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$.

b) En déduire que $\|x - y\|^2 = 0$ et que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille génératrice de H.

Exercice n°28 : (voir [8])

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne d'un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ et $(e_n^{'})_{n\in\mathbb{N}^*} \subset H$ une suite orthonormale de H.

Montrer que si la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left\| e_i - e_i^{'} \right\|^2$ est convergente alors la suite $(e_n^{'})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une base Hilbertienne d'un espace de H.

Chapitre 3

Introduction aux opérateurs linéaires bornés

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 *On appelle opérateur toute application d'un espace vectoriel vers un espace vectoriel.*

Si cette application est linéaire on dit que l'opérateur est linéaire.

Définition 3.1.2 *Soient* $(X, \|.\|), (Y, \|.\|)$,*deux e.v.n (espces vectoriels normés).*

On dit que l'opérateur est linéaire $f : (X, \|.\|) \longrightarrow (Y, \|.\|)$, *est borné si*

$$\exists M > 0 \text{ telle que : } \forall x \in E, \ \ \|f(x)\| \leqslant M \|x\| .$$

Exemple 3.1.1

$$X = C([0,2]) = \{f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \diagdown f \quad \text{est continue sur } [0,2]\}$$

$$\forall x \in X : \|x\| = \max_{t \in [0,2]} |x(t)| .$$

On pose :

$$\forall p \in [1, +\infty[\ , \ l^p(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C} : \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

menu de la norme $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Il est facile de vérifier que :

1)

$$f:(X,\|.\|)\longrightarrow \mathbb{R}\diagdown f(x)=\int_0^2 |x(t)|\,dt$$

est un opérateur non linéaire.

2)

$$f:(X,\|.\|)\longrightarrow \mathbb{R}\diagdown f(x)=\int_0^2 x(t)\sin t.dt$$

est un opérateur linéaire.

3)

$$f:l^1(\mathbb{C})\longrightarrow \mathbb{C}\diagdown f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i$$

est un opérateur linéaire.

3.2 Norme d'un opérateur borné

Définition 3.2.1 *Soit $f:(X,\|.\|)\longrightarrow (Y,\|.\|)$ opérateur est linéaire borné.*

La norme de f est par définition la quantitée

$$\|f\|=\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)}=\sup_{0\neq x\in E}\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

et on peut montrer que

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|=\sup_{\|x\|=1}\|f(x)\| \\ &= \inf\left\{M>0:\forall x\in E,\ \ \|f(x)\|_Y\leqslant M\,\|x\|_X\ \right\}.\end{aligned}$$

$$\forall x\in E,\qquad \|f(x)\|\leqslant \|f\|\,\|x\|.$$

Exemple 3.2.1 *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ (avec $a<b$).*

$$E=\{f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}\setminus f\ \ \text{application continue}\}=C([a,b])\ \text{ et }\ \|f\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|.$$

On pose

$$F:(E,\|.\|)\longrightarrow (\mathbb{R},|.|)\diagdown F(f)=\int_a^b f(t)dt.$$

Il est claire que F est un opérateur linéaire.

On a $\forall f \in E$:

$$\begin{aligned} |F(f)| &= \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^b \max_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|\,dt \\ &\Longrightarrow |F(f)| \leqslant \int_a^b \|f\|\,dt = (b-a)\,\|f\|\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall f &\in E-\{0\} : \frac{|F(f)|}{\|f\|} \leqslant (b-a) \\ &\Longrightarrow \|F\|_{E'} = \sup_{0\neq f\in E} \frac{|F(f)|}{\|f\|} \leqslant (b-a). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

D'autre part, si on choisit $f_0 \in E$ *définit par :* $\forall t \in [a,b]\,, f_0(t) = 1,$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} \|f_0\| &= 1 \;\; et\; F(f_0) = \int_a^b f_0(t)dt = b-a \\ &\Longrightarrow \frac{|F(f_0)|}{\|f_0\|} = (b-a) \leqslant \|F\|_{E'} = \sup_{0\neq f\in E} \frac{|F(f)|}{\|f\|} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

D'après (3.2.1, 3.2.2) on trouve que :

$$\|F\|_{E'} = b-a.$$

Exemple 3.2.2 *Soient* $E = C([0,3])$.

On pose

$$F : (E, \|.\|) \longrightarrow (E, \|.\|) \diagdown F(f) = Ff \qquad où\; Ff(x) = f(0)x^2 + f(1)x + f(2).$$

1) Montrer que $F \in \mathcal{L}(E)$.

2) Trouver $\|F\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Réponse :

Il est facile de vérifier que F est un opérateur non linéaire.

On a $\forall f \in E$:

$$\begin{aligned} \|Ff\| &= \max_{0\leqslant x\leqslant 3} \left|f(0)x^2 + f(1)x + f(2)\right| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 3} \left|f(0)x^2\right| + \max_{0\leqslant x\leqslant 3} |f(1)x| + |f(2)| \\ &\leqslant 9\,|f(0)| + 3\,|f(1)| + |f(2)| \leqslant 9\max_{0\leqslant t\leqslant 3} |f(t)| + 3\max_{0\leqslant t\leqslant 3} |f(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 3} |f(t)| \\ &\Longrightarrow \|Ff\| \leqslant 13\max_{0\leqslant t\leqslant 3} |f(t)| = 13\,\|f\|\,. \end{aligned}$$

Donc $F \in \mathcal{L}(E)$ et de plus on a

$$\|F\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{0 \neq f \in E} \frac{\|F(f_0)\|}{\|f_0\|} \leqslant 13. \tag{3.2.3}$$

D'autre part, si on choisit $f_0 \in E$ définit par : $\forall t \in [a, b]\,, f_0(t) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(F f_0)(x) \quad &= \quad x^2 + x + 1, \\
\Longrightarrow \quad & \|F f_0\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 3} \left|x^2 + x + 1\right| = 13 = 13 \,\|f_0\|\,. \\
\Longrightarrow \quad & \frac{\|F(f_0)\|}{\|f_0\|} = 13 \leqslant \sup_{0 \neq f \in E} \frac{\|F(f_0)\|}{\|f_0\|} = \|F\|_{\mathcal{L}(E)}\,. \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

D'après (3.2.3, 3.2.4) on trouve que :$\mathcal{L}(E, l^2)$

$$\|F\|_{\mathcal{L}(E)} = 13.$$

<u>Exercice n°30</u>:

Soient $E = \{f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R} \setminus f \;\text{ application continue}\} = C([0, 3])$ et $\|f\|_E = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 3} |f(x)|\,.$

A) On pose $F_1 : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (E, \|.\|_E) \setminus F_1(f) = g$ telle que :

$$\forall x \in [0, 3] : g(x) = F_1(f)(x) = f(0)x^2 + f(1)x + f(2).$$

1) Montrer que $F_1 \in \mathcal{L}(E)$.

2) Trouver $\|F_1\|_{\mathcal{L}(E)}\,.$

B) On pose : $l^2(\mathbb{C}) = l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ avec $\|x\|_{\,l^2} = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ et

$$F_2 : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (l^2, \|.\|_{\,l^2}) \setminus F_2(f) = \left[\frac{f(\frac{1}{n}) + i f(\frac{1}{n^2})}{n} \right]_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

1) Montrer que $\forall f \in E,\; F_2(f) \in l^2$.

2) Montrer que $F_2 \in \mathcal{L}(E, l^2)$.

3) Trouver $\|F_2\|_{\mathcal{L}(E, l^2).}$

<u>Exercice n°31</u> :

Soient $(X, \|.\|)$ un e.v.n et $f \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ non nul ($f \neq 0$).

Considérons l'hyperplan L définie par :

$$L = \{x \in X : f(x) = 1\}.$$

Montrer que

$$\|f\|_{X'} = \frac{1}{\inf\limits_{X \in L} \|x\|}.$$

Exercice n°32 : Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$.

Montrer que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Réponse : D'après l'exerice n°9 on a : $\forall a \in H$,

$$\|a\| = \sup_{0 \neq y \in H} \frac{|\langle a, y \rangle|}{\|y\|}.$$

Donc on a : $\forall x \in H$,

$$\|Ax\| = \sup_{0 \neq y \in H} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|y\|},$$

$$\Longrightarrow \quad \forall x \in H - \{0\}, \ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \sup_{0 \neq y \in H} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|y\|} = \sup_{0 \neq y \in H} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \, \|y\|}.$$

$$\Longrightarrow \quad \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{0 \neq x \in H} (\sup_{0 \neq y \in H} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \, \|y\|}).$$

$$\Longrightarrow \quad \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Exercice n°33 : Rappellons que si $(X, \|.\|)$ est un e.v.n et $f \in X'$on a ([2]) :

$$\forall x \in X : \|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|f\|=1, \|x\|=1} |f(Ax)|.$$

Bibliographie

[1] **Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson.** *Linear Functional Analysis.* Springer, 2008.

[2] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1983.

[3] **Houcine Chebli**. *Analyse Hilbertienne.* Édition CPU. Tunis, 2001.

[4] **L. Schwarz.** *Analyse fonctionnelle.* Herman, Paris 1980.

[5] **Lokenath Debnath, Piotr Mikusinski.** *Introduction to Hilbert Spaces with applications.* 3rd Edition, Elsevier 2005.

[6] **L. Kantorovitch, G. Akilov.** *Analyse fonctionnelle.* MIR. Moscou, 1981.

[7] **N. Bourbaki,** *Espaces vectoriels topologiques: Chap 1 à 5.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[8] **Paul R. Halmos.** *A Hilbert space Problem Book.* 2nd Edition, Springer-Verlag New York 1982.