جامعة الوادي | كلية العلوم الدقيقة

السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي | 2022/2021 | السلسلة الأولى

ت1 :

ليكن الشعاعان $\vec{A}(10,0^0)$ و $\vec{B}(10,60^0)$. فكون منهما هندسيا الأشعة $\vec{A}+2\vec{B}$, $\vec{A}-2\vec{B}$

ثم حللها على الأساس الثنائي $[\vec{e}]_2$ ثم عين أطوالها وعمدها بالنسبة للمحور Δ_x.

ت2 :

1- عين الصيغ التحليلية لأشعة الوحدة وفق الأشعة التالية: $\vec{A}(10,150^0)$, $\vec{B}=2\vec{i}+4\vec{j}$

2- عين شعاعي موضعي جسم متحرك لما يمر بالنقطة (5,0,3) والنقطة (−7,0,8)، ثم أوجد شعاع الانتقال بينهما .

3- أوجد الشعاع $\vec{B}$ الذي طوله 100 وحدة ويوازي الشعاع $\vec{A}=0.8\,\vec{\mathbf{i}}+0.6\,\vec{\mathbf{j}}$

4- حلل الشعاع $\vec{B}$ الذي طوله 50 وحدة وزواياه بالنسبة للمحاور $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ هي على الترتيب:

$\gamma=120^0,\beta=45^0,\alpha=60^0$

ت3 :

نعتبر جسما متحركا يمر بالنقاط: $C(6,0,2),B(1,-5,1),A(3,0,1)$

أ- عين أشعة مواضعه عند كل نقطة. ثم عين أشعة الانتقال: $\vec{X}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$, $\vec{Y}=\vec{r}_C-\vec{r}_A$ عين أطوالها.

ب- أحسب الجداء السلمي $\vec{X}\cdot\vec{Y}$ وأوجد الزاوية المحصورة بينهما.

ج- أحسب الجداء الشعاعي $\vec{X}\times\vec{Y}$.

د- ليكن الشعاعان $\vec{E}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ و $\vec{D}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$ * عين α و β بحيث يوازي الشعاع $\vec{E}$ الشعاع $\vec{D}$

ت4 :

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ ونعتبر النقطتين $P(2,-1,3)$ و $Q(5,1,-1)$

1- أعط مركبات $\overrightarrow{PQ}$ ثم أحسب المسافة بين P و Q

2- أوجد الزوايا بين الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ ومحاور الإحداثيات.

ت5 :

أ- برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي : $|\vec{A}\times\vec{B}|$ حيث : $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ضلعي متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين.

ب- اوجد مساحة المثلث الذي تقع رؤوسه عند: $P(2,3,5), Q(4,2,-1), R(3,6,4)$

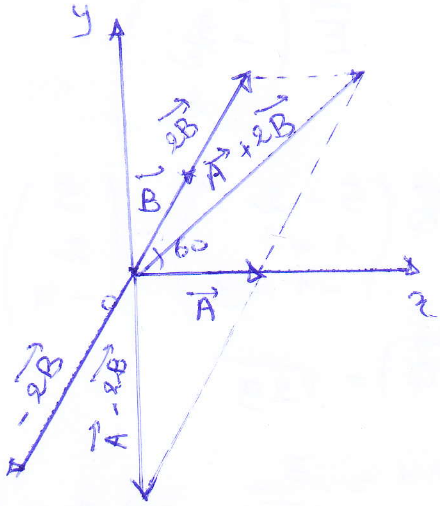
حل السلسلة ① في رياضيات وإعلام آلي - سنة أولى

مقياس: فيزياء 1 (2022/2021).

ت 1:

$\vec{A}(10,0^\circ)$, $\vec{B}(10,60^\circ)$

رسم: $(\vec{A}-2\vec{B})$ و $(\vec{A}+2\vec{B})$



$\vec{C} = \vec{A} + 2\vec{B}$.

$\vec{A} = |A|\cos\theta\,\vec{i} + |A|\sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{A} = 10\vec{i}$

$\vec{B} = |B|\cos\theta\,\vec{i} + |B|\sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{B} = 5\vec{i} + 5\sqrt{3}\,\vec{j}$

$\vec{C} = 10\vec{i} + 2(5\vec{i} + 5\sqrt{3}\,\vec{j})$

$\vec{C} = 20\vec{i} + 10\sqrt{3}\,\vec{j}$

$|C| = \sqrt{20^2 + (10\sqrt{3})^2} = 10\sqrt{7}$

$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j}$
$= 20\vec{i} + 10\sqrt{3}\,\vec{j}$

$C_x = |C|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{C_x}{C} = \frac{20}{10\sqrt{7}}$

$\boxed{\theta = 40{,}53^\circ}$

$\vec{D} = \vec{A} - 2\vec{B} = 10\vec{i} - 2(5\vec{i} + 5\sqrt{3}\,\vec{j})$

$\boxed{\vec{D} = -10\sqrt{3}\,\vec{j}}$

$|D| = 10\sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{D_x}{D} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

ت 02:

-/1

• $\vec{A}(10,150^\circ)$.

$\vec{A} = |A|\cos\theta\,\vec{i} + |A|\sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{A} = -5\sqrt{3}\,\vec{i} + 5\vec{j}$

$|A| = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10$

$\vec{A} = |A|\,\vec{e_A} \Rightarrow \vec{e_A} = \frac{\vec{A}}{|A|}$

$\boxed{\vec{e_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}}$

• $\vec{B} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow |B| = 2\sqrt{5}$

$\vec{B} = |B|\,\vec{e_B} \Rightarrow \vec{e_B} = \frac{\vec{B}}{|B|}$

$\boxed{\vec{e_B} = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}}$

-/2

$\vec{r} = 5\vec{i} + 3\vec{k}$

$\vec{r'} = -7\vec{i} + 8\vec{k}$

شعاع الانتقال هو:

$\vec{\Delta} = \vec{r'} - \vec{r} = -12\vec{i} + 5\vec{k}$

-③

$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = \alpha\vec{B}$

$|A| = \alpha|B|$

$\alpha = \frac{|A|}{|B|}$; $|B| = 100$

$|A| = \sqrt{(0{,}8)^2 + (0{,}6)^2} = 1$

$|A| = 1$

$\alpha = \frac{1}{100}$, $\vec{B} = \frac{\vec{A}}{\alpha}$

$\boxed{\vec{B} = 80\vec{i} + 60\vec{j}}$

-/4

$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

$\alpha = (\widehat{\vec{B},\vec{i}})$, $\beta = (\widehat{\vec{B},\vec{j}})$, $\gamma = (\widehat{\vec{B},\vec{k}})$

$\vec{B}\cdot\vec{i} = |B|\cos\alpha = B_x$

$\vec{B}\cdot\vec{j} = |B|\cos\beta = B_y$

$\vec{B}\cdot\vec{k} = |B|\cos\gamma = B_z$

$\vec{E} \times \vec{D} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{0}$

$= (4\alpha + 3\beta)\vec{i} - (4 - 2\beta)\vec{j} + (-3 - 2\alpha)\vec{k} = \vec{0}$

$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 0 \\ 4 - 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2 \\ -3 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\vec{E}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

:04 ت

$\vec{PQ}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 1+1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\vec{PQ}| = \sqrt{29}$

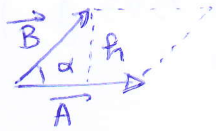
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \underline{\alpha = 56^\circ}$

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \underline{\beta = 68{,}22^\circ}$

$\cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{29}} \Rightarrow \underline{\gamma = 137{,}81^\circ}$

:05 ت

-1



$S = |\vec{A}| . h$

$h = |B| \sin\alpha$

$S = |\vec{A}| . |\vec{B}| \sin\alpha = |\vec{A} \times \vec{B}|$

$\vec{PQ}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \vec{PR}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ -ب

$S = |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$

$PQ \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} =$

$= -19\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$

$S = \sqrt{19^2 + 4^2 + 7^2} = 20{,}64$

$\boxed{S = 20{,}64 \ SI}$

$B_x = 50\cos 60 = 25$

$B_y = 50\cos(45) = 25\sqrt{2}$

$B_z = 50\cos(120) = -25$

$\vec{B} = 25\vec{i} + 25\sqrt{2}\vec{j} - 25\vec{k}$

$\boxed{\vec{B} = 25(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k})}$

:03 ت

-1

$\vec{r_A} = 3\vec{i} + \vec{k}$

$\vec{r_B} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{r_C} = 6\vec{i} + 2\vec{k}$

$\vec{x} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$

$|\vec{x}| = \sqrt{29}$

$\vec{y} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = 3\vec{i} + \vec{k}$

$|\vec{y}| = \sqrt{10}$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -2

$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = -6}$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| . |\vec{y}| \cos(\theta_{x,y})$

$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| . |\vec{y}|} = \frac{-6}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{10}}$

$\boxed{\theta_{x,y} = 110{,}61^\circ}$

$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ -3

$\vec{x} \times \vec{y} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$

$\vec{E} \parallel \vec{D} \Rightarrow \vec{E} \times \vec{D} = \vec{0}$ -4

جامعة الوادي　　　　　　　　　　　　　　　　كلية العلوم الدقيقة

السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي　　　　2022/2021　　　　السلسلة الثانية

ت1 :

يتحرك جسم وفق المسار (C) بشعاع موضع معرف كمايلي: $\vec{r}(t) = 3\cos(2t)\,\vec{i} + 3\sin(2t)\,\vec{j} + (8t-4)\,\vec{k}$

1- عين شعاع السرعة اللحظية والتسارع اللحظي للمتحرك في اللحظة t وحدد طويلتيهما.

2- عين طول المسار(l) بين اللحظتين 1s و 4s

3- اوجد شعاع الوحدة $\overrightarrow{e_T}$ المماسي للمسار.

ت2 :

تعطى في جملة الإحداثيات القطبية (ρ,θ) إحداثيات النقطة المادية M :

$\rho = 2ae^{\theta}$ و $\theta = \omega t$ حيث: a و ω ثابتان موجبان و t يمثل الزمن اوجد :

1- شعاع السرعة والتسارع في جملة الإحداثيات القطبية، واستنتج طويلتهما

2- المركبين المماسية والناظمية لشعاع التسارع ، ثم استنتج عبارة نصف قطر الانحناء

3- طول المسار L في اللحظة t علما أن في اللحظة الابتدائية L(t=0)=0

ت3 :

تعرف حركة نقطة مادية في الإحداثيات الأسطوانية بالمعادلات الزمنية :

$$Z(t) = 2\sqrt{2}re^{\omega t} \quad , \quad \rho(t) = 2re^{\omega t} \quad , \quad \theta(t) = \omega t$$

حيث ω , r ثابتان موجبان. أوجد :

1- المركبات الأسطوانية لشعاعي السرعة و التسارع و طويلتيهما.

2- المركبات الديكارتية للسرعة و التسارع.

3- المركبتين المماسية و الناظمية لشعاع التسارع

4- أستنتج نصف قطر الانحناء .

5- أحسب طول المسار الذي تقطعه النقطة بين اللحظتين الابتدائية و t.

ت4 :

تعطى في جملة الإحداثيات الديكارتية، النقطة M(2 , 3 , 3)

1- أوجد في جملة الإحداثيات الأسطوانية عبارة كل من ρ و θ و z ، أكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ و أحسب طويلته.

2- مثل كذلك في جملة الإحداثيات الأسطوانية النقطة N(3 , π/3 , 4) ، ثم أستنتج إحداثياتها الديكارتية الموافقة.

حل السلسلة 02.

ت1:

$\vec r = 3\cos(2t)\vec i + 3\sin(2t)\vec j + (8t-4)\vec k$

$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = -6\sin(2t)\vec i + 6\cos(2t)\vec j + 8\vec k$

$|\vec v| = 10$.

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = -12\cos(2t)\vec i - 12\sin(2t)\vec j$

$|\vec a| = 12$.

$l = \int_t^{t_0} |\vec v|\,dt = \int_1^4 10\,dt = 10(4-1)$

$\boxed{l = 30}$

$\vec e_T = \frac{\vec v}{|v|}$

$= -\frac{6}{10}\sin(2t)\vec i + \frac{6}{10}\cos(2t)\vec j + \frac{8}{10}\vec k$

$\vec e_T = -\frac{3}{5}\sin(2t)\vec i + \frac{3}{5}\cos(2t)\vec j + \frac{2}{5}\vec k$

ت02:

$\vec r = \rho\,\vec u_\rho = 2ae^{\theta}\,\vec u_\rho$

$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} = 2awe^{wt}\,\vec u_\rho + 2awe^{wt}\,\vec u_\theta$

$\boxed{\vec V = 2awe^{wt}(\vec u_\rho + \vec u_\theta)}$

$|V| = 2\sqrt{2}\,awe^{wt}$

$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = 2aw^2e^{wt}\,\vec u_\rho + 2aw^2e^{wt}\,\vec u_\theta + 2aw^2e^{wt}\,\vec u_\theta - 2aw^2e^{wt}\,\vec u_\rho$

$\vec a = 4aw^2e^{wt}\,\vec u_\theta$

$|a| = 4aw^2e^{wt}$

$a_T = \frac{d|\vec V|}{dt} = 2\sqrt{2}\,aw^2e^{wt}$.

$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{16a^2w^4e^{2wt} - 8a^2w^4e^{2wt}}$

$\boxed{a_N = 2\sqrt{2}\,aw^2e^{wt}}$

$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N}$.

$R = \frac{4a^2w^2e^{2wt}\cdot 2}{2\sqrt{2}\,aw^2e^{wt}} = \frac{4}{\sqrt{2}}ae^{wt}$

$\boxed{R = \frac{4}{\sqrt{2}}ae^{wt}}$

$L = \int_t^{t_0} |v|\,dt = \int^t 2\sqrt{2}\,awe^{wt}\,dt$

$L = 2\sqrt{2}\,a\,e^{wt}\Big|_0^t$

$\boxed{L = 2\sqrt{2}\,a(e^{wt} - 1)}$

ت03:

-1)

$\vec r = \rho\,\vec u_\rho + z\vec k$

$= 2re^{wt}\,\vec u_\rho + 2\sqrt{2}\,re^{wt}\,\vec k$

$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} = 2wre^{wt}\,\vec u_\rho + 2rwe^{wt}\,\vec u_\theta + 2\sqrt{2}\,rwe^{wt}\,\vec k$.

$\vec V = 2wre^{wt}(\vec u_\rho + \vec u_\theta + \sqrt{2}\,\vec k)$

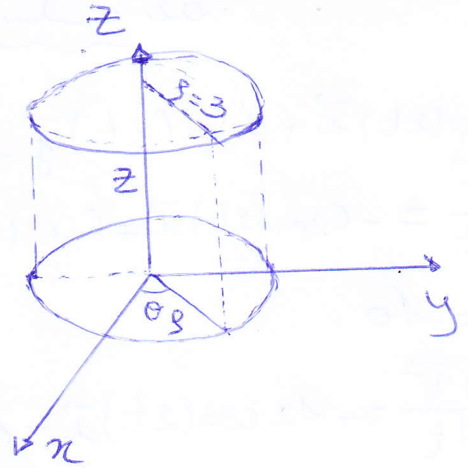
$|V| = 4rwe^{wt}$

$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = 4rw^2e^{wt}\,\vec u_\theta + 2\sqrt{2}\,rw^2e^{wt}\,\vec k$

$|a| = 2\sqrt{6}\,rw^2e^{wt}$

2/- نعوض قيم : $\vec u_\rho$ و $\vec u_\theta$ في معادلات السرعة والتسارع :

$$\begin{cases} \vec u_\rho = \cos\theta\,\vec i + \sin\theta\,\vec j \\ \vec u_\theta = -\sin\theta\,\vec i + \cos\theta\,\vec j \end{cases}$$



$x = \rho\cos\theta = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1{,}5$.

$y = \rho\sin\theta = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1{,}5\sqrt{3}$.

$z = 4$.

-2 $\vec{V} = 2rwe^{wt}\Big((\cos\theta - \sin\theta)\vec{i} + (\sin\theta + \cos\theta)\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}\Big)$.

$\vec{a} = 4rw^2e^{wt}\left(\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{i}\right) + 2\sqrt{2}rw^2e^{wt}\vec{k}$

-3 $a_T = \frac{d|V|}{dt} = 4rw^2e^{wt}$

$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 24r^2w^4e^{2wt} - 16r^2w^4e^{2wt}$

$a_N^2 = 8r^2w^4e^{2wt}$

$\boxed{a_N = 2\sqrt{2}\,rw^2e^{wt}}$.

$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N}$.

$\boxed{R = \frac{8}{\sqrt{2}}re^{wt}}$.

-5 $\ell = \int_t^{t_0} V\,dt = \int 4rwe^{wt}\,dt$.

$\boxed{\ell = 4r\left(e^{wt} - 1\right)}$

ت :04

-1 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

$\boxed{\theta = 56{,}31°}$, $\boxed{z = 3}$.

$\vec{OM} = \rho\,\vec{u_\rho} + z\vec{k}$

$= \sqrt{13}\,\vec{u_\rho} + 3\vec{k}$

$|\vec{OM}| = \sqrt{22}$.