جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2022/2021

المستوى: سنة ثانية رياضيات — مقياس: مدخل الى الطبولوجيا

السلسلة 03

التمرين الأول:

ليكن (E,τ) فضاءا طبولوجيا. بين ان

(١). الاتحاد المنتهي لمتراصات في E هو متراص.

(٢). تقاطع متراصات هو متراص.

التمرين الثاني:

(E,d) فضاءا متريا ولتكن (x_n) متتالية من عناصر E متقاربة نحو x.

بين ان $A=\{x_n\}\cap\{x\}$ مجموعة متراصة.

التمرين الثالث:

ليكن (E,d) فضاءا متريا ولنكن A مجموعة متراصة في E.

(١). اثبت انه توجد $a\in A$ تحقق $d(x,A)=d(x,a)$ من اجل كل x من A.

(٢). بين انه اذا كانت B مجموعة متراصة فانه يوجد $b\in B$ تحقق $d(A,B)=d(a,b)$.

التمرين الرابع:

ليكن $(E,\tau),(F,\tau')$ فضاءان طبولوجيان وليكن $f:E\to FE$. بين انه اذا كان A جزءا متراصا من E فان $f(A)$ جزءا متراصا من F.

التمرين الخامس ليكن (E,d) فضاءا متريا وليكن $f:E\to E$ تطبيقا مستمرا.

(١). بين ان $F=\{x\in E, f(x)=x\}$ مجموعة مغلقة.

(٢). اثبت انه اذا كان E متراص و $F=\emptyset$ ، فانه يوجد $\delta>0$ حيث من اجل كل $x\in E$ يكون $d(x,f(x))\geq\delta$.

التمرين السادس

لتكن المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$ والمزودة بالطبولوجيا

$\tau=\{\emptyset,E,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{b,c\},\{a,b,c\};\{b,c,d\}\}$.

(١). هل E مترابط؟.

(٢). بين ان المجموعة $A=\{b,c\}$ مترابطة.

(٣). عين المركبة المترابطة لـــ b.

التمرين السابع:

ليكن A,B جزءان مترابطان و غير خاليين من فضاء طبولوجي E.

بين انه اذا كان $\overline{A}\cap B \neq \emptyset$. فان $A\cup B$ مترابطا.

التمرين الثامن:

ليكن $f:E\to F$ حيث $(E,\tau),(F,\tau')$ فضاءان طبولوجيان و f تطبيقا مستمرا.

بين انه اذا كان E مترابطا فان $G(f)$ جزءا مترابطا من الجداء الديكارتي EF.

حل السلسلة رقم 03

التمرين الأول:

(١). يكفي ان نبرهن ان اتحاد متراصين هو متراص.

نضع $A = A_1 \cup A_2$ حيث A_1، A_2 متراصين، ولتكن $(O_i)_{i\geq 1}$ تغطية مفتوحة لـ A.

اذن

$$A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{i\geq 1} O_i$$

$$\Rightarrow A_1 \subset \bigcup_{i\geq 1} O_i, \quad A_1 \subset \bigcup_{i\geq 1} O_i$$

ومنه $(O_i)_{i\geq 1}$ تغطية لــ A_1، A_2 وبمانهما متراصين، توجد تغطية منتهية $(O_i)_{i_1\leq i\leq n_1}$ حيث

$$A_1 \subset \bigcup_{i=i_1}^{n_1} O_i$$

ونفس الشيىء بالنسبة الى A_2

$$A_2 \subset \bigcup_{i=i_2}^{n_2} O_i$$

اذن

$$A \subset \bigcup_{i'=1}^{n'} O_j$$

حيث $j' = \min\{i_1, i_2\}$, و $n' = \max\{n_1, n_2\}$.

ومنه A يقبل تغطية جزئية منتهية، وبالتالي متراص.

(٢). نضع $\mathcal{A} = \bigcap_{i\geq 1} A_i \ ; \ i = 1,2,3,...$ حيث A_i متراصات، وبالتالي فهي مغلقات وبمان تقاطع مغلقات هو مغلق فان $\mathcal{A}$ مغلق.

من جهة اخرى لدينا

$$\forall i = 1,2,...; \mathcal{A} \subset A_i$$

ادن $\mathcal{A}$ هي مغلق في متراص فهي متراص.

التمرين الثاني:

$A = \{x_n, n \geq 1\} \cup \{x\}$

لتكن $(O_i)_{i\geq 1}$ تغطية لـ A.

اي

$$A \subset \bigcup_{i\geq 1} O_i$$

اذن وحسب تعريف نهاية متتالية

$$\forall V \in V_x, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in V,$$

اي انه يوجد مفتوح O_{i_0}

$$\forall n \geq n_0, x_n \in O_{i_{n_0}}.$$

من جهة اخرى

$$\forall n < n_0, \exists O_n, x_n \in O_n$$

$$\Rightarrow A \subset O_{i_0} \cup (\bigcup_{n=1}^{n_0-1} O_n)$$

اذن A متراص.

التمرين الثالث:

(١). نعتبر التطبيق

$$f : A \to \mathbb{R}_+, \; ; \; f(y) = d(x, y)$$

هو تطبيق مستمر على A

لان

$$\forall y, z \in E, |f(y) - f(z)| = |d(x, y) - d(x, z)|$$

$$\leq d(y, z)$$

ومنه f مستمر بانتظام(وبالتالي مستمر)، اذن يوجد $a \in A$ يحقق

$$f(a) = \inf_{y\in A} d(x, y)$$

$$\Rightarrow d(x, a) = d(x, A).$$

(٢). مثل السؤال السابق.

التمرين الرابع:

$f : (E, \tau) \to (F, \tau)$ مستمر.

ولنفرض ان $(O_i)_{i\geq 1}$ تغطية مفتوحة لـ $f(A)$ اي ان

$$f(A) \subset \bigcup_{i\geq 1} O_i,$$

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup O_{i\geq 1}\Big) = \bigcup_{i\geq 1} f^{-1}(O_i)$$

اذن $\left(f^{-1}(O_i)\right)_{i\geq 1}$ تغطية مفتوحة (لان الصورة العكسية لمفتوح بتطبيق مستمر هو مفتوح) لـ A، وبمانها متراصة، فانه توجد نغطية منتهية $\Big(f^{-1}(O_i)\Big)_{1\leq i\leq n}$ اي ان

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} O_i)$$

$$\Rightarrow f(A) \subset f\Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} O\Big)\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$

اذن $f(A)$ متراصة.

التمرين الخامس:

(١). تكون المجموعة F مغلقة اذا وفقط اذا كان من اجل كل متتالية متقاربة من عناصر F نهايتها عنصر من F. لتكن $(x_n) \subset F$ حيث $x_n \to x$ ولنبين ان $x \in F$.
بمان f مستمر فان $f(x_n) \to f(x)$ ، من جهة اخرى

$$f(x_n) = x_n \to x \Rightarrow f(x) = x$$

لان النهاية وحيدة (كل فضاء متري هو فضاء منفصل).

(٢). نعتبر التطبيق

$$g : E \to \mathbb{R}_+, \quad g(x) = d(x, f(x))$$

هو تطبيق مستمر لان f مستمر وبالتالي فنه يدرك حديه، اي يوجد $x_1; x_2 \in E$ يحققان

$$\forall x \in E, \delta = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

وبمان $F = \emptyset$ فان $d(x, f(x)) \geq \delta > 0$.

التمرين السادس:

(١). بمان

$$E = \{a\} \cup \{b, c, d\}; \quad \{a\, \{b, c, d\} \in \tau$$

فان E غير مترابط.

(٢). $\tau_A = \{\emptyset, A\}$ اذن طبولوجيا الاثر على $\acute{A}$ هي الطبولوجيا الضعيفة وبالتالي A مترابط.

(٣). المترابطات التي تشمل b هي $\{b\}, \{b, c\}$ ومنه

$$C(b) = \{b, c\}.$$

التمرين السابع:

لنبرهن اولا على الخاصية التالية:

يكون فضاء طبولوجي E مترابط اذا وفقط اذا كان كل تطبيق مستمر من E نحو $\{0,1\}$ مزودا بالطبولوجيا المتقطعة هو تطبيق ثابت.

نفرض ان E مترابط، وليكن $f:(E,\tau)\to(\{0,1\},\tau_{disc})$ تطبيقا مستمرا، اذن

$$f(E)=\{0,1\}\Rightarrow f^{-1}(\{0,1\})=E$$

ومنه $f^{-1}(\{0\})$ و $f^{-1}(\{1\})$ مفتوحان في E لانهما الصورتين العكسيتين لمفتوحين بتطبيق مستمر، ومنه

$$E=f^{-1}(\{0\})\cap f^{-1}(\{1\})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{0\})=\emptyset\vee f^{-1}(\{1\})=\emptyset$$

لان E مترابط. اذن

$$\forall x\in E,\quad f(x)=c$$

نفرض ان E غير مترابط، اطن يوجد مفتوحان منفصلان وغير خاليين O_1,O_2 يحققان

$$E=O_1\cup O_2,\quad O_1\cap O_2=\emptyset$$

وليكن التطبيق

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in O_1\\ 0, & x\in O_2.\end{cases}$$

f تطبيق مستمر على E وغير ثابت، وهذا يناقض الفرض.

ليكن $f:A\cup B\to\{0,1\}$ تطبيقا مستمرا، بمان A,B مترابطين فان f_A اقتصار f على A هو ثابت اي

$$\forall x\in A, f_A(x)=c_A$$

ونفس الشيىء بالنسبة الى B

$$\forall x\in B, f_B(x)=c_B$$

ايضا بمان A مترابط فا فان $\overline{A}$ مترابط و $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ فانه يوجد على الاقل $b\in\overline{A}\cap B$ حيث

$$f(b)=c_A=c_B$$

اذن

$$f(A\cup B)=c_A$$

و بالتالي $A\cup B$ مترابط.

التمرين الثامن:

التطبيق

$$g:X\to EF,\quad g(x)=(x,f(x))$$

هو تطبيق مستمر لان f مستمر، وبمان

$$g(E)=G(f)$$

وصورة مترابط بتطبيق مستمر هو مترابط فان $G(f)$ مترابط.