Chapitre 1

1. Espaces de Hilbert

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire real sur X est une application*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui vérifie les conditions suivantes :
i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X,$
ii) $\langle x, x \rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0,$
iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \ \forall x, y \in X,$
iv) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \ \forall x, y, z \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Exemple 1.1. *Soit $X = \mathbb{R}^3$ et on définit la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

il est clair que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2. *Sur $X = L^2(0, \pi)$ on définit*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx,$$

c'est un produit scalaire real sur $L^2(0, \pi)$.

Définition 1.2. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, un produit scalaire complexe sur X est une forme*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C},$$

qui vérifie i), ii), iv) et
v) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \ \forall x, y \in X.$
Dans ce cas on dit que le produit scalaire complexe est anti-symétrique ou semi-linéaire.

Exemple 1.3. *Dans $\mathbb{C}^3$, la forme*

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3},$$

est un produit scalaire complexe.

Exemple 1.4. *Sur $X = \ell^2$ on définit la forme*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

c'est un produit scalaire sur X.

Exemple 1.5. *Soit X un espace vectoriel de dimension n de base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ alors $x, y \in X$ s'écrivent*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \; y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

On définit un produit scalaire sur X en posant

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Remarque 1.1. *La seule différence entre le produit scalaire real et le produit scalaire complexe est l'apparence du conjugué dans la condition v) du définition 2. Dans la suite on va considérer le cas complexe, le cas real est un cas particulier dont le conjugué d'un real conside avec lui.*

Définition 1.3. *Une forme bilinéaire $B : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite positive si*

$$B(x, x) \geq 0, \, \forall x \in X,$$

elle est dite définie si

$$B(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Remarque 1.2. *Un produit scalaire real sur X est une forme bilinéaire définie positive.*

Définition 1.4. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace pré-hilbertien.*

Si X est un espace vectoriel real de dimension, alors $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'appelle espace euclidien.

Si X est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'appelle espace hermitien.

Lemme 1.1. *Soit X un espace préhilbertien avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soient $x, y, z \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors,*

i) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0,$

ii) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x | z \rangle,$

iii) $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle + 2 \operatorname{Re} \left(\alpha \overline{\beta} \langle x, y \rangle \right)$

Démonstration. *Exercice.*

Lemme 1.2. *Soit X un espace préhilbertien avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors, pour tout $x, y \in X$ on a*

i) $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, *(inégalité de Cauchy-Schwarz).*

ii) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *est une norme sur X.*

Démonstration. *i) Si $x=0$ ou $y=0$, le résultat est clair.*

Supposons que $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors, on prend $\alpha=-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}$ et $\beta=1$ et on calcule $\langle \alpha x+y,\alpha x+y\rangle$

$$0\leq\left\langle -\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}x+y,-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}x+y\right\rangle=\left|\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}\right|^2\langle x,x\rangle-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}\langle x,y\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}-2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}+\langle y,y\rangle\blacksquare$$

par suite

$$\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}\leq\langle y,y\rangle\,.$$

ii) On a $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\geq 0,$
$\|x\|=0\Longleftrightarrow\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0.$
$\|\alpha x\|=\sqrt{\langle\alpha x,\alpha x\rangle}=\sqrt{|\alpha|^2\langle x,x\rangle}=|\alpha|\,\|x\|\,,$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\\&\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2\,,\end{aligned}$$

d'ou $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\,,$ *ce qui termine la démonstration.*

Un résultat direct du lemme précident est qu'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace normé, d'autre part le point i) s'écrit

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|\,,$$

cette inégalité s'appelle inégalité de Cauchy-Schwarz.

Lemme 1.3. *Soit X un espace préhilbertien avec produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, alors pour tout $x,y,u,v\in X$ on a*

1. $\langle u+v,x+y\rangle-\langle u-v,x-y\rangle=2\langle u,y\rangle+2\langle v,x\rangle\,,$
2. *dans le cas complexe on a*

$$\langle u+v,x+y\rangle-\langle u-v,x-y\rangle+i\langle u+iv,x+iy\rangle-i\langle u-iv,x-iy\rangle=4\langle u,y\rangle\,.$$

Démonstration. *1)* $\langle u+v,x+y\rangle=\langle u,x\rangle+\langle v,x\rangle+\langle u,y\rangle+\langle v,y\rangle$
$\langle u-v,x-y\rangle=\langle u,x\rangle+\langle v,y\rangle-\langle u,y\rangle-\langle v,x\rangle$
on additionne les deux expressions, on obtient l'identité 1.
2) De la même manière, on a

$$\begin{aligned}\langle u+iv,x+iy\rangle&=\langle u,x\rangle-i\langle u,y\rangle+i\langle v,x\rangle+\langle v,y\rangle\,,\\(u-iv,x-iy)&=\langle u,x\rangle+i\langle u,y\rangle-i\langle v,x\rangle+\langle v,y\rangle\end{aligned}$$

on additionne on obtient l'identité 2.

Proposition 1.1. *Soit X un espace préhilbertien avec produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit $\|\cdot\|$ la norme induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors, pour tout $x,y\in X$, on a* *a) Identité de parallelograme*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),$$

b) Dans le cas d'un espace vectoriel real

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle,$$

c) Dans le cas d'un espace vectoriel complexe

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2 \text{ Identité de polarisation.}$$

Démonstration. *a)* $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle,$
$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2-2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle.$

b) $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle,$ *et comme* $\langle x,y\rangle$ *est real, on a*

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4\langle x,y\rangle.$$

c) $\|x+iy\|^2=\langle x+iy,x+iy\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2-i\langle x,y\rangle+i\langle y,x\rangle,$
$\|x-iy\|^2=\langle x-iy,x-iy\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+i\langle x,y\rangle-i\langle y,x\rangle,$

$$i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2=2\langle x,y\rangle-2\langle y,x\rangle=4\operatorname{Im}\langle x,y\rangle$$

donc

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2=4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+4\operatorname{Im}\langle x,y\rangle=4\langle x,y\rangle.$$

Remarque 1.3. *Pour qu'une norme soit induite par un produit scalaire, il faut et il suffit qu'elle vérifie l'idendité de parallelogramme.*

Exemple 1.6. *La norme sur* $C(0,1)$ *définie par*

$$\|f\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|,$$

n'est pas induite par un produit scalaire.

En effet, soit $f(x)=x$, *et* $g(x)=1$, *alors,* $\|f+g\|=2, \|f-g\|=1, \|f\|=1, \|g\|=1.$

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=5,\ 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=4.$$

Lemme 1.4. *Soient* X *un espace préhilbertien avec produit scalaire* $(\cdot,\cdot)$ *et* $(x_n),(y_n)$ *deux suite convergentes telles que* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}x_n=x$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}y_n=y$, *alors*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n,y_n\rangle=\langle x,y\rangle.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &\le |\langle x_n,y_n\rangle-x_n,y)|+|\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|\\ &\le |\langle x_n,y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x,y\rangle|\end{aligned}$$

$$|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|\le\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|,$$

et comme (x_n) *converge, elle est bornée, donc*

$$|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|\le C\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|\longrightarrow 0.$$

1.2 Orthogonalité

Dans le cas de produit scalaire real, si $x, y \in X$ sont non nuls, on a d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1,$$

se qui nous permet de définir l'angle entre les vecteur x et y comme étant

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}\right).$$

Dans le cas de produit scalaire à valeurs complexe, il est possible que $\langle x, y\rangle \notin \mathbb{R}$, donc il est impossible de donner une définition d'angle entre deux vecteurs $x, y \in X$. Parcontre si $\langle x, y\rangle = 0$ on peut considérer les vecteurs x et y comme étant perpendiculaire ou ortogonaux.

Définition 1.5. *Soient X un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $x, y \in X$. On dit que x e y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Définition 1.6. *Soient $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ une famille d'éléments de X on dit que la famille $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ est orthonormale, si*

1. $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, *si* $i \neq j$,
2. $\|e_i\| = \langle e_i, e_i\rangle^{1/2} = 1$.

Lemme 1.5. *Une famille orthogonale dans un espace préhilbertien X est linéairement indépendante.*

Si X est euclidien de dimension n toute famille orthonormale $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de X et tout $x \in X$ s'écrit d'une manière unique

$$x = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle x, e_i\rangle \, e_i.$$

Si de plus $y = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i e_i$, alors $(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{y_i}$.

Démonstration. *1) Supposons que* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = 0$, *alors,*

$$\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, e_j \right\rangle = x_j \langle e_j, e_j\rangle = x_j = 0, \ \forall j \geq 1.$$

2) Comme $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est linéairement indépendante et maximale est est une base de X, donc

$$\forall x \in X, \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \ x = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i,$$

on a

$$\langle x, e_j\rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \lambda_j,$$

d'ou $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle x, e_i\rangle \, e_i$.

3)

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i, \sum_{1 \leq j \leq n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{y_i}.$$

Remarque 1.4. *Soit* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$ *une famille linéairement indépendante de* X, *on peut construire une famille orthonormale en posant*

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, b_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{1\leq i\leq k} \langle v_{k+1}, e_i\rangle e_i \text{ et } e_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}.$$

Proposition 1.2. *Soient* X *un espace prélibertien de dimension finie* n, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ *une famille orthonormale et* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, *alors*

$$\left\| \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{1\leq i\leq n} |\alpha_i|^2.$$

Démonstration.

$$\left\| \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i e_i, \sum_{1\leq j\leq n} \alpha_j e_j \right\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} |\alpha_i|^2.$$

Remarque 1.5. *On a*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle,$$

Si x, y *sont orthogonaux alors* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, *mais la réciproque est fausse.*

Corollaire 1.1. ***(Inégalité de Bessel)*** *Soient* X *un espace préhilbertien et* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite orthonormale. Alors, pour tout* $x \in X$, *la serie réelle* $\sum\limits_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2$ *converge et on a*

$$\sum_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Preuve. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $y_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n$. *Alors,* $\|y_k\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2$ *et on a*

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x-y_k\|^2 &= \langle x-y_k, x-y_k\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k} \overline{\langle x, e_n\rangle} \langle x, e_n\rangle - \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle x, e_n\rangle} + \|y_k\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

La serie $\sum\limits_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2$ *est alors croissante et majorée, elle est donc convergente et sa limite vérifie*

$$\sum_{n\geq 1} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Définition 1.7. *Soit A une partie non vide de X. On appelle orthogonal de A et on le note $A^{\perp}$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A,*

$$A^{\perp} = \{x \in X; \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in A\}.$$

Exemple 1.7. $\{0\}^{\perp} = E$ *et* $E^{\perp} = \{0\}$. *En effet, si* $x \in E^{\perp}$, *alors* $\langle x, x \rangle = 0$ *ce qui entaîne* $x = 0$.

Proposition 1.3. *Soient X un espace préhilbertien et A une partie de X, alors :*

1. $0 \in A^{\perp}$,
2. *Si* $0 \in A$, *alors* $A \cap A^{\perp} = \{0\}$, *si* $0 \notin A$ *alors* $A \cap A^{\perp} = \emptyset$,
3. *Si* $A \subset B$ *alors* $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
4. $A^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel fermé de* X.

Démonstration. 1. *Clair.*

2. *S'il existe* $x \in A \cap A^{\perp}$ *alors* $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$ *donc* $x = 0$.
3. *Soit* $x \in B^{\perp}$ *alors,* $\forall y \in B; \langle x, y \rangle = 0$, *ce qui reste vrai pour tout* $y \in A$.
4. *Soit* $x, y \in A^{\perp}$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *alors,*

$$\langle \alpha x + \beta y, u \rangle = \alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle y, u \rangle = 0, \ \forall u \in A.$$

D'autre part, soit $(x_n) \subset A^{\perp}$ *une suite qui converge vers* $x \in X$ *et soit* $a \in A$, *alors*

$$0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n - x, a \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n, a \rangle - \langle x, a \rangle = - \langle x, a \rangle,$$

puisque $\langle x_n, a \rangle = 0$, *par suite* $\langle x, a \rangle = 0$ *pour tout* $a \in A$, *ce qui montre que* $x \in A^{\perp}$ *qui est donc fermé.*

Lemme 1.6.

$$\forall a \in X, \langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle \Longleftrightarrow x = y.$$

Démonstration. *Si* $\forall a \in X, \langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle$ *alors* $\langle x - y, a \rangle = 0, \ \forall a \in X$ *et par suite* $x - y = 0$.

La réciproque est claire.

Lemme 1.7. *Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien X. Si A contient une boule ouverte* $B_O(a, r)$ *alors,* $A^{\perp} = \{0\}$, *en particulier, si A est un ouvert alors,* $A^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. *Supposons qu'il existe* $0 \neq x \in A^{\perp}$ *et posons* $y = x / \|x\| \neq 0$, *par définition on a* $(y, a) = 0$.*D'autre part* $\left\| a + \frac{r}{2} y - a \right\| = \frac{r}{2}$, *par suite* $a + \frac{r}{2} y \in A$, *donc*

$$0 = \left\langle y, a + \frac{r}{2} y \right\rangle = \langle y, a \rangle + \frac{r}{2} \langle y, y \rangle,$$

ce qui conduit à $\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = 0$, *alors,* $y = 0$ *contradiction.*

Proposition 1.4. $A^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel non vide de X et on a* $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Si de plus A est un sous espace vectoriel de X la somme $A \oplus A^{\perp}$*est direct.*

Démonstration. *1)* $0 \in A^{\perp}$ *de plus, si* $x, y \in A^{\perp}$ *on a*

$$\langle \lambda x + \mu y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle y, a \rangle = 0, \ \forall a \in A,$$

et par suite $\lambda x + \mu y \in A^{\perp}$.

2) $x \in A$ *alors* $\langle a, x \rangle = 0, \ \forall a \in A^{\perp}$, *donc* $x \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

3) Si $x \in A \cap A^{\perp}$ *alors* $\langle x, x \rangle = 0$ *ce qui entraîne* $x = 0$, *d'où* $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ *et la somme est direct.*

Remarque 1.6. *Si* X *est de dimension finie et* F *un sous espace vectoriel de* X *alors,* $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ *et* $X = F \oplus F^{\perp}$.

Lemme 1.8. *Soit* E *un sous espace vectoriel de* X, *alors,*

$$x \in E^{\perp} \Longleftrightarrow \|x - y\| \geq \|x\|, \ \forall y \in E.$$

Preuve. *1) Supposons que* $x \in E^{\perp}$, *alors*

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle,$$

par suite si $y \in E$ *on a* $\langle x, y \rangle = 0$ *et*

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

Réciproquement, supposons que $\|x - y\|^2 \geq \|x\|^2, \ \forall y \in E$.

Puisque E *est un sous espace vectoriel de* X *on a* $\alpha y \in E$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et par suite*

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 - \|x\|^2 = |\alpha|^2 \|y\|^2 - \alpha \langle y, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall y \in E.$$

On prend

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{|\langle x, y \rangle|}{\langle y, x \rangle}, \ si \ \langle x, y \rangle \neq 0, \\ 1, \ si \ \langle x, y \rangle = 0, \end{cases}$$

par suite $\beta \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|$. *Soit* $\alpha = \beta t$ *avec* $t > 0$, *alors*

$$|\alpha|^2 \|y\|^2 - \alpha \langle y, x \rangle - \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = t^2 \|y\|^2 - t |\langle x, y \rangle| - t |\langle x, y \rangle| \geq 0,$$

ce qui entraîne

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{t}{2} \|y\|^2, \ \forall t > 0$$

par suite

$$|\langle x, y \rangle| \leq \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{t}{2} \|y\|^2 = 0.$$

D'ou $\langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in E$ *et* $x \in E^{\perp}$.

Définition 1.8. *Soient* E *et* F *deux sous espaces vectoriels de* X, *on dit que* E *et* F *sont supplémentaires orthogonaux si,*

1. $X = E \oplus F$ *c'est à dire* $E \cap F = \emptyset$ *et* $\forall x \in X; \exists u \in E, v \in F : x = u + v$,
2. E *et* F *sont orthogonaux.*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.9. *Un espace préhilbertien qui est complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire est appelé espace de Hilbert.*

Exemple 1.8. *1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.*
2) L^2 et ℓ^2 sont des espaces de Hilbert.

Lemme 1.9. *Soit H un espace de Hilbert et E un sous espace vectoriel de H. Alors, E est un espace de Hilbert si et seulement si il est fermé.*

Démonstration. *La démonstration se base sur l'équivalence suivant :*
E est complet si et seulement si E est fermé.

Définition 1.10. *Une partie K d'un espace vectoriel est dit convexe si*

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] \, ; tx + (1-t)\, y \in K.$$

Théorème 1.1. *Soient H un espace de Hilbert et K une partie fermée convexe non vide de H, alors pour tout $f \in H$ il existe un unique $q \in K$ tel que*

$$\|f - q\| = \inf \{\|f - x\| \, ; x \in K\} . \tag{1.1}$$

De plus, si H est un espace de Hilbert réel, q est caractérisé par la propriété

$$\left\{ \begin{array}{c} q \in K, \\ (f - q, u - q) \leq 0, \ \forall u \in K. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Démonstration. *L'ensemble $\{\|f - x\| \, ; x \in K\}$ est non vide et minoré par 0, elle admet donc une borne inférieure $\gamma = \inf \{\|f - x\| \, ; x \in K\}$.*

Par définition de la borne inferieure on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists q_n \in K : \gamma^2 \leq \|f - q_n\|^2 < \gamma^2 + \frac{1}{n}.$$

La suite (q_n) est de Cauchy, en effet, en appliquant la régle de parallelogramme avec $x = f - q_n$ et $y = f - q_m$ on obtient

$$\|(f - q_n) + (f - q_m)\|^2 + \|(f - q_n) - (f - q_m)\|^2 = 2\|f - q_n\|^2 + 2\|f - q_m\|^2$$

donc

$$\|2f - (q_n + q_m)\|^2 + \|q_n - q_m\|^2 \leq 4\gamma^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

D'autre part, puisque K est convexe $\frac{1}{2}(p_n + q_m) \in K$ et on a

$$\|2f - (q_n + q_m)\|^2 \geq 4\gamma^2$$

et par suite

$$4\gamma^2 + \|q_n - q_m\|^2 \leq \|2f - (q_n + q_m)\|^2 + \|q_n - q_m\|^2 \leq 4\gamma^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

donc

$$\|q_n - q_m\|^2 \leq 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

et la suite (q_n) *est de Cauchy, elle converge vers* $q \in H$*, mais puisque* K *est fermé* $q \in K$*. D'autre part*

$$\gamma^2 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f - q_n\|^2 = \|f - q\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\gamma^2 + \frac{1}{n}\right) = \gamma^2,$$

ce qui montre que $\gamma = \|f - q\|$.

Pour montrer l'unicité de q*, on suppose qu'il existe* $w \in K$ *tel que* $\gamma = \|f - w\|$. *Alors* $\frac{1}{2}(q + w) \in K$ *et on a*

$$\left\| f - \frac{1}{2}(q + w) \right\| \geq \gamma.$$

En appliquant la régle de parallelogramme avec $x = f - q$ *et* $y = f - w$ *on obtient*

$$\|(f - q) + (f - w)\|^2 + \|(f - q) - (f - w)\|^2 = 2\|f - q\|^2 + 2\|f - w\|^2$$

donc

$$\begin{aligned} \|f - w\|^2 &= 2\|f - q\|^2 + 2\|f - w\|^2 - \|(f - q) + (f - w)\|^2 \\ &= 4\gamma^2 - 4\left\| f - \frac{1}{2}(q + w) \right\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que $q = w$*, d'ou l'unicité.*

Montrons l'équivalence entre (1.1) et (1.2).

Soit q *qui verifie (1.1) et prenons* $u \in K$*, alors pour tout* $0 < t \leq 1$*,* $v = (1 - t) q + tu \in K$ *et on a*

$$\|f - q\| \leq \|f - v\| = \|(f - q) - t(u - q)\|$$

par suite

$$\begin{aligned} \|f - q\|^2 &\leq ((f - q) - t(u - q), (f - q) - t(u - q)) \\ &\leq \|f - q\|^2 - 2t(f - q, u - q) + t^2\|u - q\|^2, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$(f - q, u - q) \leq t\|u - q\|^2.$$

En faisant tendre t *vers* 0 *on obtient (1.2).*

Inversement, soit q *verifiant (1.2), alors, on a pour tout* $u \in K$ *on a*

$$\begin{aligned} 2(f - q, u - q) &= (f - q, u - f + f - q) + (f - q, u - q) \\ &= \|f - p\|^2 + (f - q, u - f) + (u - q, f - q) \\ &= \|q - f\|^2 + (f - u + u - q, u - f) + (u - q, f - q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|q - f\|^2 - \|u - f\|^2 + (u - q, u - f) + (u - q, f - q) \\ 2(f - q, u - q) &= \|f - p\|^2 - \|u - f\|^2 + \|q - u\|^2. \end{aligned}$$

Par suite

$$2(f - q, u - q) - \|q - u\|^2 = \|q - f\|^2 - \|u - f\|^2 \leq 0$$

ce qui entraîne

$$\|q - f\|^2 \leq \|u - f\|^2, \forall u \in K$$

d'où (1.2).

Remarque 1.7. *L'élément q s'appelle la projection de f sur K est ce note $q = p_K(f)$.*

Proposition 1.5. *Soit K une partie fermée convexe non vide de d'un espace de Hilbert H, et $f_1, f_2 \in H$, alors,*

$$\|p_K(f_1) - p_K(f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Preuve. *Posant $u_1 = p_K(f_1)$ et $u_2 = p_K(f_2)$, alors, d'après (1.2) on a*

$$\begin{aligned}(f_1 - u_1, v - u_1) &\leq 0, \ \forall v \in K,\\ (f_2 - u_2, v - u_2) &\leq 0, \ \forall v \in K.\end{aligned}$$

En remplaçant v par u_2 dans la première et par u_1 dans la deuxième et on additionne on obtient

$$\begin{aligned}(f_1 - u_1, u_2 - u_1) + (f_2 - u_2, u_1 - u_2) &= (f_1 - u_1 - f_2 + u_2, u_2 - u_1)\\ &= (f_1 - f_2, u_2 - u_1) + \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0\end{aligned}$$

et par suite

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq (f_1 - f_2, u_2 - u_1) \leq \|f_1 - f_2\| \|u_2 - u_1\|,$$

d'où le résultat.

Corollaire 1.2. *Soit $M \subset H$ un sous espace vectoriel fermé. Soit $f \in H$ alors $q = p_K f$ est caracrérisé par*

$$\begin{cases} q \in M, \\ (f - q, v) = 0, \ \forall v \in M. \end{cases}$$

Preuve. *D'après (1.2) on a*

$$(f - q, v - q) \leq 0, \ \forall v \in M.$$

Puisque $tv \in M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(f - q, tv - q) \leq 0, \ \forall v \in M, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui peut s'écrire

$$t(f - q, v) - (f - q, q) \leq 0, \ \forall v \in M, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

Supposons que $(f - q, v) \neq 0$, alors $t(f - q, v) - (f - q, q)$ change de signe lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, ce qui est absurde, d'où le résultat.

Réciproquement, si $(f - q, v) = 0, \ \forall v \in M$, alors, pour $q \in M$, $v - q \in M$ et on a

$$(f - q, v - q) = 0, \ \forall v \in M$$

et par suite (1.2) est vérifié et $q = p_K f$.

Théorème 1.2. *Soit F un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H. Pour tout $u \in H$, il existe un unique $x \in F$ et un unique $y \in F^{\perp}$ tel que $u = x + y$ et on a*

$$\|u\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. *Puisque F est fermé et convexe, d'après le théorème 1.1 il existe $x \in F$ tel que$\|u - x\| \leq \|u - v\|$, pour tout $v \in F$. On pose $y = u - x$, (donc $u = x + y$). Comme $x + v \in F$ on a*

$$\|y - v\| = \|u - (x + v)\| \geq \|u - x\| = \|y\|.$$

En appliquent le lemme 1.8 on constate que $y \in F^{\perp}$ ce qui prouve l'existence de x et y tels que $u = x + y$.

Supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in F^{\perp}$ tels que

$$u = x_1 + y_1 = x_2 + y_2,$$

alors, $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$. Comme F et $F^{\perp}$ sont des sous espace vectoriel on a $x_1 - x_2 \in F$ et $y_2 - y_1 \in F^{\perp}$, mais $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, donc $x_1 = x_2$ et $y_2 = y_1$. D'autre part on a

$$\|u\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition 1.11. *Soit F un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H, alors pour tout $u \in H$ l'écriture $u = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$ s'appelle la décomposition orthogonale de u par rappor à F, le sous espace $F^{\perp}$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F.*

Remarque 1.8. *D'après le théorème précedent $H = F \oplus F^{\perp}$.*

Corollaire 1.3. *Soit F un sous espace fermé de H, alors $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.*

Preuve. *Si $x \in F$, on a $(x, y) = 0$, $\forall y \in F^{\perp}$ ce qui signifie que $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.*

Supposons que $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, d'après le théorème précédent $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Puisque $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et $z \in F^{\perp}$ on a

$$(x, y) = (z, y) = 0$$

donc

$$0 = (x, z) = (y + z, z) = (y, z) + \|z\|^2 = \|z\|^2$$

et par suite $x = y \in F$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset F$, d'où l'égalité.

Remarque 1.9. *Il est à noté que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de H.*

Corollaire 1.4. *Soit F un sous espace de H, alors $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{F}$.*

Preuve. *On $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{F}$.*

D'autre part, $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ qui est fermé, donc $\overline{F} \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, d'où l'égalité.

Théorème 1.3. *Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n\}$ une suite orthonormale. Soit $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ une suite. Alors la série $\sum\limits_{n \geq 1} \alpha_n e_n$ converge dans H si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geq 1} |\alpha_n|^2$ converge dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas on a*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

Démonstration. *Supposons que la série* $\sum_{n\geq 1}\alpha_n e_n$ *converge et soit* $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$. *Alors, pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$\langle x, e_m\rangle = \lim_{k\longrightarrow\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\alpha_n \langle e_n, e_m\rangle\right) = \alpha_m.$$

En appliquant l'inégalité de Bessel, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Inversement, supposons qu la série $\sum_{n\geq 1}|\alpha_n|^2$ *converge. Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $x_k = \sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n$. *Alors, pour* $j \leq k$ *on a*

$$\|x_k - x_j\|^2 = \left\|\sum_{n=j+1}^{k}\alpha_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k}|\alpha_n|^2.$$

Puisque la série $\sum_{n\geq 1}|\alpha_n|^2$ *est convergente la suite de somme partielle converge, elle est donc de Cauchy. Par suite la suite* (x_n) *est de Cauchy dans* H *qui est complet, donc elle converge.*

D'autre part,

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right\|^2 = \lim_{k\longrightarrow\infty}\left\|\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n\right\|^2 = \lim_{k\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2.$$

Corollaire 1.5. *Soit* $\{e_n\}$ *une suite orthonormale dans un espace de Hilbert* H. *Pour tout* $x \in H$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\, e_n$ *converge.*

Preuve. *D'après l'inégalité de Bassel* $\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2 < \infty$, *alors en appliquant le théorème ci-dessus avec* $\alpha_n = (x, e_n)$ *en constate que la série* $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\, e_n$ *converge.*

Théorème 1.4. *Soient* H *un espace de Hilbert et* $\{e_n\}$ *une suite orthonormale dans* H. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp} = \{0\}$,
2. *tout* $x \in H$ *s'écrit* $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\, e_n$,
3. *pour tout* $x \in H$ *on a* $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$.

Démonstration. *1)* $\Longrightarrow$ *2) Soit* $x \in H$ *et* $y = x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\, e_n$, *pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$\begin{aligned}(y, e_m) &= (x, e_m) - \lim_{k\longrightarrow\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)\, e_n, e_m\right)\\ &= (x, e_m) - \lim_{k\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)\,(e_n, e_m) = (x, e_m) - (x, e_m) = 0,\end{aligned}$$

alors $y \in \{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp}$, *donc* $y = 0$, *et par suite* $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$.

2) $\Longrightarrow$ *3) Supposons que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$, *alors*

$$\|x\|^2 = \left(x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \right) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n, \sum_{m=1}^{k} (x, e_m) e_m \right)$$
$$= \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} (x, e_n) \overline{(x, e_m)} (e_n, e_m) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k} |(x, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 .$$

3) $\Longrightarrow$ *1) Soit* $x \in \{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp}$, *donc* $(x, e_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et par suite*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = 0$$

ce qui entraîne que $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp} = \{0\}$.

Définition 1.12. $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ *une suite orthonormale dans un espace de Hilbert* H. $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ *est dite base orthonormale si l'une des conditions du théorème 1.4 est vérifiée.*

Lemme 1.10. *Soit* $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ *une suite orthonormale dans un espace de Hilbert* H, *alors,* $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base orthonormale si et seulement si l'espace engendré par* $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ *est dense dans* H.

Preuve. *Supposons que* $\overline{Vect\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}} = H$ *et soit* $y \in \{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp}$, *alors,*

$$(y, e_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

donc $Vect\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \{y\}^{\perp}$, *mais* $\{y\}^{\perp}$ *est un sous espace fermé de* H *donc*

$$H = \overline{Vect\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}} \subset \{y\}^{\perp} ,$$

par suite $y \in \{y\}^{\perp}$ *et on a* $(y, y) = 0$, *ce qui implique* $y = 0$, *donc* $\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp} = \{0\}$.

Inversement, tout $x \in H$ *s'écrit* $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ *donc* $x \in Vect\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \overline{Vect\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}}$, *et par suite* $H = \overline{Vect\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}}$.

Remarque 1.10. *Le point 3. du théorème 1.4 est appelé inégalité the Bessel-Parseval. C'est un cas particulier de l'inégalité de Bessel. Plus précisement : l'inégalité de Bessel est valable pour tout suite orthonormale, parcontre l'égalité de Parseval est valable dans le cas ou la suite orthonormale est une base orthonormale.*

Théorème 1.5. *1) Tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.*

2) Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement si il a une base orthonormale.

Démonstration. *1) Soit* X *un espace vectoriel normé et* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est une base de* X. *Alors, l'ensemble de toutes les combinaisons de la forme* $\sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k e_k$, *où les* $\alpha_k \in \mathbb{Q}$ *est dénombrable et dense dans* X.

2)

1.4 Series de Fourier

Lemme 1.11. *L'ensemble des fonctions*

$$C=\left\{c_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},c_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

est une base orthornormale de $L^2[0,\pi]$.

Corollaire 1.6. *L'espace* $L^2[0,\pi]$ *est séparable.*

Lemme 1.12. *L'ensemble des fonctions*

$$S=\left\{c_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

est une base orthornormale de $L^2[0,\pi]$.

Corollaire 1.7. *Les ensembles des fonctions*

$$E=\left\{e_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx};n\in\mathbb{Z}\right\}$$

et

$$F=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}c_0,\frac{1}{\sqrt{2}}c_n,\frac{1}{\sqrt{2}}s_n,n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

sont des bases orthonormales de $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$.

Chapitre 2

Introduction aux opérateurs linéaires bornés

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un opérateur linéaire de X dans Y est une application $T : X \longrightarrow Y$ qui vérifie :*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)\,,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall x, y \in X.$$

On note l'image de x par Tx au lieu de $T(x)$. L'espace des opérateurs linéaires de X dans Y se note $L(X, Y)$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ pour l'addition et la multiplication par les scalaires

$$(T + S)\,x = Tx + Sx,$$
$$(\lambda T)\,x = \lambda\,(Tx)\,.$$

L'opérateur identité noté I, est défini par $I(x) = x, \forall x \in X$.

Remarque 2.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $T : X \longrightarrow Y$ un operateur linéaire, alors, T est continu sur X, si*

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in X; \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Ty\| < \varepsilon.$$

L'espace des opérateurs linéaires et continus de X dans Y est noté $L(X, Y)$. Lorsque $Y = \mathbb{F}$, l'espace $L(X, \mathbb{F})$ s'appelle espace dual de X et se note X', ses élements s'appellent fonctionnelles sur X.

Proposition 2.1. *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un operateur linéaire, les assertions suivantes sont équivalentes,*

1) T est uniformément continu,
2) T est continu,
3) T est continu en 0,
4) $\exists C > 0 : \forall x \in X, \|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|Tx\| \leq C$,
5) $\exists C > 0, \|Tx\| \leq C\,\|x\|\,,\ \forall x \in X$.

Démonstration. Il est clair que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3). Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 4), la continuité de T à 0 se traduit pour $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E, \|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1,$$

alors, pour $x \in E : \|x\| < 1$ on a $\left\|\frac{\delta x}{2}\right\| < \delta$ et par suite

$$\left\|T\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right\| < 1$$

donc

$$\|Tx\| < \frac{2}{\delta} = C.$$

Montrons que 4) $\Longrightarrow$ 5) Soit $x \in E : x \neq 0$, alors, $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq 1$ et par suite,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq C$$

donc $\|Tx\| \leq C\|x\|$, pour $x = 0$ on a $\|T(0)\| = C\|0\|$. Montrons que 5) $\Longrightarrow$ 1). Soient $x, y \in E$ et soit $\varepsilon > 0$, puisque,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq C\|x-y\|$$

alors, pour que $\|Tx - Ty\| < \varepsilon$, il suffit que, $C\|x-y\| < \varepsilon$, ce qui se vérifie si $\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{C}$. Il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. $\square$

Définition 2.2. *Un opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est dit borné, s'il transforme tout ensemble borné de X à un ensemble borné de Y, c'est à dire*

$$\exists k > 0;\ \|Tx\| \leq k\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Remarque 2.2. *Il est à noté que d'après la proposition ci-dessus les termes borné et continu n'ont aucune différence pour les opérateurs linéaires. L'espace $L(X,Y)$ se note aussi $B(X,Y)$.*

Exemple 2.1. *Soit $T : C_{\mathbb{F}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{F}$ définie par $Tf = f(0)$.*
$|Tf| = |f(0)| \leq \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)| = \|f\|$, *donc*

$$\|Tf\| \leq \|f\|$$

et par suite T est continu.

Exemple 2.2. *Soit $\{c_n\} \in \ell^\infty$ et $T : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$T(x_n) = \sum_{n\geq 1} c_n x_n.$$

$$|T(x_n)| = \left|\sum_{n\geq 1} c_n x_n\right| \leq \sum_{n\geq 1} |c_n x_n| \leq \sup_{n\geq 1} |c_n| \sum_{n\geq 1} |x_n|$$

donc

$$|T(x_n)| \leq \|(c_n)\|_\infty \|(x_n)\|_1,$$

et T est coninu.

Exemple 2.3. *Soit* $k : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue, alors*

$$M = \sup \{|k(x,y)|, x, y \in [a,b]\} < \infty.$$

Soit

$$K : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$
$$K(f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy$$

alors, K *est continu.*

Exemple 2.4. *Soit* $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}[0,1] \subset C_{\mathbb{C}}[0,1]$ *l'ensemble des polynomes sur* $[0,1]$ *et soit*

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[0,1]$$
$$: f \longrightarrow f'.$$

Soit $f(t) = t^n$, *alors* $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}[0,1]$. $(Tf)(t) = nt^{n-1}$.

$$\|f\| = 1, \ \|f'\| = n$$

Il n'existe pas une constante $k > 0$ *qui verifie*

$$\|Tf\| = n \leq k \|f\| = k,$$

donc T *n'est pas continu.*

2.1.1 Norme d'un opérateur

Lemme 2.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces normé, alors,* $\|\cdot\| : L(Y,X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\|T\|_{L(Y,X)} = \sup \{\|Tx\| ; \|x\| \leq 1\}$$

est une norme sur $L(Y,X)$.

Preuve. *i) Soit* $R = 0$, *c'est à dire* $R(x) = 0$ *pour tout* $x \in X$, *alors* $\|R\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|R(x)\| = 0$.

Reciproquement, suppsons que $\|T\| = 0$, *donc* $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = 0$ *ce qui donne* $T(x) = 0, \forall x \in X$, *c'est à dire* $T = 0$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda T x\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|.$$

iii)

$$\begin{aligned} \|T + S\| &= \sup \{\|Tx + Sx\| ; \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup \{\|Tx\| + \|Sx\| ; \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup \{\|Tx\| ; \|x\| \leq 1\} + \sup \{\|Sx\| ; \|x\| \leq 1\} = \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

Exemple 2.5. $T : C_{\mathbb{F}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{F},\ Tf = f(0)$,

$$\|T\| = \sup_{\|f\|\le 1} |f(0)| \le \sup_{\|f\|\le 1} \sup_{0\le x\le 1} |f(x)| = \sup_{\|f\|\le 1} \|f\| = 1.$$

D'autre part soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $g(x) = 1$, *alors,* $g \in C[0,1]$ *et* $\|g\| = 1$.
$|Tg| = |g(0)| = 1$, *donc* $\|T\| \ge |Tg| = 1$, *par suite* $\|T\| = 1$.

Proposition 2.2. *La norme d'un opérateur bornée est encore donnée par l'expression*

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tx\| \le C\|x\|, \forall x \in X\}.$$

Démonstration. *On montre l'égalité des deux expressions.*

1) Puisque T *est continu, d'après la proposition 2.1, il existe* $C > 0$ *tel que* $\|Tx\| \le C\|x\|$, $\forall x \in X$, *alors,*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \le \sup_{x\in X} \|Tx\| \le \inf\{C > 0 : \|Tx\| \le C\|x\|, \forall x \in X\}.$$

Définition 2.3. *Soient* X, Y *deux espaces normé et* $T : X \longrightarrow Y$ *un opérateur linéaire. On dit que* T *est une isometrie si* $\|Tx\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in X$.

Exemple 2.6. $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ *définie par*

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, ..) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ..).$$

est une isométrie.

Lemme 2.2. T *est une isométrie si et seulement si* $\|T\| = 1$.

Théorème 2.1. *Soient* H *un espace de Hilbert de dimension infinie et* $\{e_n\}$ *une base orthonormale de* H. *Alors il existe une isométrie* $T : H \longrightarrow \ell^2$ *telle que*

$$Te_n = e_n^*,$$

où $e_n^* = \left(0, 0, ..., \underset{\underset{n}{\uparrow}}{1}, 0, ..\right)$.

Démonstration. *Soit* $x \in H$, *comme* $\{e_n\}$ *une base orthonormale on a* $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ *de plus de l'égalité de Bessel-Parseval on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2,$$

ce qui signifie que $\{(x, e_n)\} \in \ell^2$. *Alors, on définie*

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow \ell^2 \\ : x &\longrightarrow \{(x, e_k)\} \end{aligned}$$

Si $x = e_n$ *alors,* $\{(x, e_n)\} = e_n^*$, *de plus, on a*

$$\|Tx\|^2 = \|\{(x, e_n)\}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2.$$

2.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 2.4. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{F}$. L'espace $L(H, \mathbb{F})$ s'appelle espace dual de H et se note H'.*

Soit $\varphi \in H'$ pour tout $v \in H$ l'image de v par φ se note $\langle \varphi, v \rangle$ et les crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'appelle produit de dualité.

Théorème 2.2. ***(de Riesz)*** *Pour tout $\varphi \in H'$ il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ \forall v \in H.$$

De plus on a

$$\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H \, .$$

Démonstration. *Si $\langle \varphi, v \rangle = 0$ pour tout $v \in H$, il suffit de choisir $f = 0$.*

Supposons que $\varphi \neq 0$,

$$Ker\varphi = \{v \in H; \langle \varphi, v \rangle = 0\}$$

est un sous espace fermé de H et $(Ker\varphi)^{\perp} \neq 0$, alors il existe $z \in H$ telle que

$$\langle \varphi, z \rangle = 1$$

par suite $z \neq 0$, on pose $f = \frac{z}{\|z\|^2}$.

Pour tout $v \in H$ on a

$$\langle \varphi, v - \langle \varphi, v \rangle z \rangle = \langle \varphi, v \rangle - \langle \varphi, v \rangle \langle \varphi, z \rangle = 0,$$

donc $v - \langle \varphi, v \rangle z \in Ker\varphi$, et comme $z \in (Ker)^{\perp}$ on a

$$(v - \langle \varphi, v \rangle z, z) = 0$$

et par suite

$$(v, z) = \langle \varphi, v \rangle \|z\|^2$$

donc

$$\langle \varphi, v \rangle = \frac{(v, z)}{\|z\|^2} = \left(v, \frac{z}{\|z\|^2} \right) = (v, f) \, .$$

D'autre part, soit $\|v\| \leq 1$, alors,

$$|\langle \varphi, v \rangle| = |(f, v)| \leq \|f\| \|v\| \leq \|f\| \, .$$

Soit $v = \frac{f}{\|f\|}$, alors

$$\|\varphi\| \geq |\langle \varphi, v \rangle| = \frac{|\langle \varphi, f \rangle|}{\|f\|} = \frac{(f, f)}{\|f\|} = \|f\| \, ,$$

d'où l'égalité.

Remarque 2.3. *D'après le théorème de représentation de Riesz, tout espace de Hilbert H est identifié a son dual H'.*

Définition 2.5. *Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{F}$, On dit que*

1. *a est bilinéaire, si elle est linéaire par rapport à chaque composante.*

2. *a est continue s'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq k \|u\| \|v\|, \ \forall u, v \in H.$$

3. *a est coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \ \forall u \in H.$$

Théorème 2.3. *(**Lax-Milgram**) Soient $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{F}$ une forme bilinéaire continue et coercive, alors pour tout forme linéaire et continue $L : H \longrightarrow \mathrm{IF}$, il existe $u \in H$ unique telle que*

$$a(u,v) = Lv, \ \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par le propriété

$$\frac{1}{2}a(u,u) - Lu = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - Lv \right\}.$$

Définition 2.6. *Un opérateur $T \in L(X,Y)$ est dit inversible s'il existe un opérateur $S \in L(Y,X)$, tel que $TS = I_Y$, et $ST = I_X$. Dans se cas S se note T^{-1}.*

Exemple 2.7. *Soient $f \in C[0,1]$ et $T_f \in L\left(L^2[0,1]\right)$ defini par*

$$(T_f u)(x) = f(x) u(x), \ u \in L^2[0,1].$$

Alors $T_f \in L\left(L^2[0,1]\right)$. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1+x$. Alors, T_f est inversible.
Soit $g(x) = \frac{1}{x+1}$, alors, $T_g \in B\left(L^2[0,1]\right)$ et on a

$$(T_f T_g u)(x) = f(x) g(x) u(x) = u(x)$$

et

$$(T_g T_f u)(x) = g(x) f(x) u(x) = u(x)$$

donc T_f est inversible et $T_f^{-1} = T_g$.

Théorème 2.4. *Soient X un espace de Banach et $T \in L(X)$ avec $\|I - T\| < 1$,alors, T est inversible et*

$$T^{-1} = \sum_{n \geq 0} (I - T)^n.$$

Théorème 2.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach, alors si $T \in L(X,Y)$ est bijectif, il est inversible.*

Définition 2.7. *Un opérateur non borné est un opérateur $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, définit sur $D(A)$ un sous espace de X appelé domaine de A.*

L'opérateur A est continu (borné) s'il éxiste une constante positive C telle que

$$\|Ax\| \leq C \|x\|, \forall x \in D(A).$$

La plus petite constante C qui vérifie l'inégalité au-dessus est la norme de A,

$$\|A\| = \inf \{C > 0, \|Ax\| \leq C \|x\|, \forall x \in D(A)\}.$$

Exemple 2.8. *Soient* $k : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $M = \sup\limits_{0\leq x,y\leq 1} |k(x,y)|$ *et soit* $A : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ *défini par*

$$(Af)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

$$|Af(x)| \leq \int_0^1 |k(x,y) f(y)|\, dy \leq \|f\| \int_0^1 |k(x,y)|\, dy \leq M\|f\| \int_0^1 dy = M\|f\|$$

Donc, $\|Af\| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |Af(x)| \leq M\|f\|$

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \leq M$$

et A *est borné.*

Exemple 2.9. *Soit* $X = C([0,1], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, muni de la norme de* sup *et soit* $A : X \longrightarrow X$ *defini par*

$$Af = f',$$

alors, $D(A) = C^1([0,1], \mathbb{R})$.

Pour $f(x) = x^n$ *on a* $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$, *mais* $\|Af\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|nx^{n-1}\right| = n$, *donc*

$$\forall C > 0, \exists f \in D(A), f(x) = x^n, n > C : \|f\| = 1, \|Af\| > C,$$

A *est alors non borné.*

Topologie de L (X)

Soient X un espace de Banach et $L(X)$ l'espace des operateurs linéaires continus de X dans X, c'est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$$

et la multiplication des operateurs définie par

$$TS(x) = T(S(x)),\ x \in X.$$

La topologie induite par la norme définie ci-dessus, s'appelle la topologie de la convergence uniforme et elle est caracterisée par le fait que

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } L(X) \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

On peut aussi munir $L(X)$ par la topologie forte caractérisé par le fait qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un operateur T si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n x - Tx\| = 0,\ \forall x \in D(T),$$

ou la topologie faible caractérisé par la convergence de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers T définie comme suit

$$T_n \rightharpoonup T \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle f, (T_n - T)x\rangle = 0, \forall x \in D(T), \forall f \in X'.$$

Définition 2.8. *Un opérateur* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$*, est dit fermé si* $D(A) \times R(A)$ *est fermé dans* $X \times Y$*; c'est à dire*

$$\forall (x_n) \subset D(A) : \lim x_n = x, \text{ alors, } x \in D(A), \lim Ax_n = Ax.$$

Théorème 2.6. *Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *un opérateur linéaire. Si* $\mathcal{G}(A)$ *le graphe de* A *est fermé alors* A *est borné.*